Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 03.12.2018

Blatt 9

# Übungen zu Funktionalanalysis I

1. Betrachten Sie für $H = L^2[0,1]$ die Banachalgebra $L(H)$. Für eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei $T_f \in L(H)$ gegeben durch $T_f(g) = fg$, $g \in H$.

   (a) (6P) Nehmen Sie an, dass $f$ eine Nullstelle $x_0 \in [0,1]$ besitzt, und definieren Sie für $\delta > 0$ die Funktion $g_\delta \in L^2[0,1]$ durch
   $$g_\delta(x) = \begin{cases} f(x), & |x - x_0| < \delta, \\ 0, & |x - x_0| \geq \delta. \end{cases}$$
   Zeigen Sie, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\|T_f(g_\delta)\|_2 \leq \epsilon \|g_\delta\|_2$.

   (b) (2P) Zeigen Sie, dass $0 \in \sigma(T_f)$, falls $f$ eine Nullstelle besitzt.

   (c) (2P) Bestimmen Sie $\sigma(T_f)$.

2. Sei $A$ eine $C^*$-Algebra und sei $a \in A$.

   (a) (5P) Zeigen Sie für selbstadjungiertes $a$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dass $(a + \lambda e)(a + \overline{\lambda} e)^{-1}$ unitär ist.

   (b) (5P) Zeigen Sie im Fall, dass $a - ie$ invertierbar und $(a + ie)(a - ie)^{-1}$ unitär ist, dass $a$ selbstadjungiert ist.

3. (10P) Es sei $A$ ein Banachraum, der eine Algebra ist. Die Multiplikation in $A$ sei *separat stetig*, d. h. für jedes $x \in A$ ist die Abbildung $y \mapsto xy$ stetig und für jedes $y \in A$ ist die Abbildung $x \mapsto xy$ stetig. Zeigen Sie die Existenz eines $C > 0$, so dass
   $$\|xy\| \leq C\|x\|\|y\|.$$
   *Hinweis:* Verwenden Sie eine der Folgerungen aus dem Baireschen Kategoriensatz.

4. Für $j = 1, \ldots, n$ seien $a_j < b_j$ gegeben. Ferner sei $Q = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ ein Quader.

   (a) (2P) Zeigen Sie, dass durch
   $$f \mapsto \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_1$$
   ein positiv lineares Funktional auf $C(Q)$ gegeben wird; hierbei sind die Integrale als Riemannintegrale zu verstehen.

   (b) (8P) Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt die Existenz eines Borelmaßes $\mu$ auf $Q$, so dass
   $$\int_Q f\, d\mu = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_1$$
   für alle $f \in C(Q)$. Um welches Maß handelt es sich?
   *Hinweis:* Beweisen Sie Ihre Behauptung!

**Abgabe:** Mo, 10.12.2018, in der Vorlesung **Besprechung:** 19. Dezember