Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 19.11.2018

Blatt 7

Übungen zu Funktionalanalysis I

1. (a) (5P) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f \in H(G)$. Zeigen Sie, dass $B = \{g \in H(G) \mid |g| \leq |f|\}$ beschränkt in $H(G)$ ist.
   (b) (5P) Geben Sie ein Beispiel für ein $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ an, für welches $M = \{g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid |g| \leq |f|\}$ nicht beschränkt ist.

2. (10P) Seien X und Y Hausdorffsche topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn
$$\lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha) = f\Big(\lim_{\alpha \in A} x_\alpha\Big)$$
für jedes konvergente Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in X.

3. Es sei $(A, \leq)$ die folgende geordnete Menge:
$$A = \mathbb{N}, \qquad n \leq m \Leftrightarrow n \text{ teilt } m.$$
   (a) (1P) Zeigen Sie, dass $(A, \leq)$ gerichtet ist.
   (b) (5P) Es sei $\mu_1 = 1$, und für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit Primzerlegung $n = \prod_{j=1}^{\ell} p_j^{k_j}$ seien $\lambda_n = \sum_{j=1}^{\ell} k_j$ und $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$. Untersuchen Sie, ob das Netz $(\mu_n)_{n \in A}$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls seinen Grenzwert.
   Hinweis: Einige Beispiele: $\mu_{10} = \frac{1}{2}$, $\mu_{11} = 1$, $\mu_{12} = \frac{1}{3}$.
   (c) (4P) μ_n sei definiert wie in Teil (b). Untersuchen Sie, ob die Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

4. (10P) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}'(\Omega)$ schwach*-folgenvollständig ist.

Abgabe: Mo, 26.11.2018, in der Vorlesung **Besprechung:** 5. Dezember