Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 26.11.2018

Blatt 8

# Übungen zu Funktionalanalysis I

1. Betrachten Sie für ein kompaktes Intervall $K \subset \mathbb{R}$ die Banachalgebra $C(K)$.

   (a) (3P) Bestimmen Sie $\mathcal{G}(C(K))$.

   (b) (3P) Sei $f \in C(K)$ gegeben durch $f(x) = x$, $x \in K$. Zeigen Sie $\sigma(f) = K$.

   (c) (4P) Sei $g \in C(K)$ beliebig. Bestimmen Sie $\sigma(g)$.

2. (a) (3P) Gegeben sei die Banachalgebra $\mathbb{C}^{2\times 2}$, wobei die Norm auf $\mathbb{C}^{2\times 2}$ eine beliebige Operatornorm ist. Bestimmen Sie den Spektralradius von

   $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

   (b) (7P) Sei $M$ die Matrix aus Teil (a). Zeigen Sie, dass es keine Matrix $N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $N^2 = M$ gibt.
   *Hinweis:* Überlegen Sie sich, welche Eigenwerte $N$ haben müsste und wie die Jordansche Normalform von $N$ aussehen müsste.

3. (10P) Es sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Reihe

   $$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n)$$

   in $\mathscr{S}_b'(\mathbb{R})$ gegen eine $2\pi$-periodische $C^\infty$-Funktion konvergiert.

4. (10P) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}(\Omega)$ von erster Kategorie in sich ist.

**Abgabe:** Mo, 03.12.2018, in der Vorlesung

**Besprechung:** 12. Dezember