Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 12.10.2018

Präsenzübungsblatt 1

Präsenzübungen zu Funktionalanalysis I

1. Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}$ ist offen in der ko-abzählbaren Topologie τ_{cc}, wenn $G = \emptyset$ oder $\mathbb{R} \setminus G$ höchstens abzählbar ist. Wir bezeichnen $\mathbb{R}$, versehen mit der ko-abzählbaren Topologie, mit X und wir bezeichnen $\mathbb{R}$, versehen mit der diskreten Topologie, mit Y. Die Abbildung $f\colon X \to Y$ sei gegeben durch $f(x) = x$.
   (a) Zeigen Sie, dass τ_{cc} in der Tat eine Topologie ist.
   (b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann in der ko-abzählbaren Topologie gegen x konvergiert, wenn fast alle Folgenglieder gleich x sind.
   (c) Zeigen Sie, dass f unstetig ist.
   (d) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X.

2. Es sei I eine Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei X_i ein lokalkonvexer Raum. Das Produkt
$$X := \prod_{i\in I} X_i$$
trage die Produkttopologie. Zeigen Sie, dass X lokalkonvex ist.

3. Es sei
$$\varphi := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, x_n = 0 \text{ für fast alle } n\right\}$$
der Raum der endlichen Folgen.
Ferner sei
$$A := \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \middle| a_n > 0 \text{ für alle } n\right\}.$$
Für $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varphi$ definieren wir
$$p_a((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n |x_n|.$$
Zeigen Sie, dass φ zu einem lokalkonvexen Raum wird, wenn man als Nullumgebungsbasis die Menge
$$\mathcal{U} := \{p_a^{-1}([0,1[) \big| a \in A\}$$
wählt.

Die Präsenzübungen werden nicht korrigiert.

Besprechung: 17. Oktober