Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 12.04.2019
Blatt 2

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. (10P) Der Operator A in $H = L^2[0,1]$ sei definiert durch $D(A) = C^2[0,1]$ und $Af = -f''$. Zeigen Sie, dass A nicht symmetrisch ist.

2. (10P) Es sei A ein koerziver Operator im Hilbertraum H und es sei A_F seine Friedrichs-Erweiterung. Zeigen Sie, dass Bild $A_F = H$.

   Hinweis: Es handelt sich um die Aussage von Lemma 3.9. Zum Beweis können nur Aussagen herangezogen werden, die nicht auf Lemma 3.9 aufbauen.

3. (10P) Zeigen Sie, dass
$$\{u \in C^2[0,1] \big| u'(0) = u'(1) = 0\}$$
   dicht in $H^1[0,1]$ ist.

   Hinweis: Es darf verwendet werden, dass $C^\infty([0,1])$ dicht in $H^1[0,1]$ ist, siehe beispielsweise Theorem 16.18 der Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen im Winter 2017/18.

4. Sei $\nu > 0$.

   (a) (4P) Das d'Alembertsche Reduktionsverfahren erlaubt es für lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, aus einer bekannten Lösung eine weitere, linear unabhängige zu berechnen. Rechnen Sie nach, dass das d'Alembertsche Reduktionsverfahren zu der Lösung
$$\varphi_\nu(x) = -J_\nu(x) \int_x^\epsilon \frac{dt}{tJ_\nu^2(t)}, \quad 0 < x < \epsilon,$$
   führt, wenn man $\epsilon > 0$ hinreichend klein wählt.

   (b) (2P) Sei $\delta > 0$ beliebig. Zeigen Sie, dass es $\epsilon > 0$ gibt, so dass
$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}(1-\delta) \le J_\nu(x) \le \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}(1+\delta),$$
$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \frac{\nu}{2\Gamma(\nu+1)}(1-\delta) \le J_\nu'(x) \le \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \frac{\nu}{2\Gamma(\nu+1)}(1+\delta),$$
   für $0 < x < \epsilon$.

   Achtung: ϵ ist nicht gleichmäßig in ν.

   (c) (4P) Sei H_E der energetische Raum zu B_ν. Zeigen Sie $\varphi_\nu \notin H_E$.

Abgabe: Fr, 26.04.2019, zu Beginn der Vorlesung **Besprechung:** 29. April