Funktionalanalysis II

Rüdiger W. Braun

Sommersemester 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Der Satz von Lax-Milgram

Der Satz von Lax-Milgram ist Übungsaufgabe 7.5 im Grundkurs [12] von Kaballo.

1.1 Definition. Eine Abbildung $\beta\colon E \times E \to \mathbb{K}$ ist eine *Bilinearform,* wenn sie in beiden Komponenten bilinear ist, und eine *Sesquilinearform,* wenn sie in der ersten Komponente linear und in der zweiten konjugiert linear ist.

1.2 Lemma. *Es sei* E *ein Banachraum und* $\beta\colon E \times E \to \mathbb{K}$ *eine Bilinearform oder eine Sesquilinearform. Sie ist genau dann stetig, wenn es ein* $C > 0$ *gibt, so dass*

$$|\beta(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|.$$

1.3 Definition. Eine Bilinear- oder Sesquilinearform β heißt *koerziv,* wenn es $\gamma > 0$ gibt, so dass $|\beta(u, u)| \geq \gamma\|u\|^2$ für alle $u \in E$.

1.4 Theorem. *Es sei* H *ein Hilbertraum und es sei* β *eine stetige Sesquilinearform auf* H*. Dann gibt es genau eine Abbildung* $T\colon H \to H$*, so dass*

$$\beta(x, y) = (x, Ty)$$

für alle $x, y \in H$*. Dieses* T *liegt in* $L(H)$ *und es gilt* $\|T\| = \sup\{|\beta(x, y|\|\|x\|, \|y\| \leq 1\}$.

Wenn β *koerziv ist, dann ist* T *invertierbar.*

1.5 Korollar (Lax-Milgram). *Es sei* β *eine stetige und koerzive Sesquilinearform auf dem Hilbertraum* H*. Zu jeder stetigen Linearform* $\varphi\colon H \to \mathbb{K}$ *existiert ein eindeutig bestimmtes* $y \in H$*, so dass* $\beta(x, y) = \varphi(x)$ *für alle* $x \in H$*.*

2 Soboleworäume

2.1 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex und sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann heißt $g \in L^2(\Omega)$ *schwache Ableitung* von f, wenn

$$\langle g, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f, \varphi^{(\alpha)} \right\rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Wir schreiben dann $D^\alpha f$ oder $f^{(\alpha)}$ für g.

2.2 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) $H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid$ für alle α mit $|\alpha| \leq m$ existiert die schwache Ableitung $D^\alpha f$ in $L^2(\Omega)\}$.

(b) $(f, g)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)$ für $f, g \in H^m(\Omega)$.

(c) $H_0^m(\Omega)$ ist der Abschluß von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^m(\Omega)$.

Die Räume $H^m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$ heißen *Sobolewräume*.

2.3 Satz (Einf. in die Partiellen Differentialgleichungen Satz 16.7). *$H^m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$ sind Hilberträume.*

2.4 Satz. *Sei $f \in L^2[a, b]$. Dann wird durch $F(x) = \int_a^x f \, d\lambda_1$ ein $F \in H^1[a, b]$ gegeben, dessen schwache Ableitung gleich f ist.*

Das soll in der Übung gezeigt werden.

2.5 Theorem (Sobolew-Lemma, Einf. Theorem 17.1). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $m, k \in \mathbb{N}_0$ mit $m > k + \frac{n}{2}$. Zu jedem $f \in H^m(\Omega)$ existiert ein Repräsentant in $C^k(\Omega)$.*

2.6 Theorem (Einf. pDgl. Theorem 16.22). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand. Dann existiert eine stetige lineare Abbildung $T \colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ mit $T(f) = f_{\partial\Omega}$ für jedes $f \in C^1(\overline{\Omega})$.*

Sie Abbildung T heißt *Spurabbildung*.

2.7 Theorem (Einf. pDgl. Theorem 16.30). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand. Sei $T\colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ die Spurabbildung. Dann $H^1_0(\Omega) = \ker T$.*

2.8 Beispiel. $H^1[a,b] \subset C[a,b]$ und $H^1_0[a,b] = \{f \in H^1[a,b] \mid f(a) = f(b) = 0\}$. Durch nochmalige Anwendung erhält man beispielsweise, dass $H^2[a,b] \subset C^1[a,b]$ und $H^2_0[a,b] = \{f \in H^2[a,b] \mid f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\}$.

2.9 Theorem (Rellichscher Einbettungssatz, Einf. FA Theorem 17.3). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen und sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Einbettung $H_0(\Omega) \to H^{m-1}_0(\Omega)$ kompakt.*

2.10 Theorem (Einf. FA Korollar 17.15). *Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge mit C^∞-Rand ist, dann ist die Einbettung $H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ kompakt.*

Stärkere Versionen dieser Sätze mit schwächeren Voraussetzungen an die Regularität des Randes findet man in dem Buch [9] von Grisvard.

Die Formulierung der Poincaré-Ungleichung stammt aus dem Buch [20] von Renardy und Rogers.

2.11 Theorem (Poincaré-Ungleichung). *Für ein $d > 0$ sei Ω eine offene Teilmenge des Streifens $\{x \in \mathbb{R}^n \| x_1| < d\}$. Dann gilt für jedes $u \in H^1_0(\Omega)$*

$$\|u\|^2_{L^2} \leq 4d^2 \int_\Omega (\nabla u, \nabla u)\, d\lambda_n.$$

2.12 Korollar. *Falls Ω in einem Streifen liegt, so ist die Sesquilinearform $\beta(u,v) := \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, d\lambda_n$ koerziv als Sesquilinearform auf $H^1_0(\Omega)$.*

Wir wiederholen die Greenschen Formeln aus der Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen (Theorem 16.26).

2.13 Theorem. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit glattem Rand und seien $f, g \in H^2(\Omega)$ und $h \in H^1(\Omega)$. Dann*

(a)

$$\int_\Omega h\, \Delta\overline{g}\, d\lambda_n = -\int_U (\nabla h, \nabla g)\, d\lambda_n + \int_{\partial U} h\, (\nabla\overline{g}, \nu)\, d\sigma.$$

(b)

$$\int_\Omega (f\, \Delta g - g\, \Delta f) d\lambda_n = \int_{\partial U} (f\, (\nabla g, \nu) - g\, (\nabla f, \nu))\, d\sigma.$$

Dieser Satz gilt auch, wenn der Rand nur fast überall glatt ist, beispielsweise, wenn U ein Polygon ist. Eine präzise Formulierung findet man in Kaballo [12], §20.

