Funktionalanalysis I

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2018/19

Inhaltsverzeichnis

1 Mengentopologie

Überall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Null ist keine natürliche Zahl.

1.1 Definition. Eine *Topologie* auf einer Menge X ist ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X mit den folgenden drei Eigenschaften

(a) $X \in \mathcal{O}$ und $\emptyset \in \mathcal{O}$.

(b) Die Vereinigung beliebig vieler Mengen in $\mathcal{O}$ ist wieder in $\mathcal{O}$.

(c) Der Durchschnitt endlich vieler Mengen in $\mathcal{O}$ ist wieder in $\mathcal{O}$.

Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Mengen*.

1.2 Beispiel. (a) Die Potenzmenge von X ist eine Topologie auf X, welche als *diskrete Topologie* bezeichnet wird.

(b) $\{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie auf X (genannt "der Klumpen").

(c) Wenn X mit einer Metrik versehen ist, dann haben wir schon eine Definition des Begriffs "offen" aus der Analysis II. Die in diesem Sinn offenen Mengen bilden eine Topologie.

(d) Die Topologie τ_{cc} auf $\mathbb{R}$ besteht aus $\emptyset$ sowie allen Mengen G, für welche $\mathbb{R} \setminus G$ höchstens abzählbar ist. Sie heißt *ko-abzählbare Topologie*.

1.3 Bemerkung. (a) Man sagt, eine Topologie $\mathcal{O}_1$ sei *gröber* oder *schwächer* als eine andere Topologie $\mathcal{O}_2$, wenn $\mathcal{O}_1$ eine Teilmenge von $\mathcal{O}_2$ ist. In diesem Fall sagt man auch, dass $\mathcal{O}_2$ *feiner* als $\mathcal{O}_1$ ist.

(b) Der Durchschnitt beliebig vieler Topologien auf X ist wieder eine Topologie auf X.

1.4 Satz. *Es sei $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen von X. Nach Bemerkung 1.3 existiert eine gröbste Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$, welche $\mathcal{B}$ umfasst. Eine Menge G ist genau dann offen in $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$, wenn es eine Indexmenge A und zu jedem $\alpha \in A$ Elemente $G_{\alpha,1}, \ldots, G_{\alpha,n_\alpha}$ in $\mathcal{B}$ gibt, so dass*

$$G = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{j=1}^{n_\alpha} G_{\alpha,j}.$$

1.5 Definition. In der Situation von Satz 1.4 bezeichnet man $\mathcal{B}$ als *Basis* der Toplogie und $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ als die *erzeugte Topologie.*

1.6 Definition. Sei $a \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von a, wenn es eine offene Menge G mit $a \in G \subset U$ gibt.

Für eine beliebige Menge M ist a ein *innerer Punkt* von M, wenn M Umgebung von a ist. Das *Innere* von M besteht aus allen inneren Punkten von M. Man schreibt $\mathring{M}$ für das Innere von M.

1.7 Lemma. *M ist genau dann offen, wenn $M = \mathring{M}$.*

1.8 Definition. Ein topologischer Raum heißt *separiert* oder *Hausdorffsch*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $a \neq b$ in X Umgebungen U_a von a und U_b von b gibt, so dass $U_a \cap U_b = \emptyset$.

1.9 Beispiel. Jede Topologie, die von einer Metrik induziert wird, ist hausdorffsch. Die ko-abzählbare Topologie auf $\mathbb{R}$ ist nicht hausdorffsch.

1.10 Definition. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* genau dann gegen a, wenn es zu jeder Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \in U$ für alle $n \geq N$.

1.11 Beispiel. Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in der ko-abzählbaren Topologie, wenn es ein N gibt, so dass $x_n = x_N$ für alle $n \geq N$.

Das wird der ersten Präsenzübung gezeigt.

1.12 Definition. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Der Abschluss $\overline{M}$ einer Menge M ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von M.

1.13 Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig* in $a \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U von $f(a)$ eine Umgebung W von a mit $f(W) \subset U$ gibt.

1.14 Satz. *$f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $G \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(G)$ offen ist.*

1.15 Bemerkung.

(a) Wenn f stetig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge ist, dann konvergiert $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$.

(b) Es gibt aber topologische Räume X und Y und unstetige Abbildungen $f\colon X \to Y$, für die trotzdem $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\big)$ für alle konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt. Ein Beispiel bildet die Identität von $\mathbb{R}$, wenn man $\mathbb{R}$ einmal mit der ko-abzählbaren und einmal mit der diskreten Topologie versieht. Auch das wird in der ersten Präsenzübung gezeigt.

1.16 Definition. Sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X und sei Y eine Teilmenge von X. Dann ist

$$\mathcal{O}_Y = \{G \cap Y \mid G \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf Y. Man bezeichnet sie als *Teilraumtopologie*.

1.17 Definition. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die gröbste Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$, für welche alle kanonischen Abbildungen $\pi_i \colon \prod_{j \in I} X_j \to X_i$, $(x_j)_{j \in I} \mapsto x_i$, stetig sind, heißt *Produkttopologie*.

1.18 Satz. *Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Produkte der Form $\prod_{i \in I} G_i$, wobei alle G_i offen in X_i und nur endlich viele G_i von X_i verschieden sind. Eine Menge $M \subset \prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann offen in der Produkttopologie, wenn sie Vereinigung von Elementen von $\mathcal{B}$ ist.*

Sind alle X_i Hausdorffsch, so ist auch $\prod_{i \in I} X_i$ Hausdorffsch.

1.19 Definition. Ein Hausdorffscher topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt kompakt, wenn sie kompakt in der Teilraumtopologie ist.

1.20 Bemerkung. Ein Hausdorffscher topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn es zu jeder Familie $(A_i)_{i \in I}$ von abgeschlossenen Mengen mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ eine endliche Teilmenge $J \subset I$ gibt, so dass $\bigcap_{i \in J} A_i = \emptyset$.

1.21 Satz. *Sei $f \colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen Hausdorffschen topologischen Räumen. Wenn X kompakt ist, dann auch $f(X)$.*

1.22 Theorem (Tychonoff). *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann kompakt, wenn alle X_i kompakt sind.*

Diesen Satz zeige ich nicht. Am bequemsten folgert man ihn aus dem Ultrafiltersatz. So wird das sowohl in Meise und Vogt als auch in der Topologie von Schubert gemacht.

2 Lokalkonvexe Räume

2.1 Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Halbnorm* auf E ist eine Funktion $p\colon E \to [0, \infty[$ mit den folgenden Eigenschaften:

(N1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

(N2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in E$ (Dreiecksungleichung).

Eine Halbnorm, die auch noch die Eigenschaft

(N3) $p(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,

besitzt, ist eine *Norm*.

2.2 Beispiel. (a) Sei $E = C(\mathbb{R}^N)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\|f\|_n = \sup_{|x| \leq n} |f(x)|$ eine Halbnorm auf $C(\mathbb{R}^N)$. Sie ist keine Norm.

(b) Sei $E = H(\mathbb{C})$ der Raum der ganzen Funktionen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\|f\|_n = \sup_{|z| \leq n} |f(z)|$ eine Norm auf $H(\mathbb{C})$. Für $n \neq m$ sind die Normen $\|\cdot\|_n$ und $\|\cdot\|_m$ nicht äquivalent.

2.3 Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) $M \subset E$ heißt *konvex*, wenn für je zwei $x, y \in M$ die Verbindungsstrecke $\{\lambda x + (1 - \lambda) y \mid \lambda \in [0, 1]\}$ in M liegt.

(b) M heißt *absolutkonvex*, wenn für alle Wahlen von $x, y \in M$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ auch $\lambda x + \mu y \in M$.

Beispiel. Sei p eine Halbnorm und $r > 0$. Dann sind $p^{-1}([0, r[)$ und $p^{-1}([0, r])$ absolutkonvex.

2.4 Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, der eine Topologie trägt. Ein System $\mathcal{U}$ von Umgebungen der Null heißt *Nullumgebungsbasis*, wenn es zu jeder Umgebung V der Null ein Element $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset V$ gibt.

Beispiel. Sei E ein normierter Raum. Dann sind $\{B_{1/n}(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\{\overline{B}_{1/n}(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ Nullumgebungsbasen. Hierbei $B_\epsilon(x) = \{y \in E \mid \|x - y\| < \epsilon\}$.

2.5 Definition. Ein *lokalkonvexer* Raum ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum E zusammen mit einer Topologie, so dass

(a) E Hausdorffsch ist,

(b) die Addition $+\colon E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$, stetig ist,

(c) die Multiplikation mit Skalaren $\cdot\colon \mathbb{K} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, stetig ist,

(d) E eine Nullumgebungsbasis besitzt, die aus absolutkonvexen Mengen besteht.

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, der nur die Eigenschaften (a)–(c) besitzt, ist ein *topologischer Vektorraum.*

2.6 Beispiel. (a) Normierte Räume sind lokalkonvex.

(b) $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$ ist noch nicht einmal ein topologischer Vektorraum.

2.7 Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) $M \subset E$ heißt *absorbierend*, wenn es zu jedem $x \in E$ ein $R > 0$ gibt, so dass $x \in RM$.

(b) Sei $A \subset E$ absorbierend und absolutkonvex. Das *Minkowski-Funktional* $\|\cdot\|_A$ ist definiert durch
$$\|x\|_A = \inf\{t > 0 \mid x \in tA\}.$$

2.8 Satz. *Sei E ein lokalkonvexer Raum, sei U eine absolutkonvexe Nullumgebung.*

(a) U ist absorbierend.

(b) Das Minkowski-Funktional $\|\cdot\|_U$ ist eine stetige Halbnorm auf E.

(c) $\mathring{U} = \{x \in E \mid \|x\|_U < 1\} \subset U \subset \{x \in E \mid \|x\|_U \leq 1\} = \overline{U}$.

(d) Für $\lambda \in [0, 1[$ gilt $\lambda \overline{U} \subset \mathring{U}$.

Den Beweis findet man im Buch von Meise und Vogt.

2.9 Satz. *Es seien E und F lokalkonvexe Räume und es sei $A\colon E \to F$ eine lineare Abbildung. Es sind gleichwertig:*

(a) A ist stetig.

(b) Für jede Nullumgebung V in F ist $A^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in E.

(c) Zu jeder stetigen Halbnorm q auf F existieren eine stetige Halbnorm p auf E und $C > 0$, so dass $q(Ax) \leq Cp(x)$ für alle $x \in E$.

2.10 Bezeichnung. (a) Ein *Fundamentalsystem* von Halbnormen auf einem lokalkonvexen Raum E ist ein System $\mathcal{P}$ stetiger Halbnormen auf E, so dass es zu jeder stetigen Halbnorm p auf E ein $C > 0$ und ein $q \in \mathcal{P}$ gibt, so dass $p \leq Cq$.

(b) Die Minkowski-Funktionale einer Nullumgebungsbasis bilden ein Fundamentalsystem von Halbnormen. Hat man umgekehrt ein Fundamentalsystem $\mathcal{P}$ von Halbnormen, so wird durch

$$\mathcal{U} := \left\{ \left\{ x \in E \,\middle|\, p(x) < \frac{1}{n} \right\} \,\middle|\, p \in \mathcal{P},\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

eine Nullumgebungsbasis von E gegeben.

Wir zitieren den Satz von Hahn-Banach aus der Einführung in die Funktionalanalysis.

2.11 Satz. *Sei* E *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum, sei* p *eine Halbnorm auf* E*, sei* $F \subset E$ *ein Unterraum, und sei* $y\colon F \to \mathbb{K}$ *linear mit* $|y(x)| \leq p(x)$ *für alle* $x \in F$*. Dann existiert* $Y\colon E \to \mathbb{K}$ *linear mit* $Y|_F = y$ *und* $|Y(x)| \leq p(x)$ *für alle* $x \in E$*.*

2.12 Korollar. *Es seien* E *ein lokalkonvexer Raum und* F *ein Unterraum (versehen mit der Teilraumtopologie). Ferner sei* $y\colon F \to \mathbb{K}$ *stetig und linear. Dann besitzt* y *eine stetige, lineare Fortsetzung* $Y\colon E \to \mathbb{K}$*.*

2.13 Definition. Seien E und F lokalkonvexe Räume. Der $\mathbb{K}$-Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen $E \to F$ wird mit $L(E, F)$ bezeichnet. Man schreibt $E' = L(E, \mathbb{K})$ und bezeichnet E' als *Dualraum* von E.

2.14 Korollar. *In einem lokalkonvexen Raum* E *trennt der Dualraum* E' *die Punkte, d. h. zu* $x \neq y$ *existiert* $T \in E'$ *mit* $Tx \neq Ty$*.*

3 Frécheträume

3.1 Definition. Ein *Fréchetraum* ist ein lokalkonvexer Raum, dessen Topologie von einer Metrik herkommt und der in dieser Metrik vollständig ist.

Beispiel. Banachräume sind Frécheträume.

3.2 Lemma. *Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und es sei $p_1 \le p_2 \le \dots$ eine Folge von Halbnormen auf E. Falls es zu jedem $x \in E \setminus \{0\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p_n(x) \neq 0$ gibt, so wird durch*

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)} \tag{3.1}$$

eine Metrik auf E gegeben.

3.3 Lemma. *Der $\mathbb{K}$-Vektorraum E sei mit der Metrik aus (3.1) versehen.*

(a) Eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in (E, d) gegen x, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} p_n(x_j - x) = 0$.

(b) Eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $p_n(x_j - x_k) < \epsilon$ für alle $j, k \ge K$.

3.4 Satz. *Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und es sei $p_1 \le p_2 \le \dots$ eine Folge von Halbnormen auf E derart, dass es zu jedem $x \in E \setminus \{0\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $p_n(x) \neq 0$. Mit der Metrik aus (3.1) wird E zu einem metrischen lokalkonvexen Raum, in welchem die p_n ein Fundamentalsystem von Halbnormen bilden.*

3.5 Bemerkung. (a) Sei Ω ein topologischer Raum. Eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen von Ω ist eine *kompakte Ausschöpfung* von Ω, wenn $K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset K_2 \subset \mathring{K}_3 \subset \dots \subset \Omega$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$.

(b) Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ wird eine kompakte Ausschöpfung gegeben durch

$$K_n = \Big\{x \in \Omega \;\Big|\; |x| \le n, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \ge \frac{1}{n}\Big\}.$$

3.6 Beispiel. (a) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen bezeichne $C(\Omega)$ den Raum aller stetigen Funktionen auf Ω. Es sei $K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset K_2 \subset \mathring{K}_3 \subset \dots \subset \Omega$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Dann wird $C(\Omega)$ durch das Halbnormensystem $(\|\cdot\|_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zu einem Fréchetraum, wobei

$$\|f\|_K = \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

(b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $C^k(\Omega)$ der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Er wird versehen mit dem Halbnormensystem

$$\|f\|_n = \sup_{x \in K_n} \max_{|\alpha| \leq k} |f^{(\alpha)}(x)|.$$

Auf diese Weise wird $C^k(\Omega)$ zu einem Fréchetraum.

