Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 05.04.2019

Blatt 1

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. (10P) Es sei β eine stetige Sesquilinearform auf dem Hilbertraum H und es sei $T \in L(H)$ der durch
$$\beta(x, y) = (x, Ty)\,, \quad x, y \in H$$
definierte Operator. Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn T invertierbar ist, dann ist β koerziv.

2. (10P) Es sei E ein Banachraum und es sei $\beta\colon E \times E \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform. Zeigen Sie, dass β genau dann stetig ist, wenn es $C > 0$ gibt, so dass
$$|\beta(u, v)| \leq C\|u\|\|v\| \quad \text{für alle } u, v \in E.$$
Hinweis: Es handelt sich um den Beweis von Lemma 1.2. Es genügt nicht, lediglich dieses Lemma zu zitieren.

3. (10P) Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von Lax-Milgram den folgenden Spezialfall des Satzes 2.15

   Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und in einem Streifen enthalten und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$. Dann besitzt für jedes $g \in L^2(\Omega)$ das Randwertproblem
$$\begin{aligned} \Delta u - fu &= g \qquad && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{in } \partial\Omega \end{aligned}$$
   eine schwache Lösung.

4. (10P) Es sei $v \in L^2[0,1]$. Dann wird durch $u \mapsto (u, v)_{L^2[0,1]}$ eine stetige Linearform auf $H_0^1[0,1]$ gegeben. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt die Existenz eines $w \in H_0^1[0,1]$, so dass
$$(u, v)_{L^2[0,1]} = (u, w)_{H_0^1[0,1]} \quad \text{für alle } u \in H_0^1[0,1].$$
Bestimmen Sie dieses w.

Abgabe: Fr, 12.04.2019, zu Beginn der Vorlesung **Besprechung:** 15. April