2.14 Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit glattem Rand. Für $f, g \in C(\Omega)$ sei $u \in C^2(\Omega)$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u - fu = g \quad & \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad & \text{in } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dann gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega g\overline{\varphi}\, d\lambda_n = \int_\Omega \Delta(u)\overline{\varphi}\, d\lambda_n - \int_\Omega fu\overline{\varphi}\, d\lambda_n = -\int_\Omega (\nabla u, \nabla\varphi)\, d\lambda_n - \int_\Omega fu\overline{\varphi}\, d\lambda_n.$$

Wir sagen, dass $u \in H_0^1(\Omega)$ eine *schwache Lösung* von (2.1) ist, wenn für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega g\overline{\varphi}\, d\lambda_n = -\int_\Omega (\nabla u, \nabla\varphi)\, d\lambda_n - \int_\Omega fu\overline{\varphi}\, d\lambda_n.$$

Das macht dann auch Sinn für $f, g \in L^2(\Omega)$ und beliebige Randregularität.

2.15 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und in einem Streifen enthalten und sei $f \in L^2(\Omega)$ komplexwertig mit $\operatorname{Re} f(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$. Für jedes $g \in L^2(\Omega)$ besitzt das Randwertproblem (2.1) eine schwache Lösung.*

3 Die Friedrichssche Erweiterung

Die Friedrichssche Erweiterung stellt eine Methode dar, zu einem (unbeschränkten) symmetrischen Operator eine selbstadjungierte Erweiterung zu konstruieren, ohne dass man dessen Definitionsbereich à priori erraten haben muss. Die Friedrichssche Erweiterung eignet sich vor allem für elliptische Operatoren.

Die Vorlesung orientiert sich an Chapter 19 von Zeidler [27].

3.1 Definition. Sei A ein symmetrischer Operator im Hilbertraum H. A heißt *monoton,* wenn $(Ax, x) \geq 0$ für alle $x \in H$ und *koerziv*, wenn die Sesquilinearform $(u, v) \mapsto (Au, v)$ koerziv ist.

3.2 Definition. A sei ein koerziver Operator im Hilbertraum H. Durch

$$(u, v)_E = (Au, v), \quad u, v \in D(A),$$

wird ein Skalarprodukt auf $D(A)$ erklärt. Die Vervollständigung von $(D(A), \|\cdot\|_E)$ ist ein Hilbertraum, der als *energetischer Raum* von A bezeichnet und H_E geschrieben wird.

3.3 Beispiel. In den Beispielen 22.4 und 22.17 hatten wir den Operator $A\colon f \mapsto if'$ studiert. Auf dem Definitionsbereich $D(A) = H_0^1[0,1]$ ist er symmetrisch, auf dem Definitionsbereich $D(A) = \left\{f \in H^1[0,1] \middle| f(0) = f(1)\right\}$ sogar selbstadjungiert.

In beiden Fällen ist der Operator nicht koerziv.

3.4 Lemma. *Sei A ein koerziver Operator im Hilbertraum H. Die Einbettung $D(A) \hookrightarrow H$ setzt sich zu einer stetigen Einbettung $H_E \hookrightarrow H$ fort.*

3.5 Beispiel. Sei $H = \ell^2$ und sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende, unbeschränkte Folge in $]0, \infty[$. Der Operator A in H sei gegeben durch $D(A) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathbb{K}$ und $A((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Er ist koerziv. Es gilt

$$((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}})_E = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \overline{y}_n.$$

Der energetische Raum von A ist also

$$H_E = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \left(\sqrt{\lambda_n}\, x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\right\} \subset H.$$

3.6 Definition. Für einen koerziven Operator A setzt man

$$D(A_F) := \{u \in H_E | x \mapsto (x, u)_E \text{ stetig in } H\}.$$

Wegen des Rieszschen Darstellungssatzes und der Dichtheit von H_E in H existiert zu $u \in H_E$ ein eindeutig bestimmtes $A_F u \in H$, so dass $(v, u)_E = (v, A_F u)_H$ für alle $v \in H_E$. Der Operator A_F ist die *Friedrichs-Erweiterung* von A.

3.7 Lemma. A_F *ist tatsächlich eine Erweiterung von* A.

3.8 Beispiel. Betrachte den Operator $f \mapsto -f''$ in $L^2[0,1]$. Wir konstruieren die Friedrichssche Erweiterung für den Definitionsbereich $D(A) = \mathscr{D}(0,1)$. Dann gilt für $f, g \in D(A)$

$$(f, g)_E = -\int_0^1 f''\overline{g} = \int_0^1 f'\overline{g}'.$$

Für $u \in D(A)$ gilt insbesondere also $(Au, u) = \|u'\|_2^2$. Aus der Poincaré-Ungleichung folgt, dass A koerziv ist. Wir haben außerdem gesehen, dass die energetische Norm äquivalent zur Norm des Sobolewraums $H^1[0,1]$ ist. Das bedeutet $H_E = H_0^1[0,1]$.

Für $u \in D(A_F)$ sei $f = A_F u \in L^2[0,1]$. Für beliebiges $\varphi \in D(A)$ bedeutet dies

$$-\int_0^1 \varphi''\overline{u}\, d\lambda_1 = \int_0^1 \varphi'\overline{u}'\, d\lambda_1 = (\varphi, u)_E = (\varphi, A_F u)_{L^2} = (\varphi, f)_{L^2} = \int_0^1 \varphi\overline{f}\, d\lambda_1.$$

Also ist $-f$ die zweite distributionelle Ableitung von u und daher $u \in H^2[0,1]$. Wir haben gezeigt

$$D(A_F) \subseteq H^2[0,1] \cap H_0^1[0,1].$$

Um die Gleichheit zu zeigen, integriert man einmal partiell.

