Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 14.06.2019

Blatt 10

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. Es sei Γ eine Fuchssche Gruppe. Ein Element $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ heißt
   - *elliptisch,* wenn es genau ein $z \in \mathbb{H}$ mit $\gamma.z = z$ gibt,
   - *parabolisch,* wenn es genau ein $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\gamma.z = z$ gibt,
   - *hyperbolisch,* wenn es $z, w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $z \neq w$, $\gamma.z = z$ und $\gamma.w = w$ gibt.

   (a) (6P) Zeigen Sie, dass $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ genau dann elliptisch ist, wenn $|a+d| < 2$.

   (b) (4P) Charakterisieren Sie parabolische und hyperbolische Elemente ebenfalls durch ihre Spur.

2. (10P) Es sei Γ eine Fuchssche Gruppe und es sei $D_w(\Gamma)$ das Dirichletgebiet zu einem Punkt w, der selber kein Fixpunkt eines Gruppenelements ist. Es sei aber $z \in D_w(\Gamma)$ Fixpunkt eines $\gamma \in \Gamma$. Zeigen Sie $z \in \partial D_w(\Gamma)$.

3. (10P) Bestimmen Sie alle elliptischen Elemente der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, deren Fixpunkt auf dem Rand des Dirichletgebiets $D_{2i}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ liegt.

   Hinweis: Verwenden Sie nicht Aufgabe 1, sondern Lemma 15.7

4. (10P) Bestimmen Sie ein konvexes Fundamentalgebiet der Heckesche Kongruenzgruppe $\Gamma_0(2)$.

   Hinweis: Wegen $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(2)] = 3$ (das sollen Sie aber zeigen), erhält man ein Gebiet, welches aus drei Kopien des Dirichletgebiets der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ besteht.

   Zusatzaufgabe: (0P) Bestimmen Sie ein konvexes Fundamentalgebiet von $\Gamma_0(2)$, welches zusätzlich noch symmetrisch zur y-Achse ist.

Abgabe: Fr, 21.06.2019, zu Beginn der Vorlesung **Besprechung:** 24. Juni