Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 17.05.2019
Blatt 6

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. (10P) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge, für welche die Greenschen Formeln gelten und es seien $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf Ω mit Neumann-Randbedingungen; dabei werden die Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachhheit aufgezählt. Zeigen Sie, dass μ_2 genau dann positiv ist, wenn Ω ein Gebiet ist.

2. (10P) Sei A ein koerziver Operator in einem unendlich-dimensionalen Hilbertraum H. Die Einbettung $H_E \hookrightarrow H$ der energetischen Erweiterung H_E nach H sei kompakt. Es seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Eigenwerte der Friedrichs-Erweiterung A_F, wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit aufgezählt wird und es sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H mit $A_F u_n = \lambda_n u_n$. Zeigen Sie
$$\lambda_n = \inf\big\{(x,x)_E \;\big|\; x \in H_E,\ \|x\|_H = 1,\ (x,u_1)_H = \dots = (x,u_{n-1})_H = 0\big\}.$$

3. Die Version von Theorem 9.1 für die Neumann-Randbedingung lautet:

   Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet, für welches die Greenschen Formeln gelten. Dann gibt es eine unbeschränkte, monoton wachsende Folge $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ und ein in $L^2(\Omega)$ vollständiges Orthogonalsystem $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $u_n \in C^\infty(\Omega)$ mit $\Delta u_n = -\lambda u_n$ und $(\nabla u_n, \nu) = 0$ für alle Randpunkte, in denen die äußere Normale ν existiert.

   (a) (3P) Sei nun $\Omega =]0,a[\times]0,b[$. Bestimmen Sie durch Separationsansatz ein System $(u_{n,m})_{n,m}$ von Eigenfunktionen von $-\Delta$ mit Neumann-Randbedingungen.

   (b) (7P) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte gefunden wurden, indem Sie zeigen, dass die $(u_{n,m})_{n,m}$ ein vollständiges Orthogonalsystem bilden.
   Hinweis: Gehen Sie ähnlich vor wie bei Aufgabe 3 von Blatt 4.

4. (10P) Sei $Q :=]0,a[\times]0,b[\subset \mathbb{R}^2$ und sei $N(R)$ die Zählfunktion der Eigenwerte des Laplace-Operators mit Neumann-Randwerten wie in Definition 11.1. Zeigen Sie
$$\lim_{R\to\infty} \frac{N(R)}{R} = \frac{ab}{4\pi}.$$

Abgabe: Fr, 24.05.2019, zu Beginn der Vorlesung **Besprechung:** 27. Mai