3.9 Lemma. Bild $A_F = H$.

3.10 Theorem (Friedrichs (1934)). *Sei* A *ein koerziver Operator in einem Hilbertraum* H*. Dann ist seine Friedrichssche Erweiterung selbstadjungiert.*

3.11 Beispiel. Wie variieren Beispiel 3.8 zu $D(A) = \{u \in C^2[0,1] \mid u'(0) = u'(1) = 0\}$ und $Au = u - u''$. In diesem Fall

$$(Au, u) = \|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2$$

und daher $H_E = H^1[0,1]$ und $(u,v)_E = \int_0^1 u\bar{v} + \int_0^1 u'\bar{v}'$. Wenn wir $u \in D(A_F)$ haben, dann existiert $f \in L^2[0,1]$ mit $A_F u = f$. Wir werten das zuerst für $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ aus. In diesem Fall

$$\int_0^1 u\varphi + \int_0^1 u'\varphi' = A_E(u)(\varphi) = (f, J\varphi) = \int_0^1 f\varphi.$$

Das bedeutet, dass $u \in H^2[0,1]$ mit $u'' = u - f$ bzw. $A_F u = u - u''$. Für beliebiges $g \in C^2[0,1]$ gilt

$$A_E(u)(g) = \int_0^1 ug + \int_0^1 u'g' = \int_0^1 ug + u'(1)g(1) - u'(0)g(0) - \int_0^1 u''g.$$

Das ist nur dann stetig in der L^2-Norm, wenn $u'(1) = u'(0) = 0$. Wir haben gesehen, dass $D(A_F) = \{u \in H^2[0,1] \mid u'(1) = u'(0) = 0\}$.

3.12 Beispiele. Wir konstruieren jetzt Laplace-Operatoren. Dazu sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, für welches die Greenschen Formeln gelten, z. B. ein glatt berandetes oder ein Polygon.

(a) Wir setzen $D(A) = \mathscr{D}(\Omega)$ und $A = -\Delta$. Dann folgt aus den Greenschen Formeln für $f, g \in D(A)$

$$(f,g)_E = (\nabla f, \nabla g)\,.$$

Wegen der Poincaré-Ungleichung ist das energetische Skalarprodukt äquivalent zum Skalarprodukt auf $H^1(\Omega)$. Daraus folgt $H_E = H_0^1(\Omega)$.

(b) Beim Neumannschen Randwertproblem tritt dass Problem auf, dass $-\Delta$ wegen $\Delta 1 = 0$ nicht koerziv ist. Daher studiert man den Operator $A = \mathrm{id} - \Delta$ auf dem Definitionsbereich $D(A) = \{f \in C^2(\overline{\Omega}) \mid \forall x \in \partial\Omega : (\nabla f, \nu) = 0\}$. In diesem Fall erhält man $H_E \subseteq H^1(\Omega)$.

(c) Die Lösung liegt à priori in $H^1(\Omega)$. Ob sie in einem besseren Raum liegt, wird mit Methoden der Regularitätstheorie untersucht. Wir werden das für elliptische Operatoren zweiter Ordnung tun.

3.13 Beispiel. Für den Operator A aus Beispiel 3.5 gilt

$$D(A_F) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}.$$

4 Kompakte Resolventen

4.1 Definition. Seien H ein Hilbertraum und $A \in K(H)$ selbstadjungiert. Eine *Eigenwertfolge* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von A ist eine Folge aller Eigenwerte von A, derart, dass $(|\lambda_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt. Dabei wird jeder einzelne Eigenwert λ so oft aufgezählt, wie $\dim\ker(\lambda\,\mathrm{id} - A)$ angibt. Falls es nur endlich viele Eigenwerte gibt, wird die Folge durch Nullen aufgefüllt.

4.2 Theorem (Einführung in die Funktionalanalysis, Satz 14.5). *Seien H ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und $A \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Sei ferner $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Eigenwertfolge von A. Dann $\lambda_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner existiert ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H, so dass $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\cdot, e_n)\, e_n$, wobei die Folge in der Operatornorm konvergiert.*

4.3 Theorem. *Sei A ein koerziver Operator in einem Hilbertraum H mit abzählbar unendlicher Dimension. Die Einbettung $H_E \hookrightarrow H$ der energetischen Erweiterung H_E nach H sei kompakt. Dann gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $u_n \in D(A_F)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für jedes n ist u_n ein Eigenvektor von A_F, es gibt also $\lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $A_F u_n = \lambda_n u_n$.

(c) Alle λ_n sind reell mit $\lambda_n \geq c$, wobei c die Konstante aus der Koerzivitätsabschätzung in Definition 3.1 ist.

(d) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

(e) $\sigma(A_F) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

4.4 Satz. *Die Laplace-Operatoren aus Beispiel 3.12 erfüllen die Voraussetzungen von Theorem 4.3.*

5 Besselfunktionen

5.1 Definition. Für $\nu \in \mathbb{C}$ bezeichnet man die Differentialgleichung

$$w'' + \frac{1}{x}w' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) w = 0 \tag{5.1}$$

als *Besselsche Differentialgleichung*. Die Funktion

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(\nu+j+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \,]-\infty, 0],$$

bezeichnet man als *Besselfunktion der Ordnung* ν. Sie löst (5.1).

Literatur zu Besselfunktionen sind die Bücher von Olver [19], Watson [25] und Triebel [23], sowie die Digital Library of Mathematical Functions http://dlmf.nist.gov/.

5.2 Definition. (a) Auf $[0, 1]$ wird durch

$$\mu(E) = \int_E t \, d\lambda_1(t)$$

ein Borelmaß gegeben. Den zugehörigen Hilbertraum $L^2([0, 1], \mu)$ schreiben wir $L^2([0, 1], t)$.