(c) Der Raum $C^\infty(\Omega)$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen wird versehen mit dem Halbnormensystem

$$\|f\|_n = \sup_{x \in K_n} \max_{|\alpha| \leq n} |f^{(\alpha)}(x)|.$$

Auf diese Weise wird $C^\infty(\Omega)$ zu einem Fréchetraum.

(d) Für $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen bezeichne $H(\Omega)$ den Raum der holomorphen Funktionen auf Ω. Es sei $K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset K_2 \subset \mathring{K}_3 \subset \cdots \subset \Omega$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Dann wird $H(\Omega)$ durch das Halbnormensystem $(\|\cdot\|_{K_n})_{n \in \mathbb{N}}$ aus (a) zu einem Fréchetraum.

In allen Fällen hängt die Topologie nicht von der Auswahl der kompakten Ausschöpfung ab.

3.7 Bemerkung. Sei E ein lokalkonvexer Raum mit Fundamentalsystem $\mathcal{P}$ von Halbnormen. Eine Menge $M \subset E$ ist genau dann dicht in E, wenn es zu jedem $x \in E$ und jeder Wahl von $\epsilon > 0$ und $p \in \mathcal{P}$ ein $y \in M$ mit $p(x - y) < \epsilon$ gibt.

3.8 Satz. *Für eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ist $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.*

3.9 Lemma. *Für $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ sind die Polynome dicht in $H(B_r(z_0))$. Ferner sind die Polynome dicht in $H(\mathbb{C})$.*

3.10 Definition. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, wenn

$$\lim_{|x| \to \infty} x^\alpha f(x) = 0$$

für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Der Raum

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mid D^\beta f \text{ schnell fallend für jedes } \beta \in \mathbb{N}_0^N\}$$

heißt *Schwartzraum*. Die Elemente von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ heißen *Schwartzfunktionen*.

3.11 Satz. *Versieht man den Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ mit dem Halbnormensystem $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei*

$$\|f\|_n = \max_{|\beta| \leq n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^{n/2} |f^{(\beta)}(x)|,$$

so wird $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ zu einem Fréchetraum.

3.12 Satz. *Sei* E *ein metrischer lokalkonvexer Raum und sei* $F \subset E$ *ein abgeschlossener Unterraum. Versieht man* E/F *mit dem Fundamentalsystem*

$$q_n([x]) = \inf_{y \in F} p_n(x+y) = \inf_{z \in [x]} p_n(z).$$

so wird er zu einem metrischen lokalkonvexen Raum.

3.13 Satz. *Sei* E *ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *und sei* F *ein abgeschlossener Unterraum von* E*. Dann ist* E/F *ein Fréchetraum.*

3.14 Satz. *(a) Wenn* E *ein Fréchetraum und* F *ein abgeschlossener Unterraum von* E *ist, dann ist auch* F *ein Fréchetraum.*

(b) Wenn E *ein metrischer lokalkonvexer Raum und* F *ein Unterraum ist, der in der Teilraumtopologie ein Fréchetraum ist, dann ist* F *abgeschlossen.*

3.15 Satz (Homomorphiesatz)**.** *Seien* E, F *metrische lokalkonvexe Räume und sei* $f \in L(E,F)$*. Wenn* G *ein abgeschlossener Unterraum von* E *mit* $G \subset \ker f$*, ist dann existiert ein eindeutig bestimmtes* $\varphi \in L(E/G, F)$ *mit* $f = \varphi \circ \pi$*.*

3.16 Beispiel. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)/\{f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \mid \forall x \text{ mit } x_n > 0 : f(x) = 0\}$. Auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$ gibt es die Punktauswertung δ_x für alle x mit $x_n \geq 0$.

3.17 Definition. Es seien

$$E_1 \xleftarrow{\rho_1} E_2 \xleftarrow{\rho_2} E_3 \xleftarrow{\rho_3} \dots \tag{3.2}$$

lokalkonvexe Räume mit verbindenden stetig linearen Abbildung. Ein lokalkonvexer Raum E zusammen mit stetig linearen Abbildungen $j_n \colon E \to E_n$ heißt *projektiver Limes* der E_j, wenn folgendes gilt

(a) Für alle n gilt $\rho_n \circ j_{n+1} = j_n$.

(b) Wenn F ein weiterer lokalkonvexer Raum zusammen mit stetig linearen Abbildungen $k_n \colon F \to E_n$ ist, für welche $\rho_n \circ k_{n+1} = k_n$, dann existiert eine eindeutig bestimmte, linear stetige Abbildung $A \colon F \to E$, so dass $k_n = j_n \circ A$ für alle n.

Die Folge von Abbildungen aus (3.2) bezeichnet man als *projektives Spektrum.*

3.18 Lemma. *Der projektive Limes ist eindeutig bis auf Isomorphie.*

3.19 Beispiel. (a) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $k \in \mathbb{N}_0$ ist $C^k(\Omega)$ der projektive Limes der $C^k(K_n)$. Dabei sind die ρ_n und die j_n die Einschränkungsabbildungen.

(b) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $k \in \mathbb{N}_0$ ist $C^\infty(\Omega)$ der projektive Limes der $C^n(K_n)$. Dabei sind die ρ_n und die j_n die Einschränkungsabbildungen.

4 Nukleare Räume

4.1 Bemerkung. (a) Wenn p eine Halbnorm auf E ist, dann ist $\ker p = p^{-1}(0)$ ein Untervektorraum von E. Durch die Zuordnung $q([x]) := p(x)$ wird der Quotient $E_p := E/\ker p$ zu einem normierten Raum. Die Quotientenabbildung bezeichnen wir mit π.

(b) Wenn $p_1 \leq Cp_2$ zwei Halbnormen auf E sind, dann induziert die Identität eine stetige, lineare, surjektive Abbildung $\rho\colon E/E_{p_2} \to E/E_{p_1}$.

4.2 Satz. *Es sei E ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem $p_1 \leq p_2 \leq \dots$. Dann ist E projektiver Limes des projektiven Spektrum*

$$E_{p_1} \xleftarrow{\rho_1} E_{p_2} \xleftarrow{\rho_2} E_{p_3} \xleftarrow{\rho_3} \dots$$

4.3 Bemerkung. Es sei $\hat{E}_{p_n}$ die vollständige Hülle von E_{p_n}. (Die Existenz der vollständigen Hülle wurde in Bemerkung 8.9 der Einführung in die Funktionalanalysis gezeigt.) Eine kleine Variation des obigen Beweises zeigt, dass E auch projektiver Limes des folgenden Spektrums von Banachräumen ist

$$\hat{E}_{p_1} \xleftarrow{\rho_1} \hat{E}_{p_2} \xleftarrow{\rho_2} \hat{E}_{p_3} \xleftarrow{\rho_3} \dots$$

4.4 Definition. Eine stetig lineare Abbildung $A\colon E \to F$ zwischen zwei Banachräumen E und F heißt *nuklear,* wenn es Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E' und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F gibt, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|\|b_n\| < \infty \quad \text{und} \quad Ax = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n \text{ für alle } x \in E.$$

4.5 Bemerkung. (a) In 14.7 der Einführung in die Funktionalanalysis hatten wir das Konzept der singulären Zahlen verwendet, um nukleare Abbildungen zwischen Hilberträumen zu definieren. Die beiden Begriffe stimmen überein. Das wird in Meise und Vogt, Bemerkung 28.3 gezeigt.

(b) In Bemerkung 28.3 von Meise und Vogt wird auch gezeigt, dass die Verknüpfung einer nuklearen mit einer stetig linearen Abbildung (egal welche Reihenfolge) wieder nuklear ist.

Eine Richtung ist einfach: Wenn nämlich

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} s_n\,(\cdot, e_n)\, f_n$$

eine Schmidt-Darstellung ist, also $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Orthonormalsysteme und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der singulären Zahlen, dann $a_n = (\cdot, e_{n+1})$ und $b_n = s_{n+1}f_{n+1}$.

4.6 Definition. Es sei E ein lokalkonvexer Raum mit Fundamentalsystem $\mathcal{P}$ von Halbnormen. Er heißt *nuklear,* wenn es zu jedem $p \in \mathcal{P}$ ein $q \in \mathcal{P}$ gibt, so dass $\hat{E}_q \to \hat{E}_p$ nuklear ist.

4.7 Satz. *Für* $R > 0$ *und* $z_0 \in \mathbb{C}$ *sind* $H(B_R(z_0))$ *und* $H(\mathbb{C})$ *nuklear.*

4.8 Bemerkung. In Beispiel 28.9 zeigen Meise und Vogt, dass für jede offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ der Raum $C^\infty(\Omega)$ und für jede offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ der Raum $H(\Omega)$ nuklear ist. In demselben Paragrafen wird die Nuklearität von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ als Aufgabe gestellt.

Der folgende Satz zeigt, wie weit weg der Begriff des nuklearen Raums vom Begriff des Banachraums ist.

4.9 Theorem. *Es sei* G *ein separabler Banachraum unendlicher Dimension und es sei* E *ein nuklearer lokalkonvexer Raum. Dann besitzt* E *ein Fundamentalsystem* $\mathcal{P}$ *von Halbnormen derart, dass alle* $\hat{E}_p$, $p \in \mathcal{P}$, *entweder endlich dimensional oder isomorph zu* G *sind.*

Den Beweis findet man in §21.2 der Buchs “Locally Convex Spaces” von Jarchow.

5 Die schwache Topologie

5.1 Definition. Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Mit E^* bezeichnen wir den algebraischen Dualraum, also den Raum aller $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen $T\colon E \to \mathbb{K}$.

(b) Es sei $F \subseteq E^*$. Wir sagen, dass F *die Punkte von* E *trennt,* wenn es zu jedem $x \in E$ ein $y \in F$ mit $y(x) \neq 0$ gibt.

(c) Wir sagen, dass (E, F) ein *Dualsystem* ist, wenn $F \subseteq E^*$ die Punkte von E trennt.

5.2 Bemerkung. Der Satz von Hahn-Banach besagt, dass E' die Punkte von E trennt. Also ist (E, E') ein Dualsystem.

5.3 Definition. Es sei (E, F) ein Dualsystem. Die *schwache Topologie* auf E ist die gröbste lokalkonvexe Topologie, für die alle Elemente aus F stetig sind. Sie wird mit $\sigma(E, F)$ bezeichnet.

Wir werden sofort sehen, dass die schwache Topologie existiert.

5.4 Bemerkung. Es sei E ein lokalkonvexer Raum. Dann wird durch

$$J\colon E \hookrightarrow (E')^*, \quad J(x)(y) = y(x),$$

eine injektive, lineare Abbildung gegeben. Es ist klar, dass $(E', J(E))$ ein Dualsystem ist. Die zugehörige schwache Topologie schreibt man gewöhnlich als $\sigma(E', E)$. In vielen Texten wird sie als *schwach-$*$ Topologie* auf E' bezeichnet.

In reflexiven normierten Räumen, also solchen, in denen die Abbildung J ein Isomorphismus ist, gilt $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$ und die Unterscheidung zwischen schwacher und schwach-$*$ Topologie entfällt.

5.5 Satz. *Es sei* (E, F) *ein Dualsystem. Dann existiert* $\sigma(E, F)$. *Ein Fundamentalsystem von Halbnormen besteht aus allen Halbnormen der Form*

$$p_M(x) \coloneqq \max_{y \in M} |y(x)|,$$

wobei M *alle endlichen, nicht-leeren Teilmengen von* F *durchläuft.*

Um diese zu zeigen, benötigen wir den folgenden Satz.

5.6 Satz. *Es sei $\mathcal{P}$ eine Menge von Halbnormen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) Zu jedem $x \in E$ gibt es $p \in \mathcal{P}$ mit $p(x) \neq 0$.

(b) Zu $p, q \in \mathcal{P}$ existieren $r \in \mathcal{P}$ und $C > 0$, so dass $\max(p, q) \leq Cr$.

Dann gibt es genau eine lokalkonvexe Topologie auf E, für welche $\mathcal{P}$ ein Fundamentalsystem von Halbnormen ist.

5.7 Korollar. *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\sigma(E, F)$ gegen x, wenn $\lim_{n\to\infty} y(x_n) = y(x)$ für alle $y \in F$.*

Das Analogon zum Satz von Hilbert-Banach für reflexive Banachräume ist der folgende Satz von Alaoglu-Bourbaki.

5.8 Definition. Sei E ein lokalkonvexer Raum, sei $M \subset E$ und sei $N \subset E'$. Wir definieren die *Polaren*

$$M^\circ = \{\varphi \in E' \mid \forall x \in M : |\varphi(x)| \leq 1\}$$
$$^\circ N = \{x \in E \mid \forall \varphi \in N : |\varphi(x)| \leq 1\}.$$

5.9 Beispiel. Für einen normierten Raum E gelten

$$\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}^\circ = \{y \in E' \mid \|y\| \leq 1\},$$
$$^\circ\{y \in E' \mid \|y\| \leq 1\} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Die erste Aussage ist die Definition der Norm in E', die zweite eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach.

5.10 Theorem (Satz von Alaoglu-Bourbaki (s. Meise und Vogt, Satz 23.5). *Es sei E ein lokalkonvexer Raum und es sei $U \subset E$ eine Nullumgebung. Dann ist die Polare U° kompakt in der schwachen Topologie $\sigma(E', E)$.*

6 Der Dualraum

6.1 Beispiel. Sei $E = H(\mathbb{C})$ und sei $F := \{(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \mid \exists R, C > 0\, \forall j \in \mathbb{N}_0 : |a_j| \le CR^j\}$. Dann wird durch die Vorschrift

$$\Phi\colon F \to E', \quad \Phi((a_j)_{j\in\mathbb{N}_0})(f) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{f^{(j)}(0)}{j!},$$

ein $\mathbb{C}$-linearer Isomorphismus gegeben.

6.2 Bezeichnung. Man schreibt die Funktion Φ häufig nicht aus, sondern sagt, dass die Dualität von E und F durch die Bilinearform

$$\langle (a_j)_{j\in\mathbb{N}_0}, f\rangle := \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$$

gegeben wird.

In der Einführung in die Funktionalanalysis hatten wir ähnliche Beispiele gesehen. Beispielsweise ist $c_0' = \ell^1$ via die Bilinearform

$$\langle (y_j)_{j\in\mathbb{N}}, (x_j)_{j\in\mathbb{N}}\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j.$$

6.3 Definition. Eine Teilmenge B eines lokalkonvexen Raums heißt *beschränkt*, wenn es zu jeder Nullumgebung U in E ein $R > 0$ gibt, so dass $B \subset RU$.

