Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 21.06.2019
Blatt 11

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. Die Gruppe Γ operiere auf der Menge M. Der *Stabilisator* eines Elements $z \in M$ ist definiert als
$$\Gamma_z := \{\gamma \in \Gamma | \gamma.z = z\}\,.$$
   (a) (4P) Bestimmen Sie den Stabilisator Γ_∞ für die Modulgruppe $\Gamma := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.
   (b) (6P) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Stabilisator Γ_0 für die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma := \Gamma(n)$.

2. Sei $\Gamma \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Gruppe und sei $\sigma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Setze $B = \{\sigma\gamma\sigma^{-1} \mid \gamma \in \Gamma\}$. Es ist klar, dass B eine Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ist.
   (a) (1P) Geben Sie einen Gruppenisomorphismus zwischen B und Γ an.
   (b) (2P) Zeigen Sie, dass B genau dann eine Fuchssche Gruppe ist, wenn Γ eine Fuchssche Gruppe ist.
   (c) (2P) Seien nun B und Γ Fuchssche Gruppen. Zeigen Sie, dass B genau dann von erster Art ist, wenn Γ von erster Art ist.
   (d) (5P) Sei nun Γ eine Fuchssche Gruppe mit Fundamentalpolygon F. Zeigen Sie, dass σF ein Fundamentalpolygon für B ist.

3. Es sei Γ eine Fuchssche Gruppe.
   (a) (5P) Es sei z Fixpunkt eines parabolischen Elements. Zeigen Sie, dass sein Stabilisator Γ_z außer der Identität nur parabolische Elemente enthält.
   Hinweis: Verwenden Sie Satz 17.28.
   (b) (5P) Zeigen Sie: Falls für $b_1 \neq 0$ und $b_2 \neq 0$ die Matrizen
$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Elemente von Γ sind, so gilt
$$\inf \{mb_1 + nb_2 | m, n \in \mathbb{Z},\, mb_1 + nb_2 > 0\} > 0.$$

4. (10P) Die Fuchssche Gruppe Γ besitze ein parabolisches Element. Zeigen Sie, dass es eine zu Γ isomorphe Gruppe B gibt, so dass für den Stabilisator B_∞ gilt
$$B_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| m \in \mathbb{Z} \right\}.$$
   Hinweis: Verwenden Sie Aufgaben 2 und 3.

Abgabe: Fr, 28.06.2019, zu Beginn der Vorlesung **Besprechung:** 1. Juli