(b) Für $\nu > 0$ wird der *Besselsche Differentialoperator* B_ν als Operator in $H = L^2([0, 1], t)$ wie folgt gegeben:

$D(B_\nu)$ besteht aus allen Funktionen der Form $f(t) = t^\nu u(t)$ mit $u \in C^\infty([0, 1])$ und $u'(0) = u(1) = 0$, und

$$B_\nu(f)(t) = -f''(t) - \frac{1}{t}f'(t) + \frac{\nu^2}{t^2}f(t).$$

5.3 Satz. *Für* $\nu > 0$ *ist* B_ν *ein koerziver Operator.*

5.4 Bemerkung. Der Beweis zeigt $(f, g)_E = \int_0^1 f' t \overline{g}' + \int_0^1 \frac{\nu^2}{t} f\overline{g}$.

5.5 Lemma. *Für* $\nu > 0$ *ist die Einbettung* $H_E \hookrightarrow H$ *kompakt.*

5.6 Lemma. *Sei* $\nu > 0$ *und sei* $u \in D((B_\nu)_F)$*. Dann gilt* $(B_\nu)_F u = -u'' - \frac{1}{t}u' + \frac{\nu^2}{t^2}u$ *im Distributionssinn.*

Ferner besitzt u *eine Punktauswertung in* 1 *und es gilt* $u(1) = 0$*.*

5.7 Satz. u *ist genau dann ein Eigenvektor von* $(B_\nu)_F$ *zum Eigenwert* λ*, wenn* $\sqrt{\lambda}$ *eine Nullstelle von* J_ν *ist und es ein* $A \neq 0$ *gibt, so dass* $u(t) = AJ_\nu(\sqrt{\lambda}t)$*.*

5.8 Bemerkung. Weil $L^2([0,1],t)$ unendlich-dimensional ist, besitzt J_ν für jedes $\nu > 0$ unendlich viele Nullstellen, die sich nicht häufen. Wir bezeichnen sie mit

$$\lambda_1^{(\nu)} < \lambda_2^{(\nu)} < \lambda_3^{(\nu)} < \cdots < \infty.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen linearer Differentialgleichungen sind alle diese Nullstellen einfach. Zwischen je zwei Nullstellen liegt wegen des Satzes von Rolle mindestens eine Nullstelle der Ableitung. Man kann zeigen, dass es genau eine ist (Watson [25], 15·23).

5.9 Satz. *Die Funktionen* $\left(J_\nu(\lambda_n^{(\nu)}t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *bilden ein vollständiges Orthogonalsystem in* $L^2([0,1],t)$*.*

Bemerkung. Triebel [23] behandelt auch den Fall $\nu = 0$. Das Lemma 5.5 macht in diesem Fall Ärger.

6 Elliptische Differentialoperatoren

Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ setzen wir

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

6.1 Definition. Es sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$, es sei $k \in \mathbb{N}$ und es sei

$$L(x, D) := \sum_{|\alpha| \leq 2k} a_\alpha(x) D^\alpha$$

ein Differentialoperator.

(a) L heißt *elliptisch,* wenn

$$(-1)^k \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) \xi^\alpha > 0$$

für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) L heißt *gleichmäßig elliptisch,* wenn es $\theta > 0$ gibt, so dass

$$(-1)^k \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) \xi^\alpha \geq \theta |\xi|^{2k}$$

für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

6.2 Bemerkung. (a) Im Fall $k = 1$ hat L die Gestalt

$$L(x, D) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x).$$

Es sei $A := -(a_{i,j}(x))_{i,j}$. Dann ist L genau dann gleichmäßig elliptisch, wenn es $\theta > 0$ gibt, so dass

$$\xi^T A(x) \xi \geq \theta \|\xi\|^2$$

für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(b) Der negative Laplace-Operator ist gleichmäßig elliptisch.

In $\Omega = \{(x,y)|y > 0\}$ ist der Operator $-y^2\Delta$ elliptisch, aber nicht gleichmäßig elliptisch.

6.3 Definition. Es seien $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ und $b_i, c \in C(\overline{\Omega})$. Der Differentialoperator L zweiter Ordnung ist in *Divergenzform*, wenn

$$L(x,D)u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u. \tag{6.1}$$

6.4 Lemma. *Der Differentialoperator* L *aus* (6.1) *ist genau dann gleichmäßig elliptisch, wenn es* $\theta > 0$ *gibt, so dass*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i a_{i,j}(x)\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

für alle $x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n$*.*

6.5 Bemerkung. Unter den Regularitätsvoraussetzungen an die Koeffizienten aus 6.3 kann man zeigen, dass jeder Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform gebracht werden kann.

6.6 Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, für welches die Greenschen Formeln gelten, es sei L ein Differentialoperator zweiter Ordnung, der in Divergenzform (6.1) geschrieben ist, und es sei $f \in (H_0^1(\Omega))'$. Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ ist eine *schwache Lösung* des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} L(x,D)u &= f, \quad \text{in } \Omega,\\ u &= 0, \quad \text{in } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{6.2}$$

wenn

$$\beta(\cdot, u) = f,$$

wobei β die folgende Sesquilinearform auf $H_0^1(\Omega)$ ist

$$\beta(v,u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a_{i,j}}\frac{\partial v}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}} + \sum_{i=1}^{n} \overline{b_i} v \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} + \overline{c} v \overline{u}\, d\lambda_n.$$

6.7 Bemerkung. Es sei $f \in C(\Omega)$ eine beschränkte Funktion. Wir identifizieren sie via $(f,v) = \int_\Omega v\overline{f}\, d\lambda_n$ mit einer stetigen Linearform auf $H_0^1(\Omega)$. Dann ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$ genau dann eine klassische Lösung von (6.2), wenn u eine schwache Lösung ist.

6.8 Definition. Den Dualraum von $H_0^1(\Omega)$ bezeichnet man mit $H^{-1}(\Omega)$.

6.9 Bemerkung. Aus der zweiten binomischen Formel erhält man sofort für $\epsilon, a, b > 0$

$$ab \le \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2.$$

6.10 Theorem (Gårdingsche Ungleichung). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, es sei L ein gleichmäßig elliptischer, partielle Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform (6.1) und es sei β die zugehörige Sesquilinearform. Die Koeffizientenfunktionen seien beschränkt und messbar. Dann gibt es $\gamma > 0$ und $\lambda_G \ge 0$, so dass für alle $u \in H_0^1(\Omega)$*

$$\beta(u, u) + \lambda_G \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \ge \gamma \|u\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{6.3}$$

6.11 Theorem. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, für welches die Greenschen Formeln gelten und es sei L ein Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform (6.2), welcher die Gårdingsche Ungleichung (6.3) erfüllt. Für jedes $\lambda \ge \lambda_G$ und jedes $f \in H^{-1}(\Omega)$ besitzt das Dirichletproblem*

$$\begin{aligned} L(x, D)u + \lambda u &= f, \quad \textit{in } \Omega, \\ u &= 0, \quad \textit{in } \partial\Omega, \end{aligned}$$

eine eindeutig bestimmte schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$. Für diese Lösung gilt

$$\|u\|_{H^1} \le C \|f\|_{H^{-1}}$$

für eine von f unabhängige Konstante C.