6.4 Lemma. *Eine Menge B in einem lokalkonvexen Raum E mit Fundamentalsystem $\mathcal{P}$ von Halbnormen ist genau dann beschränkt, wenn es zu jedem $p \in \mathcal{P}$ ein $C > 0$ gibt, so dass $p(x) \le C$ für alle $x \in B$.*

Insbesondere ist für $A \in L(E, F)$ und beschränktes $B \subset E$ die Menge $A(B)$ beschränkt.

Bemerkung. An der Metrik kann man die Beschränktheit nicht ohne weiteres ablesen. Beispielsweise gilt in der Metrik aus Lemma 3.2 für je zwei $x, y \in E$ stets $d(x, y) \le 1$.

Es gibt in der Tat einen Begriff von Beschränktheit in uniformen Räumen. Im Buch von Schubert wird die Bezeichnung “total beschränkt” benutzt.

6.5 Beispiel. Eine Teilmenge $M \subset H(\mathbb{C})$ ist genau dann beschränkt, wenn es eine stetige Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $|f(z)| \le h(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $f \in M$.

6.6 Definition. Sei E ein lokalkonvexer Raum und E' sein Dualraum. Die *starke Topologie* auf E' wird gegeben durch das Halbnormensystem $(\|\cdot\|_B)_{B\in\mathcal{B}}$, wobei $\mathcal{B}$ das System der beschränkten Teilmengen von E ist und $\|\varphi\|_B = \sup_{x\in B}|\varphi(x)|$.

6.7 Bemerkung. (a) Wenn man andeuten will, dass E' mit der starken Topologie versehen ist, dann schreibt man E'_b. Entsprechend schreibt man E'_σ für die schwache Topologie.

(b) Die Nullumgebungen in E'_b sind die Obermengen von Polaren von beschränkten Mengen.

(c) Die starke Topologie ist mindestens so fein wie die schwache.

Beachte dazu, dass $\sigma(E', E)$ durch das Halbnormensystem $\{\|\cdot\|_{\{x_1,\dots,x_n\}} \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E\}$ mit $\|\varphi\|_{\{x_1,\dots,x_n\}} = \max_{i=1,\dots,n}|\varphi(x_i)|$ gegeben wird.

(d) Die durch die Operatornorm gegebene Topologie auf dem Dualraum eines normierten Raum ist die starke Topologie.

6.8 Satz. *Es sei $A\colon E \to F$ eine stetig lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Räumen. Definiert man ihre Transponierte $A' : F' \to E'$ durch $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A'y\rangle$, so ist A' sowohl als Abbildung $A'\colon F'_b \to E'_b$ als auch als Abbildung $A'\colon F'_\sigma \to E'_\sigma$ stetig.*

6.9 Beispiel. Für $z \in \mathbb{C}$ sei $\delta'_z(f) = f'(z)$. Dann konvergiert die Folge $(\delta'_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $H(\mathbb{C})'_b$ gegen δ'_0.

6.10 Lemma. *Sei E ein lokalkonvexer Raum, sei $U \subset E$ eine Nullumgebung. Dann ist U° beschränkt in E'_b.*

7 (DF)-Räume

7.1 Definition. Sei E ein lokalkonvexer Raum und sei $M \subset E$.

(a) M heißt *bornivor*, wenn es zu jeder beschränkten Menge B in E ein $R > 0$ mit $B \subset RM$ gibt.

(b) M heißt *Tonne*, wenn M absolutkonvex, abgeschlossen und absorbierend ist.

(c) E heißt *tonneliert*, wenn jede Tonne in E eine Nullumgebung ist, und *quasitonneliert*, wenn jede bornivore Tonne in E eine Nullumgebung ist.

7.2 Bemerkung. Wenn E ein lokalkonvexer Raum und $M \subset E'_b$ beschränkt ist, dann ist $^\circ M$ eine bornivore Tonne.

7.3 Satz. *Metrische lokalkonvexe Räume sind quasitonneliert.*

7.4 Notation. Ein System $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist ein *Fundamentalsystem für die beschränkten Mengen* eines lokalkonvexen Raums, wenn alle B_α beschränkt sind und jede beschränkte Menge in einem B_α enthalten ist.

7.5 Satz. *Sei E ein metrischer lokalkonvexer Raum. Dann besitzt E'_b ein abzählbares Fundamentalsystem für die beschränkten Mengen.*

Bemerkung. Wegen Satz 7.5 wurde der Begriff der "Bornologie" eingeführt, das ist die Gesamtheit aller beschränkten Mengen. Das macht z. B. Jarchow so. Dieser Zugang hat sich aber nicht durchgesetzt.

7.6 Beispiel. Wir hatten gesehen, dass $F := \left\{(a_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \middle| \exists R, C \forall j : |a_j| \leq CR^j\right\}$ vermittels der Bilinearform

$$\langle (a_j)_{j \in \mathbb{N}_0}, f \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$$

dual zu $H(\mathbb{C})$ ist. Wir versehen F mit der von E'_b induzierten Topologie; mit anderen Worten, wir verlangen, dass die Abbildung $\Phi \colon F \to E'_b$ aus Beispiel 6.1 ein Isomorphismus wird. Es sei

$$B_n := \left\{(a_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \middle| \forall j : |a_j| \leq n^{j+1}\right\}.$$

Dann ist $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Fundamentalsystem für die beschränkten Mengen von F.

7.7 Definition. Ein *(DF)-Raum* ist ein lokalkonvexer Raum E mit den folgenden Eigenschaften:

(a) E besitzt ein abzählbares Fundamentalsystem für die beschränkten Mengen.

(b) Falls der Durchschnitt V von abzählbar vielen, absolutkonvexen Nullumgebungen bornivor ist, dann ist V eine Nullumgebung.

7.8 Theorem (Bipolarensatz, siehe Meise-Vogt, Satz 22.13). *Es sei E ein lokalkonvexer Raum und es sei $A \subseteq E$ absolutkonvex und abgeschlossen. Dann $^\circ(A^\circ) = A$.*

7.9 Theorem. *Für jeden Fréchetraum E ist E'_b ein (DF)-Raum.*

7.10 Theorem. *Für jeden (DF)-Raum F ist F'_b ein Fréchetraum.*

7.11 Korollar. *(a) Wenn E ein Fréchetraum ist, so ist auch $(E'_b)'_b$ ein Fréchetraum.*

(b) Wenn F ein (DF)-Raum ist, so ist auch $(F'_b)'_b$ ein (DF)-Raum.

7.12 Satz. *Es seien E ein metrischer lokalkonvexer und F ein (DF)-Raum und es sei $T \in L(E, F)$. Dann gibt es eine Nullumgebung U in F, für welche $T(U)$ beschränkt in E ist.*

7.13 Korollar. *Wenn ein (DF)-Raum eine Metrik trägt, dann ist er normiert.*

8 Der induktive Limes

Für einen Fréchetraum E mit Fundamentalsystem $p_1 \leq p_2 \leq \dots$ von Halbnormen hatten wir die normierten Räume E_{p_j} definiert als $E_{p_j} = E/\ker p_j$ und mit der Norm $q_j(x + \ker p_j) := p_j(x)$ versehen. Die kanonische Abbildung werde mit $\pi_j \colon E \to E_{p_j}$ bezeichnet.

8.1 Lemma. E'_{p_j} *ist isomorph zu*

$$F_j := \{y \in E' | \exists C > 0 \forall x \in E : |y(x)| \leq C p_j(x)\},$$

versehen mit der Norm $r_j(y) := \sup\{|y(x)| | p_j(x) \leq 1\}$.

Wie in Bemerkung 4.1 bezeichnen wir die verbindenden Abbildungen mit

$$\rho_k \colon E_{p_{k+1}} \to E_{p_k}, \rho_k(x + \ker p_{k+1}) = x + \ker p_k. \tag{8.1}$$

Da diese Abbildungen surjektiv sind, sind ihre Transponierten $\iota_k := \rho'_k$ injektiv. Ebenso sind die Transponierten der kanonischen Abbildungen $j_k := \pi'_k$ injektiv.

8.2 Lemma. *Es sei* E *ein Fréchetraum und es sei* $U \subseteq E'_b$ *absolutkonvex und abgeschlossen. Falls für jedes* k *die Menge* $j_k^{-1}(U)$ *eine Nullumgebung in* E'_{p_k} *ist, so ist* U *eine bornivore Tonne.*

8.3 Definition. Ein Fréchetraum E heißt *distinguiert,* wenn E'_b quasi-tonneliert ist.

8.4 Satz. *Es sei* E *ein distinguierter Fréchetraum. Eine absolutkonvexe Menge* U *ist genau dann eine Nullumgebung in* E'_b, *wenn* $j_k^{-1}(U)$ *für jedes* k *eine Nullumgebung in* E'_{p_k} *ist.*

8.5 Definition. Es seien

$$E_1 \xrightarrow{\iota_1} E_2 \xrightarrow{\iota_2} E_3 \xrightarrow{\iota_3} \dots \tag{8.2}$$

lokalkonvexe Räume mit verbindenden stetig linearen Abbildung. Ein lokalkonvexer Raum E zusammen mit stetig linearen Abbildungen $j_n \colon E_n \to E$ heißt *induktiver Limes* der E_j, wenn folgendes gilt

(a) Für alle n gilt $j_{n+1} \circ \iota_n = j_n$.

(b) Wenn F ein weiterer lokalkonvexer Raum zusammen mit stetig linearen Abbildungen $k_n \colon E_n \to F$ ist, für welche $k_{n+1} \circ \iota_n = k_n$, dann existiert eine eindeutig bestimmte, linear stetige Abbildung $A \colon E \to F$, so dass $k_n = A \circ j_n$ für alle n.

Die Folge von Abbildungen aus (3.2) bezeichnet man als *induktives Spektrum*. Falls alle ι_n Inklusionsabbildungen sind, so spricht man von einem *Einbettungsspektrum*.

8.6 Lemma. *Der induktive Limes ist eindeutig bis auf Isomorphie.*

Bemerkung. Wir haben nicht behauptet, dass es zu jedem induktiven Spektrum einen Limes gibt.

8.7 Satz. *Es sei F ein distinguierter Fréchetraum und es seien $\iota_n \colon E'_{p_k} \to E'_{p_{k+1}}$ wie in (8.1) die verbindenden Abbildung. Dann ist E'_b der induktive Limes dieses Einbettungsspektrums.*

8.8 Satz. *Das induktive Spektrum (8.2) sei ein Einbettungsspektrum. Wir nehmen ferner an, dass alle E_n Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums F sind, und setzen $E := \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Das Spektrum hat genau dann einen induktiven Limes, wenn es zu jedem $x \in E \setminus \{0\}$ ein $y \in E^*$ mit $y(x) \neq 0$ gibt, so dass für alle n das Funktional $y \circ j_n$ in E'_n liegt.*

8.9 Bezeichnung. Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und es sei $X \subset E$. Die *absolutkonvexe Hülle* von X ist definiert als

$$\Gamma X := \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ x_j \in X,\ \lambda_j \in \mathbb{K} \text{ mit } \sum_{j=1}^n |\lambda|_j \leq 1 \right\}.$$

Man zeigt leicht, dass die absolutkonvexe Hülle absolutkonvex ist.

8.10 Korollar. *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 8.8.*

(a) Eine Halbnorm auf E ist genau dann stetig, wenn für jedes $\in \mathbb{N}$ die Verknüpfung $p \circ j_n$ stetig ist.

(b) Durch

$$\mathcal{U} = \left\{ \Gamma\left(\bigcup_{n=1}^\infty j_n(V_n) \right) \,\middle|\, V_n \textit{ Nullumgebung in } E_n \right\}$$

wird eine Nullumgebungsbasis von E gegeben.

(c) Eine Menge $U \subset E$ ist genau dann eine Nullumgebung in E, wenn $j_n^{-1}(U)$ für jedes n eine Nullumgebung in E_n ist.

8.11 Beispiel. Es sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge und es seien $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ offen mit $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = K$. Wir möchten den Raum $\mathcal{A}(K)$ als induktiven Limes des Einbettungsspektrums

$$H(U_1) \hookrightarrow H(U_2) \hookrightarrow H(U_3) \hookrightarrow \dots$$

definieren. Um Satz 8.8 anwenden zu können, setzen wir

$$\mathcal{A}(K) := F := \bigcup_{n=1}^{\infty} H(U_n).$$

Es ist leicht zu sehen, dass F ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Sei nun $f \neq 0 \in F$ gegeben. Dann gibt es $z \in K$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so dass $f^{(k)}(z) \neq 0$. Wir setzen $y(g) = g^{(k)}(z)$. Dann ist die Einschränkung von y auf jedes $H(U_n)$ stetig.

Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet man $\mathcal{A}(z)$ als den *Raum der Keime in* z. Der Geometer schreibt dafür $\mathcal{O}_z$.

8.12 Beispiel. Für kompaktes $K \subset \mathbb{R}^N$ setzen wir

$$\mathcal{D}(K) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \middle| \operatorname{Supp} K \subset K \right\}.$$

Da $\mathcal{D}(K)$ ein abgeschlossener Unterraum von $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ ist, ist er ein Fréchetraum.

Für offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sei $K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset K_2 \subset \cdots \subset \Omega$ eine kompakte Ausschöpfung. Dann wird durch

$$\mathcal{D}(K_1) \subset \mathcal{D}(K_2) \subset \cdots \subset C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

ein Einbettungsspektrum gegeben. Wir zeigen, dass es einen induktiven Limes besitzt. In diesem Fall haben wir $F := \mathcal{D}(\Omega) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(K_n)$. Sei nun $0 \neq \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gegeben. Dann existiert $x \in \Omega$ mit $\varphi(x) \neq 0$. Da die Punktauswertung stetig auf allen $\mathcal{D}(K_n)$ ist, ist Satz 8.8 anwendbar.

Nach Korollor 8.10 ist eine lineare Abbildung $T \colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ genau dann stetig, wenn ihre Einschränking auf jedes $\mathcal{D}(K_k)$ stetig ist. Das bedeutet:

Eine lineare Abbildung $T \colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ ist genau dann stetig, wenn es zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ gibt, so dass für alle f mit $\operatorname{Supp} f \subset K$ gilt

$$|T(f)| \leq C \max_{x\in K} \max_{|\alpha|\leq n} \left| f^{(\alpha)}(x) \right|$$

8.13 Satz. *Eine Folge* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{D}(\Omega)$ *konvergiert genau dann gegen* φ*, wenn es ein kompaktes* $K \subset \Omega$ *gibt, so dass* $\operatorname{Supp} \varphi_n \subset K$ *für alle* n *und für alle* $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \left| \varphi_n^{(\alpha)}(x) - \varphi^{(\alpha)}(x) \right| = 0.$$

8.14 Korollar. *Eine lineare Abbildung* $T \colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ *ist genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.*

9 Schwartz- und Monteläume

Für einen normierten Raum E bezeichnen wir mit ^{E} seine vollständige Hülle.

