Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 03.05.2019
Blatt 4

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. (10P) Es sei u die in Beispiel 8.1 konstruierte Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && \text{in } \Omega, \\ u(r,\varphi) &= \begin{cases} 0, & 0 \le r < 1, \\ \sin\left(\frac{2}{3}\varphi + \frac{\pi}{3}\right), & r = 1, \end{cases} && (r,\varphi) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie $u \notin H^2(\Omega)$, indem Sie zeigen, dass $u_{xx} \notin L^2(\Omega)$.

2. Es sei $\chi \in \mathcal{D}(B_1(0))$ eine nur von $|(x,y)|$ abhängige Funktion mit $\chi(x,y) = 1$ für $|(x,y)| \le \frac{1}{2}$, es sei u wie in Aufgabe 1 und es sei $v := u\chi$. Zeigen Sie

   (a) (5P) $\Delta v \in L^2(\Omega)$.

   (b) (5P) Offenbar löst v das Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta w &= \Delta v && \text{in } \Omega, \\ w &= 0 && \text{in } \partial\Omega. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $v \notin H^2(\Omega)$.

3. (10P) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $e_n \in L^2[0,1]$ gegeben durch $e_n(x) = \sqrt{2}\sin(\pi n x)$. Zeigen Sie, dass $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis des $L^2[0,1]$ ist.

   Hinweis: Konstruieren Sie hilfsweise eine Orthonormalbasis von

$$E := \left\{ f \in L^2[-1,1] \,\middle|\, \forall x : f(-x) = -f(x) \right\}.$$

4. (10P) Zeigen Sie, dass

$$H_0^1[0,1] = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\pi n x) \,\middle|\, (n a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \right\}.$$

   Hinweis: Es ist à priori nicht klar, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\pi n x)$ in $H_0^1[0,1]$ konvergiert. Verwenden Sie partielle Integration, um das Problem zu umgehen.

Abgabe: Fr, 10.05.2019, zu Beginn der Vorlesung **Besprechung:** 13. Mai