7 Innere Regularität

7.1 Bezeichnung. Für zwei Teilmengen U, V eines topologischen Raums schreiben wir $U \Subset V$, wenn $\overline{U}$ eine kompakte Teilmenge von V ist.

7.2 Bezeichnung. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es sei $U \Subset \Omega$ und es sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Für jedes $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $U + he_j \subset \Omega$ bezeichnen wir die Abbildung

$$D_{j,h}u \colon U \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \frac{1}{h}(u(x + he_j) - u(x))$$

als *Differenzenquotienten* von u.

7.3 Lemma. *Sei* $j \in \{1, \ldots, n\}$. *Es gebe* $C > 0$, *eine reelle Nullfolge* $(h_\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *und eine Folge offener Mengen* $U_1 \Subset U_2 \Subset \cdots \Subset \Omega$ *mit* $U_m + h_\ell e_j \subset \Omega$, $\ell \geq m$, *und* $\bigcup_{m=1}^{\infty} U_m = \Omega$, *so dass* $\|D_{j,h_m}u\|_{L^2(U_m)} \leq C$ *für alle* m. *Dann liegt die partielle Ableitung* u_{x_j} *in* $L^2(\Omega)$ *und es gilt* $\|u_{x_j}\|_{L^2(\Omega)} \leq C$.

7.4 Lemma. *Es sei* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *und es seien* $U \Subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Dann gilt für jedes* $u \in H^1(\Omega)$ *und hinreichend kleines* $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\|D_{j,h}u\|_{L^2(U)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

7.5 Satz (Partielle Integration für Differenzenquotienten). *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen, es sei* $U \Subset \Omega$ *offen und es sei* $|h| < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$. *Für* $u \in L^2(\Omega)$ *und* $v \in C(\Omega)$ *mit Träger in* U *gelten dann*

$$D_{j,h}(uv)(x) = u(x)D_{j,h}(v)(x) + D_{j,h}(u)(x)v(x + he_j),$$
$$\int_\Omega D_{j,h}(u)(x)\, v(x)\, d\lambda_n(x) = -\int_\Omega u(x)\, D_{j,-h}(v)(x)\, d\lambda_n(x).$$

7.6 Theorem. *Es sei* L *ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform*

$$L(x, D)u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u. \tag{7.1}$$

Die Koeffizienten $a_{i,j}$ *seien in* $H^1(\Omega)$, *die* b_i *und* c *seien in* $L^2(\Omega)$. *Für* $f \in L^2(\Omega)$ *sei* $u \in H_0^1(\Omega)$ *eine Lösung des Dirichletproblems* (6.2). *Für jedes* $U \Subset \Omega$ *gelten dann* $u \in H^2(U)$ *und*

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C \left(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

mit einer von f *unabhängigen Konstanten* C.

7.7 Korollar. *Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 7.6, außer dass die Funktion* $a_{i,j}$, b_i, c *und* f *in* $C^\infty(\Omega)$ *anstatt in* $L^2(\Omega)$ *liegen. Dann liegt auch* u *in* $C^\infty(\Omega)$.

8 Randregularität

8.1 Beispiel. Sei $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x > 0 \text{ oder } y > 0\right\}$. Wir nutzen Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ und definieren

$$u(r,\varphi) = r^{2/3}\sin\left(\frac{2}{3}\varphi + \frac{\pi}{3}\right).$$

In Polarkoordinaten hat der Laplace-Operator die Form

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}.$$

Damit sehen wir sofort, dass u das folgende Randwertproblem löst

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && \text{in } \Omega, \\ u(r,\varphi) &= \begin{cases} 0, & 0 \le r < 1, \\ \sin\left(\frac{2}{3}\varphi + \frac{\pi}{3}\right), & r = 1, \end{cases} && (r,\varphi) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Man sieht relativ leicht, dass $u \in H^1(\Omega)$. Man kann zeigen, dass $u \notin H^2(\Omega)$, indem man beispielsweise u_{xx} bestimmt. Dabei helfen

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_{xx} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

Am Ende kommt heraus, dass u_{xx} in der Nähe der Ecke wie $r^{-4/3}$ wächst.

8.2 Lemma. *Für $R > 0$ und $0 < \lambda < 1$ definieren wir*

$$\begin{aligned} D^+ &= B_R(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}, \\ Q^+ &= B_{\lambda R}(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}. \end{aligned}$$

L *sei ein gleichmäßig elliptisch Differentialoperator wie in (7.1) mit zugehöriger Sesquilinearform β. Die Koeffizienten $a_{i,j}$ seien in $H^1(D^+)$, die b_i und c seien in $L^2(D^+)$ und es sei $f \in L^2(D^+)$. Falls $u \in H^1(D^+)$ das Variationsproblem*

$$\beta(v,u) = (v,f), \quad v \in H_0^1(D^+),$$

löst und auf dem Teil des Randes mit $\{x_n = 0\}$ *verschwindet, so gilt* $u \in H^2(Q^+)$*. Ferner gilt*

$$\|u\|_{H^2(Q^+)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(D^+)} + \|u\|_{H^1(D^+)}\right)$$

für eine von f *unabhängige Konstante.*

8.3 Bemerkung. Ω besitze einen C^2-Rand. Für jedes $\xi \in \partial\Omega$ existiert dann eine Umgebung U von ξ und eine in einer geeigneten Umgebung von $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ definierte Funktion ψ von der Klasse C^2, so dass nach geeigneter Drehung und Umnumerierung

$$\begin{aligned} \Omega \cap U &= \{x \in U | x_n > \psi(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}, \\ \partial\Omega \cap U &= \{x \in U | x_n = \psi(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Wir definieren $\Psi\colon U \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\Psi(x) = \big(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \psi(x_1, \dots, x_{n-1})\big).$$

Dann ist Ψ ein C^2-Diffeomorphismus mit $\Psi(U \cap \partial\Omega) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Wir setzen $\Omega' := \Omega \cap U$ und $\Omega'' := \Psi(\Omega')$. Für eine auf Ω' definierte Funktion v setzen wir $\widetilde{v} := v \circ \Psi^{-1}$.