9.1 Definition. Ein lokalkonvexer Raum ist ein *Schwartzraum,* wenn es zu jeder stetigen Halbnorm p eine stetige Halbnorm q gibt, so dass die Abbildung $\hat{E}_q \to \hat{E}_p$ kompakt ist.

Ein (FS)-Raum ist ein Fréchetraum, der ein Schwartzraum ist.

9.2 Beispiel. Nukleare Räume sind Schwartzräume.

9.3 Theorem (Schwartz). *(FS)-Räume sind distinguiert.*

Skizze. Schwartz hat tatsächlich folgenden Satz gezeigt (s. Meise und Vogt, Satz 24.23):

> *Sei E ein vollständiger Schwartz-Raum. Dann ist E_b ultrabornologisch.*

Nach Meise und Vogt, Bemerkungen 24.15 und 24.12, ist jeder ultrabornologische Raum quasi-tonneliert. □

Bemerkung. In Beispiel 27.19 des Buchs von Meise und Vogt wird ein Fréchetraum angegeben, der nicht distinguiert ist.

9.4 Definition. (a) Eine Teilmenge M eines topologischen Raums heißt *relativ kompakt,* wenn ihr Abschluss $\overline{M}$ kompakt ist.

(b) Ein lokalkonvexer Raum E ist ein *Montelraum,* wenn er quasi-tonneliert ist und jede beschränkte Menge in E relativ kompakt ist.

9.5 Satz. *(FS)-Räume sind Montelsch.*

Bemerkung. Es gilt sogar mehr: Ist E ein vollständiger Schwartzraum, so ist jede beschränkte Menge in E relativ kompakt. Das ist Lemma 24.19 in Meise und Vogt-

10 Vollständigkeit

10.1 Definition. (a) Eine *gerichtete Menge* ist eine partiell geordnete Menge, welche zu je zwei Elementen α und β ein γ mit $\alpha \le \gamma$ und $\beta \le \gamma$ enthält.

(b) Sei X ein topologischer Raum. Ein *Netz* in X ist eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ mit einer gerichteten Indexmenge.

(c) Eine Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *konvergiert* gegen y, wenn es zu jeder Umgebung U von y ein $\alpha \in A$ gibt, so dass $x_\beta \in U$ für alle $\beta \ge \alpha$. Man schreibt dann $\lim_{\alpha\in A} x_a = y$.

10.2 Bemerkung. Wenn X Hausdorffsch ist, dann besitzt jedes Netz höchstens einen Grenzwert. Dies ist eine direkte Folge davon, dass A gerichtet ist.

10.3 Definition. (a) Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in einem lokalkonvexen Raum ist ein *Cauchy-Netz*, wenn es zu jeder Nullumgebung U ein $\alpha \in A$ gibt, so dass $x_\beta - x_\gamma \in U$ für alle $\beta, \gamma \ge \alpha$.

(b) Ein lokalkonvexer Raum E heißt *vollständig*, wenn jedes Cauchy-Netz in E konvergiert.

(c) E ist *folgenvollständig*, wenn jede Cauchyfolge in E konvergiert.

Bemerkung. Der Begriff "vollständig" macht für einen topologischen Raum keinen Sinn. Man benötigt wenigstens einen uniformen Raum. Eine ausführliche Darstellung findet man in "Topologie" von Schubert.

10.4 Lemma. *Frécheträume sind vollständig im Sinne der Definition 10.3.*

10.5 Satz. *Sei E ein metrischer lokalkonvexer Raum. Dann ist E'_b vollständig.*

Bemerkung. (a) Meise und Vogt zeigen als Korollar 24.11, dass sogar für jeden bornologischen Raum E der starke Dual E'_b vollständig ist. Wegen Satz 24.13 und Satz 24.16 ist $\mathcal{D}(\Omega)$ bornologisch. Daher ist $\mathcal{D}(\Omega)'_b$ vollständig.

(b) In Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions I,* wird als Example 2.12.6 gezeigt, dass $\mathcal{D}(\Omega)$ vollständig ist.

(c) Man kann zeigen, dass jeder lokalkonvexe Raum eine vollständige Hülle besitzt (siehe Meise und Vogt, Satz 22.21).

(d) Wenn $E^* \neq E'$, dann ist E'_σ nicht vollständig (siehe Kaballo, Aufbaukurs, Abschnitt 8.1).

Die schwache Folgenvollständigkeit des Dualraums eines Fréchetraums zeigen wir, wenn wir den Satz von Banach-Steinhaus haben.

11 Der Satz von der offenen Abbildung

11.1 Definition. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *offen*, wenn für jede offene Teilmenge U von X die Bildmenge $f(U)$ offen ist. Sie heißt *abgeschlossen*, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge U von X die Bildmenge $f(U)$ abgeschlossen ist.

11.2 Theorem (Satz von der offenen Abbildung). *E und F seien Frécheträume. $A\colon E \to F$ sei linear, stetig und surjektiv. Dann ist A offen.*

11.3 Theorem (Banachscher Isomorphiesatz). *E und F seien Frécheträume. $A\colon E \to F$ sei linear, stetig und bijektiv. Dann ist A ein linear topologischer Isomorphismus.*

11.4 Definition. Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Der *Graph* von f ist die Menge

$$\mathcal{G}(f) = \big\{(x, f(x)) \bigm| x \in X\big\} \subset X \times Y.$$

11.5 Lemma. *Seien E und F metrische lokalkonvexe Räume, und sei $A\colon E \to F$ linear. Dann ist $\mathcal{G}(A)$ genau dann abgeschlossen, wenn für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein Element $y \in F$ konvergiert, bereits $y = 0$ gilt.*

11.6 Theorem (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Es seien E und F Frécheträume. Die Abbildung $A\colon E \to F$ sei linear, und ihr Graph sei abgeschlossen in $E \times F$. Dann ist A stetig.*

11.7 Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $C^\infty(\Omega)$ mit den Eigenschaften

(a) $(C^\infty, \mathcal{T})$ ist ein Fréchetraum.

(b) Für jedes $x \in \Omega$ ist die Punktauswertung $\delta_x\colon f \mapsto f(x)$ stetig.

Dann ist $\mathcal{T}$ die Topologie aus Beispiel 3.6.

11.8 Definition. Es seien E und F lokalkonvexe Räume. Eine Teilmenge $G \subset L(E, F)$ heißt *gleichstetig*, wenn es zu jeder stetigen Halbnorm q auf F eine stetige Halbnorm p auf E und $C > 0$ gibt, so dass für alle $x \in E$ und $T \in G$ gilt $q(Tx) \leq Cp(x)$.

11.9 Theorem (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). *Seien E und F lokalkonvexe Räume und es sei $G \subset L(E, F)$ punktweise beschränkt, d. h. zu jedem x sei $\{Tx | T \in G\}$ beschränkt in F. Wenn E tonneliert ist, dann ist G gleichstetig.*

11.10 Theorem (Banach-Steinhaus). *Es seien* E *ein tonnelierter und* F *ein lokalkonvexer Raum und es sei* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $L(E,F)$ *derart, dass für jedes* $x \in E$ *der Limes*

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$$

existiert. Dann ist T *stetig.*

11.11 Satz. *Der lokalkonvexe Raum* E *sei von zweiter Kategorie in sich. Dann ist* E *tonneliert. Insbesondere sind Fréchetträume tonneliert.*

11.12 Korollar. *Es sei* E *ein tonnelierter Raum. Dann ist* E' *schwach*-folgenvollständig. Insbesondere sind die Dualen von Fréchetträumen schwach*-folgenvollständig.*

12 Die Fouriertransformation für temperierte Distributionen

12.1 Definition. Die Elemente von $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ heißen *temperierte Distributionen.*

Bemerkung. $\mathscr{S}_b'(\mathbb{R}^N)$ ist vollständig nach Satz 10.5 und $\mathscr{S}_\sigma'(\mathbb{R}^N)$ ist folgenvollständig nach Korollar 11.12.

Bemerkung. Die *Fouriertransformierte* von $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, insbesondere also von $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, ist definiert als

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix\xi} dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Theorem 16.13 der Einf. Funktionalanalysis von 2018 besagt, dass die Fouriertransformation eine Bijektion von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ auf sich ist. Ihre Inverse ist

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

12.2 Satz. $\mathcal{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ *ist ein linear topologischer Isomorphismus.*

12.3 Definition. Die *Fouriertransformation* $\mathcal{F}\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ wird definiert als die Transponierte von $\mathcal{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$.

12.4 Satz. *Wenn* $A \in L(E, F)$ *ein Isomorphismus ist, so ist auch* $A' \in L(F_b', E_b')$ *ein Isomorphismus.*

12.5 Bemerkung. $\mathcal{F}\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)_b \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)_b$ ist ein topologischer Isomorphismus.

12.6 Beispiel.

$$\langle \mathcal{F}\delta_0, f\rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}f\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \langle 1, f\rangle .$$

Also $\mathcal{F}\delta_0 = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}$. Genauso

$$\langle 1, \mathcal{F}g\rangle = (2\pi)^{N/2} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}g e^0 d\lambda_N = (2\pi)^{N/2} \check{g}(0).$$

Also $\mathcal{F}1 = (2\pi)^{N/2}\delta_0$.

12.7 Satz (Poissonsche Summenformel). *Es sei* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. *Dann gilt*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(k).$$

13 Banachalgebren

13.1 Definition. (a) Eine $\mathbb{C}$-*Algebra* ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum A mit einer Multiplikation $\cdot\colon A \times A \to A$, so dass A ein Ring mit Eins und der folgenden Eigenschaft ist

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall a, b \in A : \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b).$$

Die Eins wird mit e bezeichnet.

(b) Eine *normierte Algebra* ist eine $\mathbb{C}$-Algebra mit einer Norm mit den folgenden Eigenschaften

(i) $\forall a, b \in A : \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ (Submultiplikativität).

(ii) $\|e\| = 1$.

(c) Eine *Banachalgebra* ist eine vollständige normierte Algebra.

13.2 Bemerkung. Sei A eine normierte Algebra. Dann ist die Multiplikation stetig.

13.3 Beispiel. (a) Sei E ein komplexer Banachraum. Dann ist $L(E)$ eine Banachalgebra. Im Fall $E = \mathbb{C}^N$ wurde sie in der Linearen Algebra studiert.

(b) Wenn K kompakt ist, dann ist $C(K)$ (komplexwertig) eine Banachalgebra.

13.4 Bezeichnung. Die Gruppe der invertierbaren Elemente in A wird mit $\mathcal{G}(A)$ bezeichnet.

13.5 Satz (Neumannsche Reihe). *Es seien A eine Banachalgebra und $a \in \mathcal{G}(A)$. Falls für $b \in A$ gilt*

$$\|a - b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|},$$

dann $b \in \mathcal{G}(A)$.

13.6 Korollar. *$\mathcal{G}(A)$ ist offen und die Umkehrabbildung $x \mapsto x^{-1}$ ist stetig in $\mathcal{G}(A)$.*

13.7 Definition. Es sei A eine Banachalgebra und es sei $a \in A$. Das *Spektrum* von a besteht aus allen $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche $\lambda e - a \notin \mathcal{G}(A)$. Es wird mit $\sigma(a)$ bezeichnet. Sein Komplement $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ ist die *Resolventenmenge* von a.

Für $\lambda \in \rho(A)$ ist $R(\lambda, a) = (\lambda e - a)^{-1}$ die *Resolvente*.

13.8 Bemerkung. $\sigma(a)$ ist abgeschlossen. Für λ mit $|\lambda| > \|a\|$ ist $\lambda^{-1}a$ invertierbar. Also $\sigma(a) \subset \overline{B}_{\|a\|}(0)$. Insbesondere ist $\sigma(a)$ kompakt. Aus dem Beweis der Neumannschen Reihe erhält man sofort

$$R(\lambda, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{\lambda^{j+1}}.$$

13.9 Lemma. *Seien* A *eine Banachalgebra,* $a \in A$ *und* $z, \zeta \in \rho(a)$*. Dann gelten*

(a) $R(z, a) - R(\zeta, a) = (\zeta - z)R(z, a)R(\zeta, a)$ *(Resolventenformel).*

(b) $\lim_{\zeta \to z} \frac{1}{z - \zeta}(R(z, a) - R(\zeta, a)) = -R(z, a)^2$.

13.10 Satz. *Sei* A *eine Banachalgebra. Für jedes* $a \in A$ *ist* $\sigma(a) \neq \emptyset$.

13.11 Theorem (Satz von Gelfand und Mazur). *Wenn die Banachalgebra* A *ein Körper ist, dann ist sie gleich* $\mathbb{C}e$.

13.12 Lemma. *Seien* A *eine Banachalgebra und* $a \in A$*. Für ein komplexes Polynom* $p = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j z^j \in \mathbb{C}[X]$ *definieren wir* $p(a) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j a^j \in A$*. Dann* $p(a) \in \mathcal{G}(A)$ *genau dann, wenn* $p(\mu) \neq 0$ *für alle* $\mu \in \sigma(a)$.

13.13 Satz. *Seien* A *eine Banachalgebra,* $a \in A$ *und* $p \in \mathbb{C}[X]$*. Dann* $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.

13.14 Beispiel. Wenn $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$ diagonalisierbar ist, dann existieren Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathbb{C}$ und eine Transformationsmatrix $T \in GL_N(\mathbb{C})$, so dass

$$M = T \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_N \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Dann

$$p(M) = T \begin{pmatrix} p(\mu_1) & & & \\ & p(\mu_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\mu_N) \end{pmatrix} T^{-1}.$$

13.15 Definition. Sei A eine Banachalgebra. Für $a \in A$ definiert man den *Spektralradius* als

$$r(a) = \sup\{|z| \mid z \in \sigma(a)\}.$$

13.16 Satz. *Sei* A *eine Banachalgebra. Für* $a \in A$ *gilt*

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}.$$

Der Beweis benutzt Satz 9.18 der Einführung in die Funktionalanalysis; dieser Satz ist eine Variante des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit.

13.17 Satz. *Seien* E *ein normierter Raum und* M *eine Teilmenge von* E*, so dass* $\sup_{x \in M} |\langle y, x \rangle| < \infty$ *für jedes* $y \in E'$*. Dann* $\sup_{x \in M} \|x\| < \infty$.

13.18 Lemma. *Es sei* A *eine Banachalgebra. Dann gelten:*

(a) $\operatorname{dist}(e, I) = 1$ *für jedes Ideal* I *in* A*.*

(b) Für jedes abgeschlossene Ideal I *in* A *ist* A/I *eine Banachalgebra.*

(c) Für jedes Ideal I *ist auch* $\overline{I}$ *ein Ideal.*

(d) Maximale Ideale sind abgeschlossen.

