Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 10.05.2019
Blatt 5

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. (10P) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, für welches die Greenschen Formeln gelten, und es sei $N(R)$ die Zählfunktion der Eigenwerte des Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingungen auf Ω. Es sei $\rho > 0$ und es sei $\widetilde{N}$ die entsprechende Zählfunktion für $\widetilde{\Omega} := \rho\Omega$. Drücken Sie $\widetilde{N}(R)$ durch $N(R)$ aus.

   Hinweis: Damit ist eine Formel der Form $\widetilde{N}(R) = N(\alpha(R))$ gemeint.

   Es ist bekannt, dass große Trommeln tiefere Töne haben als kleine Trommeln derselben Form. Diese Aussage soll quantifiziert werden, und zwar für alle Dimensionen.

2. (10P) Es sei $Q = [0,1]^2$. Aus Blatt 4 wissen wir, dass jedes $u \in L^2(Q)$ eine Fourierreihenentwicklung der Form

$$u(x,y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} 2a_{k,m} \sin(\pi k x) \sin(\pi m y)$$

   besitzt, so dass $(a_{k,m})_{(k,m)\in\mathbb{N}^2} \in \ell^2(\mathbb{N}^2)$. Zeigen Sie, dass u genau dann in $H^2(Q) \cap H_0^1(Q)$ liegt, wenn $(a_{k,m}(m^2 + k^2))_{k,m\in\mathbb{N}^2} \in \ell^2(\mathbb{N}^2)$.

3. (10P) Es sei $Q = [0,1]^2$, es sei $f \in L^2(Q)$ und es sei u die schwache Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \text{in } Q, \\ u &= 0, \quad \text{in } \partial Q. \end{aligned}$$

   Verwenden Sie Aufgabe 2, um $u \in H^2(Q) \cap H_0^1(Q)$ zu zeigen.

4. (a) (3P) Zeigen Sie für $\nu \in \mathbb{C}$ und $x > 0$ die erste der beiden folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \\ J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= 2J'_\nu(x). \end{aligned}$$

   Hinweis: Zur Bearbeitung der Aufgabe werden beide Formeln benötigt. Da beide Beweise sehr ähnlich sind, genügt es, einen davon durchzuführen.

   (b) (3P) Zeigen Sie für $\nu \in \mathbb{Q}$ und $m \in \mathbb{N}$ die Existenz von Funktionen $P_m, Q_m \in \mathbb{Q}(X)$, so dass

$$J_{\nu+m}(x) = J_\nu(x)P_m(x) + J_{\nu-1}(x)Q_m(x).$$

   Hinweis: $\mathbb{Q}(X)$ ist der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{Q}[X]$.

   (c) (4P) Seien $\nu \in \mathbb{Q}$ und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn $x > 0$ eine gemeinsame Nullstelle von J_ν und $J_{\nu+m}$ ist, dann ist x algebraisch.
   Hinweis: $x \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, wenn x Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist. Das im Beweis von Theorem 9.4 zitierte Resultat von Siegel wird nicht benötigt.

Abgabe: Fr, 17.05.2019, zu Beginn der Vorlesung **Besprechung:** 20. Mai