Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 28.06.2019

Blatt 12

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. (10P) Es sei $\Gamma \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Fuchssche Gruppe mit $\Gamma_\infty = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | m \in \mathbb{Z}\}$. Ferner seien $\gamma := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\eta := \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ t & u \end{smallmatrix}\right)$ Elemente von Γ, derart dass γ, η und $\gamma\eta^{-1}$ nicht in Γ_∞ liegen. Zeigen Sie
$$\left|\frac{u}{t} - \frac{d}{c}\right| \geq \frac{1}{|ct|}.$$
Hinweis: Betrachten Sie $\gamma\eta^{-1}$.

2. Für diese und die folgenden Aufgaben benutzen wir ohne Beweis das folgendes Ergebnis (siehe Iwaniec, § 2.2):

   Sei $\Gamma \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Fuchssche Gruppe mit $\Gamma_\infty = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | m \in \mathbb{Z}\}$. Wir setzen $F_\infty := \left\{z \in \mathbb{H} \middle| |\mathrm{Re}\, z| \leq \frac{1}{2}\right\}$. Dann wird durch
   $$F := \overline{\{z \in F_\infty | \mathrm{Im}\, z > \mathrm{Im}\, \gamma.z \text{ für alle } \gamma \in \Gamma,\ \gamma \notin \Gamma_\infty\}}$$
   ein Fundamentalgebiet für Γ gegeben.

   (5P) Zeigen Sie:
   $$F = \overline{\left\{z \in F_\infty \middle| |cz + d| > 1 \text{ für alle } \gamma := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma,\ \gamma \notin \Gamma_\infty\right\}}.$$

3. Es sei $\Gamma \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Fuchssche Gruppe mit $\Gamma_\infty = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | m \in \mathbb{Z}\}$ und es sei $z = x + iy \in F$ für F wie in Aufgabe 2. Sei schließlich $Y \in]0, 1]$ gegeben. Immer wenn im Folgenden von γ die Rede ist, seien a, b, c, d definiert durch $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ und $c \geq 0$.

   (a) (5P) Sei $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \notin \Gamma_\infty$, mit $\mathrm{Im}\, \gamma.z > Y$. Zeigen Sie
   $$y > Y, \quad c < C := \frac{1}{\sqrt{yY}} \quad \text{und} \quad |cx + d| < \sqrt{\frac{y}{Y}}.$$

   (b) (5P) Für $n \in \mathbb{N}$ sei ν_n die Anzahl der Nebenklassen $[\gamma] \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma$ mit $2^{-n}C \leq c < 2^{1-n}C$ und $\mathrm{Im}\, \gamma.z > Y$. Zeigen Sie
   $$\nu_n \leq 3 + \frac{10}{2^n Y}.$$
   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1 und Lemma 19.7.

   (c) (5P) Sei $N(Y)$ die Anzahl der Nebenklassen $[\gamma] \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma$ mit $\mathrm{Im}\, \gamma.z > Y$. Zeigen Sie
   $$N(Y) \leq \frac{10}{Y} + 3 - 3 \log_2 Y.$$

4. (10P) Sei $\varphi\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ messbar. Zeigen Sie: Wenn es $C > 0$ gibt, so dass

$$|\varphi(y)| \leq \frac{Cy}{(\log y)^2}, \quad 0 < y \leq 1,$$

so konvergiert für jedes $R > 0$ die gewichtete Eisenstein-Reihe

$$\mathcal{E}_\infty(z,\varphi) = \sum_{[\gamma]\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \varphi(\operatorname{Im}\gamma.z)$$

gleichmäßig auf $\{\operatorname{Im} z \leq R\}$.

Hinweis: Um Aufgabe 3 einbringen zu können, muss die Reihe $\sum_{[\gamma]\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}$ geschickt aufgespalten werden.

Abgabe: Fr, 05.07.2019, zu Beginn der Vorlesung **Besprechung:** 8. Juli