(e) Jedes Ideal ist in einem maximalen Ideal enthalten.

13.19 Definition. (a) Seien A, B Algebren. Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f \colon A \to B$ ist ein *Algebrenhomomorphismus*, wenn $f(e) = e$ und $f(ab) = f(a)f(b)$ für alle $a, b \in A$.

(b) Sei A eine Banachalgebra. Das *Spektrum* von A besteht aus allen stetigen Algebrenhomomorphismen von A nach $\mathbb{C}$. Man schreibt $\operatorname{Sp}(A)$.

13.20 Lemma. *Sei* A *eine kommutative Banachalgebra. Die maximalen Ideale in* A *sind genau die Kerne der Elemente von* $\operatorname{Sp}(A)$*.*

13.21 Satz. *Sei* A *eine kommutative Banachalgebra und sei* $a \in A$*. Dann* $\sigma(a) = \{\varphi(a) \mid \varphi \in \operatorname{Sp}(A)\}$.

14 C^*-Algebren

14.1 Definition. Eine C^*-Algebra ist eine Banachalgebra zusammen mit einer Involution $*\colon a \mapsto a^*$ mit den folgenden Eigenschaften

(a) $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a$ und $(ab)^* = b^* a^*$ für $a, b \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) $\|a^* a\| = \|a\|^2$ für alle $a \in A$.

Eine Involution ist ein Element mit der Eigenschaft $a^2 = e$.

14.2 Beispiel. (a) $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ mit der Involution $z \mapsto \overline{z}$ ist eine C^*-Algebra.

(b) Für ein Kompaktum K ist $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ mit der Involution $f \mapsto \overline{f}$ eine C^*-Algebra.

(c) Sei H ein komplexer Hilbertraum. Dann hatten wir den zu $A \in L(H)$ adjungierten Operator $A^* \in L(H)$ definiert durch

$$(A^* x, y) = (x, Ay), \quad x, y \in H.$$

Mit dieser Setzung wird $L(H)$ zu einer C^*-Algebra. Das wurde in Satz 13.3 der Einführung gezeigt.

(d) Ein Spezialfall von (c) ist der Fall $H = \mathbb{C}^N$. Der Operator $A \in L(H)$ sei im Standardkoordinatensystem durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N} \end{pmatrix}$$

dargestellt. Dann besitzt A^* die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_{1,1} & \overline{a}_{2,1} & \dots & \overline{a}_{N,1} \\ \overline{a}_{1,2} & \overline{a}_{2,2} & \dots & \overline{a}_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{1,N} & \overline{a}_{2,N} & \dots & \overline{a}_{N,N} \end{pmatrix}.$$

14.3 Lemma. *Sei A eine C^*-Algebra. Dann gelten*

(a) $\|a^*\| = \|a\|$ *für alle* $a \in A$.

(b) $e^* = e$.

(c) *Wenn* $a \in \mathcal{G}(A)$, *dann* $a^* \in \mathcal{G}(A)$ *und* $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

14.4 Definition. Ein Element a einer C^*-Algebra A heißt

(a) *normal*, wenn $aa^* = a^*a$,

(b) *selbstadjungiert*, wenn $a^* = a$,

(c) *unitär*, wenn $aa^* = a^*a = e$.

14.5 Bemerkung. (a) Selbstadjungierte und unitäre Elemente sind normal.

(b) Im endlich-dimensionalen Fall ist ein Operator genau dann selbstadjungiert, wenn seine Matrix hermitesch ist.

(c) Im endlich-dimensionalen Fall wurde in der Linearen Algebra gezeigt, dass ein $\mathbb{C}$-linearer Endomorphismus genau dann eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren hat, wenn er normal ist. Ein normaler Operator besitzt genau dann reelle Eigenwerte, wenn er selbstadjungiert ist.

(d) Für jedes a ist a^*a selbstadjungiert.

14.6 Satz. *Sei* A *eine* C^**-Algebra und sei* $a \in A$. *Dann* $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$.

14.7 Satz. *Sei* A *eine* C^**-Algebra und sei* $a \in A$ *selbstadjungiert. Dann* $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.

14.8 Satz. *Es sei* A *eine* C^**-Algebra und es sei* $a \in A$ *unitär. Dann* $\sigma(a) \subseteq S^1$.

14.9 Satz. *Sei* A *eine* C^**-Algebra und sei* $a \in A$ *normal. Dann* $r(a) = \|a\|$.

14.10 Beispiel. Sei $M \subset \mathbb{C}^{N\times N}$ eine hermitesche Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$. Der $\mathbb{C}^N$ sei mit der euklidischen Norm versehen. Dann ist die Operatornorm des zu M gehörenden Endomorphismus gleich $\max\{-\lambda_1, \lambda_N\}$.

15 Positive lineare Funktionale

15.1 Bezeichnung. Es sei K ein kompakter topologischer Raum.

(a) Für $f \in C(K)$ schreiben wir $f \geq 0$, wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in K$. Mit $\mathbb{1}$ bezeichnen wir die Funktion $x \mapsto 1$.

(b) Ein Funktional $T \in C(K)'$ heißt *positiv,* wenn $T(f) \geq 0$ für alle $f \geq 0$. Es heißt *normalisiert,* wenn $T\mathbb{1} = 1$.

Wir erinnern uns an einige Definitionen aus der Maßtheorie.

15.2 Definition. Ein *äußeres Maß* auf einer Menge X ist eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) Für $A \subseteq B \subseteq X$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(c) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(X)$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Den kompletten Beweis des folgenden Satzes findet man in Rudin, *Real and Complex Analysis*, Theorem 2.14. Der Beweis benötigt die Existenz einer stetigen Partition der Eins, welche wir in der Analysis III nur im $\mathbb{R}^N$ gezeigt hatten.

15.3 Theorem (Rieszscher Darstellungssatz für Maße). *Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und es sei Λ ein positives lineares Funktional auf $C_c(X)$. Dann gibt es eine σ-Algebra $\mathcal{M}$ in X, welche die Borelmengen enthält, und ein eindeutig bestimmtes Maß μ auf $\mathcal{M}$, so dass*

(a) $\Lambda f = \int f \, d\mu$ *für jedes* $f \in C_c(X)$.

Dieses Maß hat die zusätzlichen Eigenschaften

(b) $\mu(K) < \infty$ *für jedes kompakte* $K \subseteq X$.

(c) $\mu(E) = \inf\{\mu(V) | E \subseteq V,\ V \text{ offen}\}$ *für jedes* $E \in \mathcal{M}$.

(d) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) | K \subseteq E,\ K \text{ kompakt}\}$ *für alle offenen* $E \subset X$ *sowie alle* $E \subset M$ *mit* $\mu(E) < \infty$.

(e) μ *ist ein vollständiges Maß.*

16 Der Satz von Favard

Im folgenden sind alle Maße Borelmaße.

16.1 Bezeichnung. Es sei μ ein Borelmaß auf einem topologischen Raum. Ein Punkt x liegt genau dann im *Träger* von μ, wenn jede offene Umgebung von x positives Maß hat.

Ein Maß heißt *trivial,* wenn es endlichen Träger hat.

Ein Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ ist ein *Wahrscheinlichkeitsmaß,* wenn $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

Es besitzt alle *Momente*, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n d\mu(x) < \infty.$$

16.2 Lemma. *Es sei μ ein Borelmaß, welches alle Momente besitzt. Die Monome sind genau dann linear unabhängig in $L^2(\mu)$, wenn μ nichttrivial ist.*

16.3 Bezeichnung. Ab nun sei μ nichttrivial. Wendet man Gram-Schmidt Orthogonalisierung an auf die Folge der Monome in der Reihenfolge aufsteigender Grade, so erhält man eine Folge $(\widetilde{P}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ paarweise in $L^2(\mu)$ orthogonaler Polynome. Dabei hat $\widetilde{P}_n$ den grad n. Die $\widetilde{P}_n$ werden jetzt auf zwei verschiedene Arten normalisiert:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x^n + \dots, \\ p_n(x) &= \frac{P_n(x)}{\|P_n\|}. \end{aligned}$$

Wir setzen noch $P_{-1} := 0$.

16.4 Satz. *Es sei μ ein nichttrivial Borelmaß auf $\mathbb{R}$, welches alle Momente besitzt. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \|P_n\|/\|P_{n-1}\|$. Dann existieren $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + b_{n+1}P_n(x) + a_n^2 P_{n-1}(x). \tag{16.1}$$

16.5 Definition. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind die *Jacobi-Parameter* von μ.

Ziel ist die Umkehrung dieses Satzes: Gegeben eine 3-Term Rekursion (16.1), so soll man ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ konstruieren, so dass die P_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ein Orthogonalsystem bilden.

16.6 Bemerkung. Im Fall eines Wahrscheinlichkeitsmaßes haben wir $\|P_0\| = 1$ und daher $\|P_n\| = a_1 \dots a_n$ und

$$p_n = \frac{1}{a_1 \dots a_n} x^n + \dots .$$

Für die p_n ist die Rekursionsformel also

$$xp_n = a_{n+1}p_{n+1} + b_{n+1}p_n + a_n p_{n-1}. \tag{16.2}$$

Es sei $F \subset L^2(\mu)$ der Abschluss des von den Polynomen aufgespannten Unterraums. Der Operator $M\colon F \to F$, $f \mapsto xf$, wird bezüglich der Orthonormalbasis $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dargestellt durch die Matrix

$$J := \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist die Matrix der Jacobi-Parameter von μ und wird gelegentlich auch als Jacobi-Matrix bezeichnet.

16.7 Satz. *Es sei* μ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $\mathbb{R}$, *welches alle Momente besitzt und es seien* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *seine Jacobi-Parameter. Setzt man* $\eta := 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n|$, *so gelten:*

(a) Falls $\eta < \infty$, *so gilt* $\operatorname{Supp} \mu \subseteq [-\eta, \eta]$.

(b) Falls $\operatorname{Supp} \mu \subseteq [-R, R]$ *für ein* $R \in \mathbb{R}$, *so gilt* $\eta \leq 3R$.

16.8 Bezeichnung. Es seien P und Q zwei Polynome. Wir sagen, dass sich die Nullstellen von P und Q *abwechseln*, wenn

(a) alle Nullstellen von P und Q reell und einfach sind,

(b) die Nullstellenmengen von P und Q disjunkt sind,

(c) zwischen je zwei Nullstellen von P eine von Q und zwischen je zwei Nullstellen von Q eine von P liegt.

16.9 Satz. *Für* $a_1, \dots, a_{n-1} > 0$ *und* $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ *definieren wir die* n*-Jacobimatrix als*

$$J_n := \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix} \tag{16.3}$$

und definieren $P_0 \equiv 1$ *und* $P_1, \dots, P_n$ *rekursiv*[1] *durch* (16.1)*. Dann wechseln sich die Nullstellen von* P_{n-1} *und* P_n *ab.*

Bemerkung. (a) Die Gauß-Quadratur hat ihre Knoten (also die Stellen, an denen die zu integrierende Funktion ausgewertet wird), an den Nullstellen des n-ten Legendre-Polynoms. Dazu muss gezeigt werden, dass das n-te Legendre-Polynom tatsächlich n verschiedene, reelle Nullstellen besitzt. Das folgt aus obigem Satz.

(b) Wenn M die Multiplikation mit x bezeichnet und π_n die Projektion, die all Monome vom Grad $\geq n$ auf 0 abbildet, dann ist J_n die Matix von $\pi_n \circ M$ in der Basis $(p_0, \dots, p_{n-1})$

16.10 Satz. *Es sei* J_n *wie in* (16.3)*. Dann sind die Nullstellen von* P_n *genau die Eigenwerte von* J_n*.*

16.11 Lemma. *Es sei* J_n *die* n*-Jacobimatrix zu den Jacobi-Parametern* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, es seien* $p_0, \dots, p_n$ *die durch die drei-Term-Rekursion definierten Polynome und es seien* $y_1, \dots, y_n$ *die Nullstellen von* P_n*. Dann ist*

$$\mu_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sum_{\ell=0}^{n-1} p_\ell(y_j)^2} \delta_{y_j}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ *mit den Jacobi-Parametern* $a_1, \dots, a_{n-1}$ *und* $b_1, \dots, b_n$*.*

16.12 Lemma. *Es sei* $n \in \mathbb{N}$*. Seien* ρ *und* μ *zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf* $\mathbb{R}$*, welche die ersten* $2n$ *Momente besitzen. Dann stimmen die Jacobi-Parameter* $a_1, \dots, a_{n-1}$ *und* $b_1, \dots, b_n$ *der beiden Maße genau dann überein, wenn*

$$\int x^k d\rho = \int x^k d\mu \quad \textit{für } k = 1, \dots, 2n-1. \tag{16.4}$$

16.13 Theorem (Satz von Favard (Stieltjes, 1895))**.** *Es seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Jacobi-Parameter (d. h.* $a_n > 0$*,* $b_n \in \mathbb{R}$*), so dass* $\eta := 2\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n| < \infty$*. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß* μ*, welches diese Jacobi-Parameter besitzt. Es gilt* $\operatorname{Supp}\mu \subseteq [-\eta, \eta]$*.*

16.14 Bemerkung. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobi-Parameter. Die drei-Term-Relation besagt, dass die Jacobi-Matrix die Matrix der Multiplikation $M\colon L^2(\mu) \to L^2(\mu)$, $f \mapsto xf$, in der Orthogonalbasis $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

[1] Zur Definition von P_n benötigen wir $a_1, \dots, a_{n-1}$ und $b_1, \dots, b_n$.

17 Zyklische Unterräume

17.1 Definition. Seien H ein Hilbertraum, $A \in L(H)$ und $\varphi \in H$. Der *zyklische Unterraum* $H_\varphi^{(A)}$ ist der kleinste abgeschlossene Unterraum von H mit

(a) $\varphi \in H_\varphi^{(A)}$,

(b) wenn $\psi \in H_\varphi^{(A)}$, dann auch $A\psi \in H_\varphi^{(A)}$ und $A^*\psi \in H_\varphi^{(A)}$.

17.2 Bezeichnung. Für $n \in \mathbb{N}$ sei H_n ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, -)_n$. Dann definiert man

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty}{}_{\ell^2} H_n := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle| x_n \in H_n, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \right\}$$

und versieht ihn mit dem Skalarprodukt

$$((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n)_n.$$

Mit dieser Setzung wird $\bigoplus_{n=1}^{\infty}{}_{\ell^2} H_n$ zu einem Hilbertraum. Wenn die H_n paarweise orthogonale, abgeschlossene Unterräume desselben Hilbertraums H sind, dann kann man $\bigoplus_{n=1}^{\infty}{}_{\ell^2} H_n$ als Abschluss der algebraischen direkten Summe in H realisieren.