8.4 Lemma. *Für* $u \in H^1(\Omega')$ *gelte* $u = 0$ *in* $\partial\Omega' \cap \partial\Omega$ *und für die Sesquilinearform*

$$\beta(v, u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \overline{a_{i,j}} \frac{\partial v}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}} + \sum_{i=1}^n \overline{b_i} v \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} + \overline{c} v \overline{u} \, d\lambda_n.$$

gelte $\beta(v, u) = (v, f)$ *für alle* $v \in H_0^1(\Omega')$*. Dann* $\widetilde{u} \in H^1(\Omega'')$ *und* $\widetilde{u} = 0$ *in* $\partial\Omega'' \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$*. Ferner erfüllt* $\widetilde{u}$ *das Variationsproblem* $\widehat{\beta}(\widetilde{v}, \widetilde{u}) = (\widetilde{v}, \widetilde{f})$, $\widetilde{v} \in H_0^1(\Omega'')$*. Hierbei*

$$\widehat{\beta}(\widetilde{v}, \widetilde{w}) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \overline{\widehat{a}_{i,j}} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x_j}} + \sum_{i=1}^n \overline{\widehat{b}_i} \widetilde{v} \overline{\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x_i}} + \overline{\overline{c}} \, \widetilde{v} \, \overline{\widetilde{w}} \, d\lambda_n$$

und

$$\widehat{a}_{k,\ell} = \sum_{i,j=1}^n \widetilde{a}_{i,j} \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i} \circ \Psi^{-1} \frac{\partial \Psi_\ell}{\partial x_j} \circ \Psi^{-1}.$$

8.5 Lemma. *Der durch* $\widehat{\beta}$ *induzierte Differentialoperator ist gleichmäßig elliptisch.*

8.6 Theorem. *Es gelten die Voraussetzungen des Theorems 7.6. Zusätzlich sei der Rand von* Ω *von der Klasse* C^2*. Dann liegt* u *in* $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *und es gilt*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

für eine von f *unabhängige Konstante.*

8.7 Theorem (Lemma von Ehrling). *Es seien* $X \subset Y \subset Z$ *Banachräume, wobei die Einbettung* $X \hookrightarrow Y$ *kompakt und die Einbettung* $Y \hookrightarrow Z$ *stetig ist. Dann existiert zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $C(\epsilon) > 0$*, so dass für jedes* $x \in X$ *gilt*

$$\|x\|_Y \leq \epsilon \|x\|_X + C(\epsilon) \|x\|_Z.$$

8.8 Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 8.6 gibt es sogar ein* C*, so dass*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

für alle $f \in L^2(\Omega)$*.*

8.9 Korollar. *Wenn* $f, a_{i,j}, b_i, c \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *und* $\partial\Omega$ *von der Klasse* C^∞ *ist, dann ist* u *ebenfalls in* $C^\infty(\overline{\Omega})$*.*

9 Eigenwerte des Laplace-Operators in beschränkten Gebieten

Aus dem Satz über Operatoren mit kompakten Resolventen und dem Korollar zum Satz über die Regularität am Rand bekommt man sofort das folgende Ergebnis.

9.1 Theorem. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet, für das die Greenschen Formeln gelten. Dann gibt es eine unbeschränkte, monoton wachsende Folge $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ und ein in $L^2(\Omega)$ vollständiges Orthogonalsystem $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $u_n \in C^\infty(\Omega)$ mit $\Delta u_n = -\lambda_n u_n$ und $u_n|_{\partial\Omega} = 0$.*

Wenn das Gebiet einen C^∞-Rand hat, dann liegen die u_n sogar in $C^\infty(\overline{\Omega})$.

9.2 Beispiel. Wir bestimmen die Eigenwertfolge für den Laplace-Operator mit Dirichlet Randwerten für den Einheitskreis $\mathbb{D}$. Man macht dazu in Polarkoordinaten den Separationsansatz $u(r,\varphi) = v(r)w(\varphi)$. Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten ist

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}u_r = v''(r)w(\varphi) + \frac{1}{r^2}v(r)w''(\varphi) + \frac{1}{r}v'(r)w(\varphi).$$

Die Gleichung $\Delta u = -\lambda u$ transformiert sich zu

$$r^2\frac{v''(r)}{v(r)} + r\frac{v'(r)}{v(r)} + \lambda r^2 = -\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)},$$

wo $u(r,\varphi) \neq 0$. Beide Seiten sind also konstant. Die rechte Seite liefert $w(\varphi) = a\cos(A\varphi) + b\sin(A\varphi)$ für ein geignetes A. Da w periodisch sein muss, ist A ganz. Da negative A nicht zu neuen Lösungen führen, haben wir $w(\varphi) = a\cos(n\varphi) + b\sin(n\varphi)$. Damit erhalten wir für v die Besselsche Differentialgleichung

$$v'' + \frac{1}{r}v' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)v = 0.$$

Durch Substitution wie in §5 finden wir $v(r) = cJ_n(\sqrt{\lambda}r) + dY_n(\sqrt{\lambda}r)$. Der zweite Term ist unbeschränkt und der erste erfüllt die Randbedingung $v(1) = 0$ nur, falls $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$. Also

$$u = \alpha J_n(\sqrt{\lambda} r)\cos(n\varphi + \varphi_0),$$

wobei $\alpha \neq 0$ und $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ beliebig sind und $\sqrt{\lambda}$ eine Nullstelle von J_n ist.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$ setze

$$u_{n,m} = J_n\left(\sqrt{\lambda_m^{(n)}} r\right)\cos(n\varphi)$$

und für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ setze

$$v_{n,m} = J_n\left(\sqrt{\lambda_m^{(n)}} r\right)\sin(n\varphi).$$

Dann sind $u_{n,m}$ und $v_{n,m}$ Eigenfunktionen des Laplace-Operators zum Eigenwert $\lambda_m^{(n)}$.

