

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. Es sei ρ die hyperbolische Metrik auf \mathbb{H} .

(a) (4P) Zeigen Sie

$$\rho(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$$

(b) (3P) Zeigen Sie: Wenn σ eine Metrik auf einem Raum X ist, dann ist auch $(x, y) \mapsto \tanh(\sigma(x, y))$ eine Metrik auf X , welche dieselbe Topologie induziert.

(c) (3P) Zeigen Sie, dass durch

$$\rho_0(z, w) := \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|$$

eine Metrik auf \mathbb{H} gegeben wird, welche dieselbe Topologie induziert wie die hyperbolische Metrik und für die gilt

$$\rho_0(z, w) = \rho_0(g(z), g(w)), \quad z, w \in \mathbb{H}, g \in \text{Aut}(\mathbb{H}).$$

2. (10P) In der Vorlesung wird ohne Beweis angegeben, dass

$$[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = N^3 \prod_{p|N} (1 - p^{-2}).$$

Zeigen Sie diese Aussage im Spezialfall $N = 2$, nämlich $[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(2)] = 6$.

Hinweis: Wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, dann können a, b, c, d nicht allesamt gerade, aber auch nicht allesamt ungerade sein. Das führt zu Fallunterscheidungen. Für jeden Fall ist dann eine Matrix anzugeben.