17.3 Lemma. *Für* $\psi \perp H_\varphi^{(A)}$ *gilt* $H_\psi^{(A)} \perp H_\varphi^{(A)}$.

17.4 Satz. *Seien* H *ein separabler Hilbertraum und* $A \in L(H)$. *Dann existieren eine höchstens abzählbare Indexmenge* I *und eine orthonormale Familie* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *in* H, *so dass* $H_{\varphi_j}^{(A)} \perp H_{\varphi_k}^{(A)}$ *für* $j \neq k$ *und*

$$\bigoplus_{i\in I}{}_{\ell^2} H_{\varphi_i}^{(A)} = H.$$

Bemerkung. Es sei E ein Banachraum und H ein Hilbertraum.

(a) Wenn A selbstadjungiert ist, dann $H_\varphi^{(A)} = \overline{\mathrm{LH}\left(\{A^n\varphi | n \in \mathbb{N}_0\}\right)}$.

(b) Ein Vektor φ heißt *zyklisch* für einen Operator in $A \in L(E)$, wenn

$$\overline{\mathrm{LH}\left(\{A^n\varphi | n \in \mathbb{N}_0\}\right)} = E.$$

(c) Ein abgeschlossener Unterraum $F \subset E$ ist ein *invarianter Unterraum* für einen Operator $A \in L(E)$, wenn $A(F) \subseteq F$.

Das *Problem des invarianten Unterraums* für den Banachraum E fragt, ob jeder Operator $A \in L(E)$ einen nichttrivialen invarianten Unterraum besitzt.

Klar ist, dass A genau dann keinen nichttrivialen invarianten Unterraum besitzt, wenn jedes $\varphi \neq 0$ zyklisch für A ist.

(d) Für Hilberträume ist das Problem des invarianten Unterraums offen. Enflo hat in den 70ern einen Banachraum zusammen mit einem Operator konstruiert, der keinen invarianten Unterraum besitzt.

(e) Ein Vektor φ heißt *hyperzyklisch* für einen Operator A, wenn $\overline{\{A^n\varphi | n \in \mathbb{N}_0\}} = E$. Read hat 1988 einen Operator auf dem ℓ^1 konstruiert, für den jeder nichttriviale Vektor hyperzyklisch ist.

18 Der Spektralsatz für beschränkte, selbstadjungierte Operatoren

18.1 Lemma. *Es sei* H *ein Hilbertraum und es sei* $A \in L(H)$ *selbstadjungiert mit zyklischem Vektor* φ. *Wir stellen* A *in der Basis dar, die man erhält, wenn man die Folge* $(A^j\varphi)_{j\in\mathbb{N}_0}$ *Gram-Schmidt orthogonalisiert. Dann ist die zugehörige Matrix eine Jacobi-Matrix.*

18.2 Theorem (Spektralsatz für Operatoren mit zyklischem Vektor). *Es sei* H *ein Hilbertraum und es sei* $A \in L(H)$ *selbstadjungiert mit zyklischem Vektor* φ *der Länge* 1. *Dann existiert ein eindeutiges Maß* μ *mit Träger in* $\big[-\|A\|, \|A\|\big]$, *so dass*

$$\int x^n d\mu(x) = (\varphi, A^n\varphi)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. *Ferner existiert eine orthogonale Abbildung* $U\colon H \to L^2(d\mu)$, *so dass*

$$(UA\psi)(x) = x(U\psi)(x) \quad \textit{für alle } \psi \in H,\ x \in \mathbb{R}.$$

18.3 Theorem (Spektralsatz). *Sei* H *ein separabler Hilbertraum und sei* $A \in L(H)$ *selbstadjungiert. Dann existieren eine höchstens abzählbare Menge* I *und für jedes* $j \in I$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß* μ_j, *sowie eine unitäre Abbildung*

$$U\colon H \to \bigoplus_{j\in I}{}_{\ell^2} L^2(\mu_j),$$

so dass für alle $\varphi \in H$

$$(UA\varphi)(x) = x(U\varphi(x)),$$

wobei der Ausdruck auf der rechten Seite so zu verstehen ist, dass alle Komponenten mit x *multipliziert werden.*

Bemerkung. Die Zerlegung ist nicht notwendig eindeutig.

18.4 Beispiel. Es sei A ein kompakter selbstadjungierter Operator in einem separablen Hilbertraum H. Wir hatten in der Einführung gezeigt, dass es ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H gibt, so dass

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\cdot, e_n)e_n.$$

Das ist genau die Aussage des obigen Satzes, wenn wir $\mu_j = \delta_{\lambda_j}$ und

$$U\varphi(x) = ((\varphi, e_j)_{j\in\mathbb{N}})_{j\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{j\in\mathbb{N}}{}_{\ell^2} L^2(\mu_j) \quad \text{und} \quad U^{-1}((\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j e_j$$

wählen.

18.5 Definition. Es seien E und F zwei C^*-Algebren. Eine Abbildung $\Phi \in L(E, F)$ ist ein $*$-*Homomorphismus*, wenn

(a) $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ für alle $a, b \in E$,

(b) $\Phi(a^*) = \Phi(a)^*$ für alle $a \in A$.

18.6 Beispiel. Die Algebra $\mathcal{B}[a, b]$ der beschränkten, Borel-messbaren, komplexwertigen Funktionen auf $[a, b]$ ist eine C^*-Algebra mit der komplexen Konjugation als Involution und der Supremumsnorm als Norm. Wenn χ_B die charakteristische Funktion einer Borelmenge B ist, dann definiert $\Phi(f) := \chi_B f$ einen $*$-Endomorphismus von $\mathcal{B}([a, b])$.

18.7 Theorem (Messbarer Funktionalkalkül). *Sei* H *ein separabler Hilbertraum und sei* $A \in L(H)$ *selbstadjungiert. Dann existiert ein* $*$-*Homomorphismus*

$$\Phi_A \colon \mathcal{B}[-\|A\|, \|A\|] \to L(H)$$

mit den Eigenschaften

(a) $\Phi_A(\mathbb{1}) = \mathrm{id}_H$,

(b) $\Phi_A(\mathrm{id}_{[-\|A\|,\|A\|]}) = A$,

(c) wenn $f_n(x) \to f(x)$ *punktweise und* $\sup_{x,n}|f_n(x)| < \infty$, *dann*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_A(f_n)(\varphi) = \Phi_A(f)(\varphi) \text{ für jedes } \varphi \in H.$$

Es sei H weiterhin ein Hilbertraum.

Bemerkung. Nach Satz 13.7 der Einführung in die Funktionalanalysis ist eine Projektion genau dann orthogonal, wenn sie selbstadjungiert ist.

18.8 Definition. Ein selbstadjungierter Operator $A \in L(H)$ heißt *positiv,* wenn

$$(A\varphi, \varphi) \geq 0$$

für alle $\varphi \in H$. In diesem Fall schreiben wir $A \geq 0$. Wir schreiben $A \geq B$, wenn $A - B \geq 0$.

18.9 Lemma. *Es seien* $P, Q \in L(H)$ *selbstadjungierte Projektionen mit* $P \leq Q$. *Dann gelten*

(a) $\operatorname{Bild} P \subseteq \operatorname{Bild} Q$.

(b) $Q - P$ *ist die orthogonale Projektion auf* $\operatorname{Bild} Q \cap (\operatorname{Bild} P)^{\perp}$.

(c) $QP = PQ = P$.

18.10 Definition. Es seien E und F zwei normierte Räume. Ein Netz $(A_\beta)_{\beta \in B}$ in $L(E, F)$ konvergiert *stark* gegen A, wenn für jedes $x \in A$ das Netz $(A_\beta x)_{\beta \in B}$ gegen Ax konvergiert. In diesem Fall schreiben wir

$$A = \operatorname{s-lim}_{\beta \in B} A_\beta.$$

Bemerkung. Die starke Operatortopologie ist schwächer als die durch die Operatornorm gegebene Topologie. In der Formulierung des Satzes über den messbaren Funktionalkalkül kam die starke Konvergenz bereits vor.

18.11 Definition. Eine Abbildung $E \colon \mathbb{R} \to L(H)$, $t \mapsto E_t$, ist eine *Spektralschar* (engl. *resolution of the identity*), wenn:

(a) Alle E_t sind orthogonale Projektionen.

(b) Wenn $t < s$, dann $E_t < E_s$.

(c) $\operatorname{s-lim}_{t \to -\infty} E_t = 0$ und $\operatorname{s-lim}_{t \to \infty} E_t = \mathrm{id}_H$.

(d) $\operatorname{s-lim}_{s \searrow t} E_s = E_t$ für jedes t.

Wenn $E_t = 0$ für alle $t < a$ und $E_b = \mathrm{id}_H$, dann sagt man, dass der Träger von E in $[a, b]$ liegt.

18.12 Satz. *Es sei* E *eine Spektralschar mit Träger in* $[-R, R]$. *Für* $g \in C[-R, R]$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *definieren wir*

$$\Phi_n(g) \coloneqq \sum_{j=-2^n}^{2^n} g\left(\frac{jR}{2^n}\right) \left(E_{jR/2^n} - E_{(j-1)R/2^n}\right) \in L(H).$$

Dann konvergiert $\Phi_n(g)$ *in der Operatornorm gegen ein* $\Phi(g) \in L(H)$. *Das so erklärte* Φ *besitzt die folgenden Eigenschaften*

$$\begin{aligned}
\Phi(gh) &= \Phi(g)\Phi(h), \\
g &\mapsto \Phi(g) \text{ ist linear,} \\
\Phi(\overline{g}) &= \Phi(g)^*, \\
\|\Phi(g)\| &\leq \|g\|_\infty \\
(\Phi(g)\varphi, \varphi) &\geq 0 \text{ für } \varphi \in H \text{ und } g \geq 0.
\end{aligned}$$

18.13 Definition. Ein *signiertes* (bzw. *komplexes*) Borelmaß auf einem topologischen Raum X ist eine Abbildung μ von der σ-Algebra der Borelmengen nach $\mathbb{R}$ (bzw. nach $\mathbb{C}$), so dass:

(a) Es existiert $C > 0$, so dass
$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| \leq C,$$
für alle Folgen $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Borelmengen, welche $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = X$ und $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$ erfüllen.

(b) Falls $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Borelmengen mit $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$ ist, so gilt
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

18.14 Lemma. *Für ein signierts Borelmaß μ erklären wir zwei (positive) Borelmaße durch*
$$\mu_+(A) := \sup_{B\subseteq A} \mu(B), \qquad \mu_-(A) := -\inf_{B\subseteq A} \mu(B).$$
Dann $\mu(A) = \mu_+(A) - \mu_-(A)$.

18.15 Definition. Für ein signiertes Maß μ und eine messbare Funktion f definieren wir
$$\int f\,d\mu = \int f\,d\mu_+ - \int f\,d\mu_-.$$
Für ein komplexes Maß definieren wir $\int f\,d\mu = \int f\,d\,\mathrm{Re}\,\mu + i\int f\,d\,\mathrm{Im}\,\mu$.

18.16 Satz. *Es sei $T \in C(X,\mathbb{R})'$. Dann existieren positive Funktionale T_+ und T_-, so dass $T = T_+ - T_-$.*

18.17 Theorem. *Es sei X ein kompakter topologischer Raum und es sei $T \in C(X)'$ ein ($\mathbb{C}$-wertiges) stetig lineares Funktional. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes, komplexes Maß μ auf X, so dass*
$$T(f) = \int f\,d\mu, \quad f \in C(X).$$

18.18 Theorem. *Es sei H ein separabler Hilbertraum. Für eine Spektralschar E_t mit Träger in $[-R,R]$ sei $\Phi\colon C[-R,R] \to L(H)$ die in Satz 18.12 konstruierte Abbildung. Sie besitzt eine eindeutig bestimmte stetig lineare Fortsetzung $\Psi\colon \mathcal{B}[-R,R] \to L(H)$.*

Für jede Wahl von $\varphi,\psi \in H$ existiert ein komplexes Borel-Maß $\mu_{\varphi,\psi}$ auf $\mathbb{R}$ mit Träger in $[-R,R]$, so dass für alle $g \in \mathcal{B}[-R,R]$
$$(\Psi(g)\varphi,\psi) = \int g(t)d\mu_{\varphi,\psi}(t).$$
Falls $E_s = E_t$, so gilt $\Psi(g) = 0$ für alle g mit $\mathrm{Supp}\,g \subset \,]s,t[$.

Bemerkung. Man schreibt $\Psi(g) = \int g(t)dE_t$.

18.19 Theorem (Spektralsatz). *Es sei* H *ein separabler Hilbertraum und es sei* $A \in L(H)$ *selbstadjungiert. Dann gibt es eine Spektralschar* E *mit Träger in* $[-\|A\|, \|A\|]$*, so dass*

$$A = \int t\, dE_t.$$

Bemerkung. Für die Abbildung Φ_A aus dem messbaren Funktionalkalkül gilt

$$\Phi_A(g) = \int g(t)dE_t \tag{18.1}$$

für die Spektralschar aus Theorem 18.19.

Beweis. Für $\varphi \in H$ und eine Borelmenge M setzen wir

$$\nu_\varphi(M) := \langle \Phi_A(\chi_M)\varphi, \varphi\rangle\,.$$

Wegen $\nu_\varphi(M) = \langle \Phi_A(\chi_M)\varphi, \Phi_A(\chi_M)\varphi\rangle \geq 0$ ist leicht zu sehen, dass ν_φ ein Borelmaß ist. Ferner sei $\mu_{\varphi,\varphi}$ das Borelmaß aus Theorem 18.18, also

$$\mu_{\varphi,\varphi}(M) = \left\langle \int \chi_m dE_t\varphi, \varphi \right\rangle = \langle E_t\varphi, \varphi\rangle\,.$$

Aus dem Beweis des Spektralsatzes 18.19 wissen wir, dass $E_t = \Phi_A(\chi_{]-\infty,t]})$. Also stimmen $\mu_{\varphi,\varphi}$ und ν_φ auf den Intervallen der Form $]-\infty, t]$ überein. Da beide Maße σ-endlich sind, sind sie gleich. Wir hatten im Beweis von Lemma 13.5 der Einführung in die Funktionalanalysis für selbstadjungiertes A die folgende Polarisationsgleichung hergeleitet

$$\mathrm{Re}(Ax, y) = \frac{1}{4}((A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)).$$

Da eine ähnliche Formel auch für den Imaginärteil gilt folgt hieraus schließlich die Behauptung. $\square$

Bei Meise und Vogt hat Theorem 18.19 eine etwas andere Gestalt:

18.20 Definition. Ein *Spektralmaß* ist eine Abbildung $\widetilde{E}$ von der σ-Algebra der Borelmengen in $\mathbb{R}$ nach $L(H)$ mit den Eigenschaften:

(a) Für jedes Borelmenge M ist $\widetilde{E}_M$ eine orthogonale Projektion; ferner $\widetilde{E}(\emptyset) = 0$ und $\widetilde{E}(\sigma(A) = \mathrm{id}_H$.

