Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 24.05.2019
Blatt 7

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. Wir definieren den Laplace-Beltrami Operator auf dem Torus als Operator A im Hilbertraum $L^2([0,1]^2)$ wie folgt

$$D(A) = \left\{u \in C^2([0,1]^2) \middle| \forall x, y \in \mathbb{R} : u(x,y) = u(x+1,y) = u(x,y+1)\right\},$$
$$Au = -\Delta u.$$

   (a) (8P) Zeigen Sie, dass $B := \mathrm{id} + A$ eine Friedrichs-Erweiterung B_F besitzt.

   (b) (2P) Zeigen Sie, dass B_F eine kompakte Resolvente besitzt.

2. (10P) Für A und B_F wie in Aufgabe 1 sei $A_F := B_F - \mathrm{id}$. Es seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ die Eigenwerte von A_F und es sei

$$N(R) := \#\{j | \lambda_j \leq R\}.$$

   Zeigen Sie, dass für alle $R > 0$

$$N_D(R) \leq N(R) \leq N_N(R),$$

   wobei $N_D(R)$ und $N_N(R)$ die in Definition 11.1 erklärten Zählfunktionen für die Eigenwerte des Laplace-Operators mit Dirichlet bzw. Neumann-Randbedingungen sind.

3. Sei H ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum, sei $U \subset H$ ein Unterraum der Dimension N, und sei $P \in L(H)$ die orthogonale Projektion auf U. Gegeben sei ein selbstadjungierter, kompakter Operator $A \in L(H)$ mit positiven Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$. Schließlich sei $B = P \circ A \circ P$.

   (a) (2P) Zeigen Sie, dass B keine negativen Eigenwerte hat.

   (b) (3P) Die Eigenwerte von B seien $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots$. Zeigen Sie $\mu_{N+1} = 0$.

   (c) (5P) Vergleichen Sie λ_n und μ_n für $1 \leq n \leq N$.
   Hinweis: Sie zeigen entweder $\lambda_n \leq \mu_n$ für alle n oder Sie zeigen $\lambda_n \geq \mu_n$ für alle n oder Sie geben einen Operator A, einen Unterraum U sowie $n, m \in \{1, \ldots, N\}$ an, so dass $\lambda_n > \mu_n$ und $\lambda_m < \mu_m$.
   Nach Satz 13.7 der Einführung in die Funktionalanalysis sind orthogonale Projektionen selbstadjungiert.

4. (10P) Betrachten Sie für den Kern $k \in C([0,1]^2)$, $k(s,t) = |s-t|$, den Integraloperator $T_k \in L(L^2[0,1])$. Zeigen Sie, dass T_k nicht positiv ist.

   Hinweis: Wenn T_k positiv wäre, könnten Sie den Satz von Mercer anwenden. Was würde das für die Eigenwerte bedeuten?

Abgabe: Fr, 31.05.2019, zu Beginn der Vorlesung **Besprechung:** 3. Juni