9.3 Satz. *Die Funktionen* $\{u_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{N}} \cup \{v_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}}$ *bilden ein vollständiges Othogonalsystem im* $L^2(\mathbb{D})$.

9.4 Theorem. *Es sei* v *eine Eigenfunktion des Laplace-Opertors mit Dirichlet-Randbedingungen auf* $\mathbb{D}$. *Wenn* v *rotationssymmetrisch ist, dann besitzt der zugehörige Eigenwert die Vielfachheit* 1, *sonst besitzt er die Vielfachheit* 2.

Beweis. Die Aussage, dass alle $\lambda_n^{(m)}$ verschieden sind, wird als Vermutung von Bourget bezeichnet. Siegel zeigt diese Vermutung in [22], §4 Abs. II. Daraus ergibt sich sofort die Behauptung. □

9.5 Bezeichnung. Für $R > 0$ definieren wir $N(R)$ als die Anzahl der Eigenwerte, die höchstens gleich R sind. Dabei werden Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.

9.6 Beispiel. Wir bestimmen nun die Eigenwerte des Laplace-Operators mit Dirichlet Randbedingungen auf dem Rechteck $\Omega = [0, a] \times [0, b]$. Durch Separationsansatz findet man sofort die Eigenfunktionen

$$u_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), n, m \in \mathbb{N}.$$

Der zugehörige Eigenwert ist

$$\lambda_{n,m} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right).$$

Wir wollen $N(R)$ näherungsweise bestimmen: Es gilt $\lambda_{n,m} \leq R$ genau dann, wenn

$$\frac{n^2\pi^2}{a^2R} + \frac{m^2\pi^2}{b^2R} \leq 1,$$

wenn also der Punkt (n, m) im Schnitt S des ersten Quadranten mit der Ellipse mit den Halbachsen $\frac{a\sqrt{R}}{\pi}$ und $\frac{b\sqrt{R}}{\pi}$ liegt. Der Flächeninhalt von S beträgt $\frac{abR}{4\pi}$. Da mit (n, m) auch das Quadrat $[n-1, n] \times [m-1, m]$ in S liegt, haben wir gezeigt

$$N(R) \leq \frac{abR}{4\pi}.$$

Hat man umgekehrt $(x, y) \in S$, so setzt man $n = \lceil x \rceil$ und $m = \lceil y \rceil$ und hat mit diesen Werten

$$\lambda_{n,m} \leq \pi^2 \left(\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} \right) \leq R + \pi^2 \left(\frac{2x+1}{a^2} + \frac{2y+1}{b^2} \right)$$
$$\leq R + \pi^2 \left(\frac{2a\sqrt{R}/\pi + 1}{a^2} + \frac{2b\sqrt{R}/\pi + 1}{b^2} \right) = R + 2\pi\sqrt{R} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Weil jeder Punkt $(x, y) \in S$ in einem Quadrat $[n-1, n] \times [m-1, m]$ mit $\lambda_{n,m}$ wie oben liegt, haben wir gezeigt

$$\frac{abR}{4\pi} \leq N\left(R + 2\pi\sqrt{R} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right).$$

Invertiert man diese Formel, so findet man $C_1, C_2 > 0$, abhängig von a und b, so dass

$$\frac{abR}{4\pi} - C_1\sqrt{R} - C_2 \leq N(R) \leq \frac{abR}{4\pi}.$$

9.7 Bemerkung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet oder ein Polygon. Nach Theorem 9.1 besitzt der Laplace-Operator mit Dirichlet Randbedingungen eine unendliche Folge $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ von Eigenwerten. Wir schreiben jeden Eigenwert so oft hin, wie die Dimension des zugehörigen Eigenraums angibt. Die Zählfunktion schreibt sich dann $N(R) = \#\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n \leq R\}, R > 0$. Für das Rechteck haben wir gesehen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \lim_{R\to\infty} \frac{R}{N(R)} = \frac{4\pi}{ab}.$$

10 Das Courantsche Minimum-Maximum Prinzip

Bezeichnung. Für $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in H$ setzen wir $\{v_1, \ldots, v_n\}^\perp = \{x \in H \mid 1 \le j \le n : x \perp v_j\}$.

10.1 Theorem (Minimum-Maximum Prinzip). *Sei* $B \in L(H)$ *ein selbstadjungierter, kompakter Operator mit nicht-negativen Eigenwerten* $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \ldots$, *wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit aufgezählt wird. Dann*

$$\mu_n = \min\left\{ \max_{x \in \overline{B}_1(0) \cap \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}^\perp} (Bx, x) \;\middle|\; v_1, \ldots, v_{n-1} \in H \right\}. \tag{10.1}$$

10.2 Lemma. *Sei* A *ein koerziver Operator im Hilbertraum* H. *Wenn zusätzlich die Einbettung* $H_E \hookrightarrow H$ *der energetischen Erweiterung* H_E *nach* H *kompakt und* $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren ist, wobei* λ_n *der Eigenwert zu* u_n *ist, dann* $H_E = \{\sum_{j=1}^\infty x_j u_j \mid \sum_{j=1}^\infty \lambda_j |x_j|^2 < \infty\}$ *und*

$$\left(\sum_{j=1}^\infty x_j u_j, \sum_{k=1}^\infty y_k u_k \right)_E = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j x_j \overline{y}_j.$$

10.3 Theorem. *Sei* A *ein koerziver Operator in einem unendlich-dimensionalen Hilbertraum* H. *Die Einbettung* $H_E \hookrightarrow H$ *der energetischen Erweiterung* H_E *nach* H *sei kompakt. Es seien* $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ *die Eigenwerte der Friedrichs-Erweiterung* A_F, *wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit aufgezählt wird. Dann*

$$\lambda_n = \max\left\{ \inf_{x \in \partial B_1(0) \cap \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}^\perp \cap H_E} (x, x)_E \;\middle|\; v_1, \ldots, v_{n-1} \in H \right\}.$$

Dabei beziehen sich $B_1(0)$ *und* $\perp$ *auf das Skalarprodukt in* H.