(b) Für Borelmengen M_1 und M_2 gilt $\widetilde{E}(M_1 \cap M_2) = \widetilde{E}(M_1)\widetilde{E}(M_2)$.

(c) Für disjunkte Borelmengen M_1 und M_2 gilt $\widetilde{E}(M_1 \cup M_2) = \widetilde{E}(M_1) + \widetilde{E}(M_2)$.

(d) Für jedes $\varphi \in H$ ist $\widetilde{E}_{\varphi,\varphi}M \mapsto (\widetilde{E}(M)\varphi, \varphi)$ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$.

18.21 Theorem. *Sei* H *ein separabler Hilbertraum, sei* $A \in L(H)$ *selbstadjungiert und sei* $\Phi_A\colon \mathcal{B}[-\|A\|, \|A\|] \to L(H)$ *die Abbildung des messbaren Funktionalkalküls. Dann wird durch* $M \mapsto \Phi_A(\chi_M)$ *ein Spektralmaß gegeben. Ferner gilt*

$$(A\varphi, \varphi) = \int t \, d\widetilde{E}_{\varphi,\varphi}$$

für alle $\varphi \in H$.

18.22 Theorem. *Sei* H *ein separabler Hilbertraum und sei* $A \in L(H)$ *selbstadjungiert. Die folgenden drei Mengen stimmen überein:*

(a) $\sigma(A)$,

(b) $\sigma_2(A) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{R} | \forall \epsilon > 0 : E_{\lambda+\epsilon} \neq E_{\lambda-\epsilon}\}$,

(c) $\sigma_3(A) \coloneqq \overline{\bigcup_{j\in I} \operatorname{Supp} \mu_j}$ *für die Maße* μ_j *aus der Formulierung 18.3 mittels Multiplikation.*

Bemerkung. Das bedeutet, dass man beim messbaren Funktionalkalkül das Intervall $[-\|A\|, \|A\|]$ durch $\sigma(A)$ ersetzen kann.

18.23 Theorem (Spektraler Abbildungssatz). *Es sei* H *ein separabler Hilbertraum und es sei* $A \in L(H)$ *selbstadjungiert. Für jedes* $f \in C(\sigma(A))$ *gilt* $\sigma(\Phi_A(f)) = f(\sigma(A))$.

19 Anwendungen des Spektralsatzes

19.1 Satz. *Sei* H *ein separabler Hilbertraum und sei* $A \in L(H)$ *selbstadjungiert.*

(a) $A \geq 0$ *genau dann, wenn* $\sigma(A) \subset [0, \infty[$.

(b) Wenn $A \geq 0$*, dann existiert ein selbstadjungierter Operator* $B \geq 0$ *mit* $B^2 = A$.

19.2 Definition. Es seien μ und ν zwei Borelmaße auf einem topologischen Raum X. Das Maß ν heißt μ-singulär, wenn es eine Borelmenge A gibt, für welche $\mu(A) = 0$ und $\nu(X \setminus A) = 0$. Wir schreiben $\mu \perp \nu$.

19.3 Bemerkung. ν ist genau dann μ-singular, wenn μ auch ν-singulär ist.
Das Dirac-Maß ist λ_1-singulär.

19.4 Satz. *Es seien* μ *und* ν *Borelmaße.*

(a) Falls es Borelmengen A_n, $n \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ *und* $\lim_{n\to\infty} \nu(X \setminus A_n) = 0$, *so ist* ν μ*-singulär.*

(b) Falls es nichtnegative, Borel-messbare Funktionen g_n, $n \in \mathbb{N}$, *gibt, so dass* $g_n > 0$ ν*-fast überall und*

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = 0 \textit{ und } \lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{g_n} d\nu = 0,$$

so ist ν μ*-singulär.*

19.5 Definition. Es seien μ und ν Borelmaße. Man sagt, dass ν *absolutstetig* bezüglich μ ist, wenn jede Borelmenge, die eine μ-Nullmenge ist, auch eine ν-Nullmenge ist. In diesem Fall schreibt man $\nu \ll \mu$.

19.6 Beispiel. Es sei μ ein Borelmaß und es sei $f \in L^1(\mu)$. Für jede Borelmenge M setzen wir $\nu(M) := \int_M f \, d\mu$. Dann $\nu \ll \mu$.
Die Umkehrung ist der Satz von Radon-Nikodým.

19.7 Theorem (v. Neumann (1940)). *Es seien* μ *und* ν *endliche Borelmaße auf einem Messraum* X. *Dann existieren* $f \in L^1(\mu)$ *und ein Borelmaß* ν_s, *so dass* $f \geq 0$, $\nu_s \perp \mu$ *und*

$$\nu = f\mu + \nu_s.$$

19.8 Theorem (Satz von Radon-Nikodým). *Es seien* μ *und* ν *endliche Borelmaße auf einem Messraum* X. *Falls* $\nu \ll \mu$, *so gibt es* $f \in L^1(\mu)$, *so dass* $\nu = f\mu$.

Bemerkung. Es genügt, wenn μ σ-endlich ist. Das wird z. B. in der *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie* von Bauer gezeigt. Der schwierige erste Fall des Beweises ist genau der hier gezeigte.

19.9 Theorem (Lebesguescher Zerlegungssatz). *Es seien* μ *und* ν *zwei endliche Borelmaße. Dann existieren Maße* ν_{ac} *und* ν_s, *so dass* $\nu_s \perp \mu$, $\nu_{ac} \ll \mu$ *und* $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$.

19.10 Definition. Es sei μ ein Maß auf X.

(a) Ein *Massepunkt* ist ein $x \in X$ mit $\mu(\{x\}) > 0$. Das Maß μ ist ein *reines Punktmaß,* falls aus $\mu(A) > 0$ bereits die Existenz eines Massepunkts in A folgt.

(b) Ein Maß heißt *stetig,* falls es keine Massepunkte besitzt.

19.11 Lemma. *Es sei* μ *ein endliches Borelmaß auf einem topologischen Raum* X. *Die Menge* $\{x|\mu(\{x\}) > 0\}$ *ist höchstens abzählbar.*

19.12 Satz. *Es sei* μ *ein endliches Borelmaß auf einem kompakten Raum* X. *Dann existieren ein reines Punktmaß* μ_{pp} *und ein stetiges Maß* μ_c, *so dass* $\mu = \mu_{pp} + \mu_c$.

19.13 Bemerkung. Es seien μ und ν endliche Borelmaße auf einem topologischen Raum X. Das Maß μ sei stetig. Zerlegt man $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$ wie im Lebesgueschen Zerlegungssatz, so ist auch ν_{ac} stetig. Also $\nu_{pp} = (\nu_s)_{pp}$ und wir haben die Zerlegung

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_{pp} + \nu_{sc}.$$

Bei all den kommenden Definitionen im Rest dieses Abschnitts ist H ein separabler Hilbertraum und $A \in L(H)$ selbstadjungiert. Die Beweise mache ich wie in Abschnitt 7.2 von Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces.*

19.14 Definition. Das *Punktspektrum* $\sigma_p(A$ ist gleich der Menge der Eigenwerte. Es sei H_{pp} der Abschluss der Linearen Hülle aller Eigenvektoren. Wir bezeichnen H_{pp} als den *unstetigen Unterraum* von H.

Das orthogonale Komplement $H_c := H_{pp}^{\perp}$ ist der *stetige Unterraum* von H.

19.15 Bezeichnung. Sei $b \in \mathbb{R}$. Dann existiert s-$\lim_{t \nearrow b} E(t)$ nach Aufgabe 3 von Blatt 11. Wir bezeichnen diesen Projektor mit $E(b_+)$.

19.16 Bemerkung. (a) $E(\lambda) - E(\lambda_+) = \Phi_A(\chi_{\{\lambda\}})$, wenn Φ_A den messbaren Funktionalkalkül bezeichnet.

(b) Wenn φ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, dann $(E(\lambda) - E(\lambda_+))\varphi = \varphi$.

(c) Für jedes φ gilt mit $\psi := \Phi_A(\chi_{\{\lambda\}})\varphi$

$$A\psi = \Phi_A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})\Phi_A(\chi_{\{\lambda\}})\varphi = \Phi_A\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\,\chi_{\{\lambda\}}\right)\varphi = \Phi_A\left(\lambda\chi_{\{\lambda\}}\right)\varphi = \lambda\psi.$$

Es ist aber natürlich im allgemeinen nicht klar, dass $\psi \neq 0$.

(d) Wenn $\mu_{\varphi,\varphi} = \delta_\lambda$, dann ist φ ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert λ.

19.17 Satz. *Isolierte Punkte von $\sigma(A)$ sind Eigenwerte.*

19.18 Satz. *(a) H_p besteht aus allen Vektoren φ, für welche $\mu_{\varphi,\varphi}$ ein reines Punktmaß ist.*

(b) H_c besteht aus allen Vektoren φ, für welche $\mu_{\varphi,\varphi}$ stetig ist.

19.19 Definition. Der *singulär stetige* Unterraum H_{sc} besteht aus allen $\varphi \in H_c$, für welche eine Borelsche Lebesgue-Nullmenge N existiert, für welche $\varphi = \Phi_A(\chi_N)\varphi$.

19.20 Lemma. *H_{sc} ist abgeschlossen in H.*

19.21 Definition. Der *absolut stetige Unterraum* H_{ac} ist das ortogonale Komplement von H_{sc} in H_c. Der *singuläre* Unterraum H_s ist definiert durch $H_s = H_p \oplus H_{sc}$.

19.22 Satz. *(a) H_s besteht aus denjenigen $\varphi \in H$, für welche $\mu_{\varphi,\varphi}$ singulär zum Lebesguemaß ist.*

(b) H_{ac} besteht aus denjenigen $\varphi \in H$, für welche $\mu_{\varphi,\varphi}$ absolutstetig bezüglich des Lebesguemaßes ist.

Den Beweis findet man als Beweis von Theorem 7.27 im Buch von Weidmann.

19.23 Satz. *Die Räume H_p, H_c, H_{sc}, H_s und H_{ac} sind invariant unter A.*

19.24 Bezeichnung. Für $z \in \{p, c, sc, ac, s\}$ bezeichnen wir mit $A_z \in L(H_z)$ die Einschränkung von A auf H_z. Man bezeichnet T_s als den *(spektral) singulären Anteil* von A, entsprechend für die anderen Zeichen.

Das *singuläre* Spektrum $\sigma_s(A)$ ist das Spektrum von A_s, entsprechen für $z = c, sc, ac$. Das Punktspektrum hatten wir bereits definert. Es gilt $\sigma(A_p) = \overline{\sigma_p(A)}$.

Man sagt, dass A ein *reines Punktspektrum* hat, wenn $A = A_p$, entsprechend für die anderen Fälle.

20 Unitäre Operatoren

20.1 Bezeichnung. Für $k, \ell \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir die im Ring $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\ell} \alpha_n z^n$$

als *Laurent-Polynom*. Wenn $\alpha_k \neq 0$ und $\alpha_\ell \neq 0$, dann ist $\ell - k$ der Grad des Laurent-Polynoms.

20.2 Bemerkung. (a) Indem man $z^{-k} f(z)$ betrachtet, sieht man, dass f unter Berücksichtigung der Vielfachheiten genau $\ell - k$ Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt.

(b) Wenn $f(e^{i\theta}) \in \mathbb{R}$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$, dann

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{f(\overline{z})} \text{ für alle } z \neq 0.$$

Insbesondere ist der Grad von f dann gerade.

20.3 Theorem (Fejér-Riesz). *Wenn f ein Laurent-Polynom ist, für welches $f(e^{i\theta}) \geq 0$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$, dann existiert ein Polynom P, welches keine Nullstellen in $\mathbb{D}$ besitzt, so dass*

$$f(z) = P(z)\overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

Insbesondere gilt $f(e^{i\theta}) = |P(e^{i\theta})|^2$.

20.4 Definition. (a) Eine über $\mathbb{Z}$ indizierte Familie $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt *positiv definit,* wenn für alle ℓ und alle $(\zeta_j)_{j=1,\dots,\ell} \in \mathbb{C}^\ell$ gilt

$$\sum_{j,k=1}^{\ell} \overline{\zeta}_j \zeta_k c_{k-j} \geq 0.$$

(b) Für $n \in \mathbb{Z}$ ist das n*-te Moment* eines endlichen Borelmaßes μ auf $\partial\mathbb{D}$ definiert als

$$c_n = \int_{\partial\mathbb{D}} z^n d\mu(z).$$

20.5 Theorem (Carathéodory-Toeplitz). *Eine über $\mathbb{Z}$ indizierte Familie $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ besteht genau dann aus den Momenten eines endlichen Borelmaßes auf $\partial\mathbb{D}$, wenn sie positiv definit ist.*

20.6 Satz. *Es sei* $U \in L(H)$ *ein unitärer Operator mit zyklischem Vektor* φ*. Dann gibt es ein endliches Borelmaß* μ*, so dass für alle* $n \in \mathbb{Z}$

$$(\varphi, U^n\varphi) = \int_{\partial\mathbb{D}} z^n d\mu(z).$$

Von hier aus kann man vorgehen wie im selbstadjungierten Fall und die entsprechenden Varianten bekommen. In Satz 14.8 hatten wir bereits gezeigt, dass das Spektrum eines unitären Operators in $\partial\mathbb{D}$ liegt.

20.7 Theorem (Messbarer Funktionalkalkül). *Sei* H *ein separabler Hilbertraum und sei* $U \in L(H)$ *unitär. Dann existiert ein* $*$*-Homomorphismus*

$$\Phi_U \colon \mathcal{B}(\partial\mathbb{D}) \to L(H)$$

mit den Eigenschaften

(a) $\Phi_U(\mathbb{1}) = \mathrm{id}_H$*,*

(b) $\Phi_U(\mathrm{id}_{\partial\mathbb{D}}) = U$*,*

(c) wenn $f_n(z) \to f(z)$ *punktweise in* $\partial\mathbb{D}$ *und* $\sup_{x,n}|f_n| < \infty$*, dann*

$$\text{s-lim}_{n\to\infty} \Phi_U(f_n) = \Phi_U(f).$$

Man kann ebenfalls zeigen, dass $\operatorname{Supp}\mu_j \subseteq \sigma(U)$ für alle j.

Der Spektralsatz für unitäre Operatoren ist ein Spezialfall des Spektralsatzes für normale Operatoren, den ich allerdings nicht zeigen werde.

