Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 31.05.2019
Blatt 8

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. Sei $Q =]0,3[\times]0,1[$ und sei $f \in L^2(Q)$. In der Vorlesung wurde erklärt, dass $u \in H_0^1(Q)$ eine schwache Lösung von $-\Delta u = f$ ist, wenn $\int_Q \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \int_Q f\,\overline{v}$ für alle $v \in H_0^1(Q)$. Sei

$$u(x,y) = \begin{cases} \sin(\pi x)\sin(\pi y), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) (3P) Zeigen Sie $u \in H_0^1(Q)$.

   (b) (3P) Bestimmen Sie ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $\int_Q \langle \nabla u, \nabla w \rangle = \lambda \int_Q u\,\overline{w}$ für alle $w \in H_0^1(Q)$ mit $w|_{]1,3[\times]0,1[} = 0$.

   (c) (4P) Zeigen Sie, dass u keine schwache Lösung der Gleichung $-\Delta u = \lambda u$ ist, also erst recht keine Eigenfunktion.

2. (10P) Es sei ρ die hyperbolische Metrik. Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{H}$ und jedes $r > 0$ der hyperbolische Kreis $\{w \in \mathbb{H} | \rho(z,w) = r\}$ auch im euklidischen Sinn ein Kreis ist.

Abgabe: Fr, 07.06.2019, zu Beginn der Vorlesung **Besprechung:** 17. Juni