20.8 Theorem (Spektralsatz für normale Operatoren (Simon, Cor. 5.6.6)). *Sei* H *ein Hilbertraum, sei* $A \in L(H)$ *normal und sei* φ *ein zyklischer Vektor für* A*. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Maß* μ *auf* $\sigma(A)$*, so dass*

$$(\varphi, (A^*)^k A^\ell \varphi) = \int \bar{z}^k z^\ell d\mu(z).$$

21 Unbeschränkte Operatoren zwischen Hilberträumen

Ab jetzt schreiben wir das Skalarprodukt als $\langle x, y \rangle$, um es vom Paar (x, y) zu unterscheiden.

Aussagen, die ich bereits in Kapitel 18 der Einführung gezeigt hatte, referiere ich nur noch. Damals hatte ich mich an dem Buch von Meise und Vogt orientiert.

21.1 Definition. Ein *Operator* A von H nach G ist eine lineare Abbildung A von einem Unterraum $D(A)$ von H mit Werten in G. $D(A)$ ist der *Definitionsbereich* von A, $R(A) = \{Ax \mid x \in D(A)\}$ ist sein *Bild*. Der Prähilbertraum $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\}$ ist der *Graph* von A.

Der Operator A ist *dicht definiert*, wenn sein Definitionsbereich dicht ist.

Sind A und B zwei Operatoren von H nach G und gilt $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$, so bezeichnet man B als *Erweiterung* von A und A als *Einschränkung* von B.

21.2 Definition. Ein Operator A von H nach G heißt *abgeschlossen*, wenn sein Graph abgeschlossen ist. Er heißt *abschließbar*, wenn $\overline{\mathcal{G}(A)}$ Graph eines Operators B ist. In diesem Fall ist B die *Abschließung* von A. Wir schreiben dann $\overline{A}$.

21.3 Bemerkung. (a) $\overline{A}$ ist also definiert durch $\mathcal{G}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{G}(A)}$.

(b) Wenn A abgeschlossen mit $D(A) = H$ ist, dann ist A stetig. Das folgt aus dem Satz von abgeschlossenen Graphen.

(c) Für $H := L^2[0, 1]$ definieren wir einen Operator A in H wie folgt: $D(A)$ besteht aus allen Polynomen, und für ein Polynom p ist $Ap := p(2)$, verstanden als konstante Funktion. Sei $f(x) := x$, dann offenbar $f \in L^2[0, 1]$. Wir zeigen $(f, 0) \in \overline{\mathcal{G}(A)}$ und $(f, 2) \in \overline{\mathcal{G}(A)}$.

21.4 Definition. Der *Sobolewraum* $H^1[0, 1]$ besteht aus allen Funktionen $f \in L^2[0, 1]$, deren distributionelle Ableitung f' in $L^2[0, 1]$ liegt. Er wird versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{[0,1]} f\overline{g}\,d\lambda_1 + \int_{[0,1]} f'\overline{g'}\,d\lambda_1.$$

21.5 Bemerkung. Wir hatten in der Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen gesehen, dass $H^1[0, 1]$ ein Hilbertraum ist. Die Ableitung ist ein stetiger Operator $H^1[0, 1] \to L^2[0, 1]$.

21.6 Beispiel. Es sei $D(A) := \mathcal{D}[0,1]$. Auf $D(A)$ definieren wir durch $Af := if'$ einen unbeschränkten Operator in $H := L^2[0,1]$. Er ist abschließbar. Genauer gelten $D(\overline{A}) = H_0^1[0,1]$ und $\overline{A}f = if'$.

21.7 Lemma. *Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G. Dann definieren wir $D(A^*) = \{y \in G \mid x \mapsto \langle Ax, y \rangle$ ist stetig auf $D(A)\}$. Es gelten*

(a) $D(A^*)$ ist ein linearer Unterraum von G.

(b) Für jedes $y \in D(A^*)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $A^*y \in H$ mit

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \textit{für alle } x \in D(A).$$

(c) $A^* \colon D(A^*) \to H$ ist linear.

21.8 Definition. Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G. Den Operator A^* aus 21.7 bezeichnet man als den zu A *adjungierten* Operator.

21.9 Beispiel. Für A wie in Beispiel 21.6 gilt $x \in D(A^*)$.

21.10 Lemma. *Sei A ein Operator von H nach G. Wenn A abschließbar und dicht definiert ist, dann gilt $\overline{A}^* = A^*$.*

21.11 Satz. *Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G. Dann gelten*

(a) A^* ist abgeschlossen mit $\ker A^* = (\operatorname{Bild} A)^\perp$.

(b) A^* ist genau dann dicht definiert, wenn A abschließbar ist.

(c) Wenn A abschließbar ist, dann $\overline{A} = A^{**}$.

21.12 Korollar. *Wenn A ein dicht definierter, abgeschlossener Operator von H nach G ist, so ist A^* abgeschlossen und dicht definiert, und es gilt $A = A^{**}$.*

22 Unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren

22.1 Definition. Ein dicht definierter Operator A in einem Hilbertraum H heißt *symmetrisch*, wenn $A \subseteq A^*$. Er ist *selbstadjungiert*, wenn $A = A^*$. Ein symmetrischer Operator A heißt *wesentlich selbstadjungiert*, wenn $\overline{A}$ selbstadjungiert ist.

22.2 Lemma. *Sei A ein symmetrischer Operator in H. Dann ist A abschließbar, und $\overline{A}$ ist symmetrisch.*

22.3 Bemerkung. Sei A ein dicht definierter, symmetrischer Operator. Dann gilt für $x, y \in D(A)$
$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$
Insbesondere ist $\langle Ax, x\rangle$ reell für jedes $x \in D(A)$.

22.4 Beispiel. Es sei A wie in Beispiel 21.6. Dann ist $\overline{A}$ symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert.

22.5 Definition. Es sei A ein injektiver Operator von H nach G. Dann wird durch
$$\mathcal{G}(A^{-1}) = \{(Ax, x) \mid x \in D(A)\}$$
ein Operator mit Definitionsbereich $D(A^{-1}) = \operatorname{Bild} A$ erklärt. A^{-1} ist der *Inverse* zu A.

Offenbar ist A^{-1} genau dann abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist.

22.6 Lemma. *Sei A ein injektiver, dicht definierter Operator von H nach G, dessen Bild dicht in G ist. Dann ist A^* injektiv, A^{-1} ist dicht definiert, und es gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

22.7 Definition. Für Operatoren A, B von H nach G definieren wir $A+B$ auf $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ durch $(A+B)(x) = Ax + Bx$.

22.8 Lemma. *A und B seien Operatoren von H nach G. Dann gelten:*

(a) Falls A abgeschlossen und B beschränkt ist, so ist $A + B$ abgeschlossen.

(b) Falls $A + B$ dicht definiert ist, so gilt $A^* + B^* \subset (A + B)^*$.

(c) Falls A dicht definiert und B beschränkt ist, so gilt $A^* + B^* = (A + B)^*$.

Ohne Beweis erwähne ich den Satz von Rellich-Kato:

22.9 Theorem (Simon, Theorem 7.1.14). *Seien* A *und* B *zwei Operatoren in dem Hilbertaum* H, *wobei* A *selbstadjungiert ist. Ferner gelte* $D(A) \subseteq D(B)$ *und es gebe* $0 \leq \alpha < 1$ *und* $0 \leq \beta$, *so dass* $\|B\varphi\| \leq \alpha\|A\varphi\| + \beta\|\varphi\|$. *Wenn nun* B *selbstadjungiert ist, dann ist auch* $A + B$ *selbstadjungiert.*

22.10 Definition. Sei A ein Operator von H nach G, und sei B ein Operator von G nach F. Mit BA wird der Operator bezeichnet, der auf $D(BA) = \{x \in D(A) \mid Ax \in D(B)\}$ definiert ist durch $(BA)x = B(Ax)$.

22.11 Lemma. *Sei* A *ein dicht definierter Operator von* H *nach* G, *und sei* B *in dicht definierter Operator von* G *nach* F. *Dann gelten*

(a) $A^*B^* \subset (BA)^*$, *falls* BA *dicht definiert ist.*

(b) Falls B *stetig, so ist* BA *dicht definiert, und es gilt* $A^*B^* = (BA)^*$.

22.12 Lemma. *Sei* A *ein symmetrischer, abgeschlossener Operator in* H. *Für jedes* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *ist* $z\,\mathrm{id} - A$ *injektiv und* $\mathrm{Bild}(z\,\mathrm{id} - A)$ *abgeschlossen.*

22.13 Definition. Sei A ein Operator in H. Die *Resolventenmenge* $\rho(A)$ besteht aus denjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die $z\,\mathrm{id} - A$ injektiv ist mit $\mathrm{Bild}(z\,\mathrm{id} - A) = H$. Die Menge $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt *Spektrum* von A. Für $z \in \rho(A)$ bezeichnet man $R(z, A) = (\mathrm{id}\, z - A)^{-1}$ als *Resolvente* von A in z.

22.14 Bemerkung. Falls A abgeschlossen ist, so gilt $R(z, A) \in L(H)$ für $z \in \rho(A)$.

22.15 Satz. *Der Operator* A *sei selbstadjungiert in* H. *Dann ist sein Spektrum eine Teilmenge von* $\mathbb{R}$.

22.16 Satz. *Für einen Operator* A *in* H *sind äquivalent:*

(a) A *ist selbstadjungiert.*

(b) A *ist symmetrisch mit* $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

(c) A *ist symmetrisch, und es gibt* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *so dass* $z, \bar{z} \in \rho(A)$.

22.17 Beispiel. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachten wir in $H = L^2[0,1]$ den durch $D(A) = \left\{f \in H^1[0,1] \middle| f(1) = \lambda f(0)\right\}$ und $Af = if'$ gegebenen Operator. Wenn $|\lambda| = 1$, dann ist A selbstadjungiert.

22.18 Satz. *Wenn* A *ein abgeschlossener Operator ist, dann ist* $\sigma(A)$ *abgeschlossen.*

22.19 Satz. *Sei* A *ein abgeschlossener Operator in* H *mit* $\sigma(A) = \emptyset$. *Dann* $A^{-1} \in L(H)$ *und* $\sigma(A^{-1}) = \{0\}$.

22.20 Satz. *Sei* A *ein selbstadjungierter Operator in* $H \neq \{0\}$. *Dann* $\sigma(A) \neq \emptyset$.

23 Die Cayley-Transformierte

23.1 Definition. Sei A ein symmetrischer, abgeschlossener Operator in H. Nach Lemma 22.12 ist $-i\,\mathrm{id} - A$ injektiv. Der Operator $U = (i\,\mathrm{id} - A)(-i\,\mathrm{id} - A)^{-1}$ mit $D(U) = \mathrm{Bild}(-i\,\mathrm{id} - A)$ heißt *Cayley-Transformierte* von A.

Bemerkung. In der Funktionentheorie war die Cayley-Abbildung $\psi\colon z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ aufgetreten. Es handelt sich um eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{D}$. Ihre Inverse ist $w \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$.

23.2 Lemma. *Für jeden abgeschlossenen, symmetrischen Operator A in H ist die Cayley-Transformierte eine Isometrie von $\mathrm{Bild}(-i\,\mathrm{id} - A)$ auf $\mathrm{Bild}(i\,\mathrm{id} - A)$.*

23.3 Satz. *Sei A ein selbstadjungierter Operator in H und sei U seine Cayley-Transformierte. Dann gelten*

(a) $U \in L(H)$ *ist unitär und* $\mathrm{id} - U$ *ist injektiv.*

(b) $D(A) = \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - U)$ *und* $A = i(\mathrm{id} + U)(\mathrm{id} - U)^{-1}$.

23.4 Lemma. *Sei $U \in L(H)$ unitär, und sei $\mathrm{id} - U$ injektiv. Dann ist der auf $D(A) = \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - U)$ definierte Operator $A = i(\mathrm{id} + U)(\mathrm{id} - U)^{-1}$ symmetrisch.*

23.5 Satz. *Sei $U \in L(H)$ unitär, und sei $\mathrm{id} - U$ injektiv. Dann ist der auf $D(A) = \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - U)$ definierte Operator $A = i(\mathrm{id} + U)(\mathrm{id} - U)^{-1}$ selbstadjungiert und seine Cayley-Transformierte ist U.*

23.6 Satz. *Wenn U die Cayley-Transformierte eines selbstadjungierten Operators A ist, welcher nicht beschränkt ist, dann* $\sigma(U) = \{\frac{i-\mu}{-i-\mu} \mid \mu \in \sigma(A)\} \cup \{1\}$

24 Der Spektralsatz für unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren

24.1 Definition. Sei μ ein Borelmaß auf einer messbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ Borel-messbar. Wir definieren den *Multiplikationsoperator* M_f in $L^2(\mu)$ durch

$$D(M_f) = \Big\{\varphi \in L^2(\mu) \;\Big|\; \int_\Omega |f\varphi|^2 d\mu < \infty\Big\}, \quad M_f\varphi = f\varphi.$$

24.2 Satz. M_f *ist abgeschlossen und dicht definiert mit* $M_f^* = M_{\bar{f}}$.

24.3 Definition. Für eine Borel-messbare Abbildung $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ bezeichnet

$$W_\mu(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \forall \epsilon > 0 : \mu(f^{-1}(B_\epsilon(\lambda))) > 0\}$$

den *wesentlichen Wertebereich* von f. Für eine Familie $(\mu_i)_{i\in I}$ von Maßen setzt man

$$W_{(\mu_i)_i}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \forall \epsilon > 0 \exists i \in I : \mu_i(f^{-1}(B_\epsilon(\lambda))) > 0\}.$$

24.4 Bemerkung. Der wesentliche Wertebereich ist abgeschlossen.

24.5 Satz. $\sigma(M_f) = W_\mu(f)$.

24.6 Beispiel. Es gilt $\sigma(M_t) = \mathbb{R}$, wenn μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ ist.

24.7 Theorem (Spektralsatz). *Sei* A *ein selbstadjungierter Operator in einem separablen Hilbertraum* H. *Dann existieren eine Familie* $(\mu_i)_{i\in I}$ *endlicher, regulärer Borelmaße auf* $\sigma(A)$ *und ein unitärer Operator* $U\colon H \to \bigoplus_{j\in J}{}_{\ell^2} L^2(\sigma(A), \mu_i)$ *mit* $UAU^{-1} = M_x$. *Hier bezeichnet* M_x *wieder die Multiplikation mit der identischen Abbildung auf* $\sigma(A)$.

24.8 Beispiel. Durch $D(A) = H^1(\mathbb{R})$, $Af = if'$, wird ein Operator im $L^2(\mathbb{R})$ gegeben. Er ist selbstadjungiert. Das zum Spektralsatz gehörige Diagramm ist

$$\begin{array}{ccc} D(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & D(M_\lambda) \\ {\scriptstyle A}\big\downarrow & & {\scriptstyle M_\lambda}\big\downarrow \\ L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{R}), \end{array}$$

denn $\mathcal{F}(f')(\xi) = -i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$.