10.4 Bemerkung. Für eine offene Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$, für die die Greenschen Formeln gelten, betrachten wir Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen. Im ersten Fall gilt $H_E = H_0^1(\Omega)$, im anderen $H_0^1(\Omega) \subset H_E \subset H^1(\Omega)$.

Im Fall von Neumann-Randbedingungen tritt noch das Problem auf, dass $-\Delta$ nicht koerziv ist. Wir bilden daher die Friedrichs-Erweiterung zu $\mathrm{id}-\Delta$ und ziehen anschließend id wieder ab. Das führt dazu, dass das energetische Skalarprodukt nur noch semidefinit ist. In beiden Fällen hat man $(u,u)_E = \int_\Omega (\nabla u, \nabla u)\, d\lambda_n$.

10.5 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet, für welches die Greenschen Formeln gelten. Es seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingungen und $0 = \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators mit Neumann-Randbedingungen. Dann gilt $\nu_n \leq \lambda_n$ für jedes n.*

10.6 Satz. *Seien Ω_1 und Ω_2 zwei beschränkte Gebiete, für welche die Greenschen Formeln gelten. Es gelte $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Ferner seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf Ω_1 und $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf Ω_2, beide Male mit Dirichlet-Randbedingungen. Dann gilt $\mu_n \leq \lambda_n$ für jedes n.*

10.7 Beispiel. Einer Idee in Courant-Hilbert [4] folgend, gebe ich ein Beispiel von zwei Polygonen $\Omega_\epsilon \subset Q$ im $\mathbb{R}^2$ an, so dass der zweite Eigenwert des Laplace-Operators mit Neumann-Randbedingungen für Ω_ϵ echt kleiner als der entsprechende zweite Eigenwert für Q ist.

Setze dazu $Q = (-2,2) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $\Omega_\epsilon = (-2,-1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup [-1,1] \times (-\epsilon, \epsilon) \cup (1,2) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ für beliebig kleines $\epsilon > 0$. In beiden Fällen ist die konstante Funktion 1 ein Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert 0. Setze

$$v(x,y) = \begin{cases} -1, & -2 < x < -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Dann $v \in L^2(\Omega_\epsilon)$ mit $\|v\|^2 = 1 + 2\epsilon \int_{-1}^{1} x^2 dx + 1 = 2 + \frac{4}{3}\epsilon$. Außerdem besitzt v die schwache erste Ableitung

$$\nabla v(x,y) = \begin{cases} \binom{1}{0}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also $(v,v)_E = 2\epsilon$. Bezeichnen wir den zweiten Eigenwert des Laplace-Operators mit Neumann-Randbedingungen auf Ω_ϵ mit ν_2, so gilt nach einer Aufgabe von Blatt 6

$$\nu_2 = \inf \left\{ \int_\Omega (f,f)_E \,\middle|\, f \in H_E, \|f\| = 1, f \perp 1 \right\}.$$

Für das v von oben gilt

$$\frac{(v,v)_E}{\|v\|^2} = \frac{2\epsilon}{2+\frac{4}{3}\epsilon} \to 1, \qquad \epsilon \to 0.$$

Also $\nu_2 < \epsilon$. Andererseits haben wir den zweitkleinsten Eigenwert des Laplace-Operators mit Neumann-Randbedingungen für Q ebenfalls auf Blatt 6 bestimmt, er ist gleich $\frac{\pi^2}{16}$.

Dieses Beispiel zeigt, dass das Analogon zu Satz 10.6 für Neumannsche Randbedingungen nicht gilt.

11 Die Weylsche Formel für die asymptotische Verteilung der Eigenwerte

11.1 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet, für das die Greenschen Formeln gelten. Seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf Ω mit Dirichlet-Randbedingungen und seien $0 = \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf Ω mit Neumann-Randbedingungen. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} N_{D,\Omega}(R) &= \#\{n \mid \lambda_n \leq R\}, \\ N_{N,\Omega}(R) &= \#\{n \mid \nu_n \leq R\}. \end{aligned}$$

11.2 Beispiel. Für $\Omega = \prod_{k=1}^N (0, a_k)$ gilt

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N_{D,\Omega}(R)}{R^{N/2}} = \lim_{R\to\infty} \frac{N_{N,\Omega}(R)}{R^{N/2}} = \frac{\alpha_N}{(2\pi)^N} \prod_{k=1}^N a_k,$$

wobei α_N das Volumen der N-dimensionalen Kugel ist. Die Eigenwerte sind $\lambda_{n_1,\dots,n_N} = \pi^{2N} \left(\sum_{j=1}^N \frac{n_j^2}{a_j^2} \right)$.

Bemerkung. Auf Blatt 10 der Analysis III im Wintersemester 2016 wurde gezeigt

$$\alpha_N = \begin{cases} \dfrac{1}{k!}\pi^k, & N = 2k, \\ \dfrac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}\pi^k, & N = 2k+1. \end{cases}$$

11.3 Lemma. *Seien $Q_1, \dots, Q_\ell$ disjunkte, offene Quader im $\mathbb{R}^N$ und sei Ω das Innere von $\bigcup_{k=1}^\ell \overline{Q}_k$. Dann*

$$\frac{\alpha_N}{(2\pi)^N} \sum_{k=1}^\ell \mathrm{vol}(Q_k) \leq \liminf_{R\to\infty} \frac{N_{D,\Omega}(R)}{R^{N/2}}. \tag{11.1}$$

11.4 Lemma. *Seien* $Q_1, \dots, Q_\ell$ *disjunkte, offene Quader im* $\mathbb{R}^N$ *und sei* Ω *das Innere von* $\bigcup_{k=1}^{\ell} \overline{Q}_k$. *Dann*

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{N_{N,\Omega}(R)}{R^{N/2}} \leq \frac{\alpha_N}{(2\pi)^N} \sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{vol}(Q_k). \tag{11.2}$$

11.5 Lemma. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ein beschränktes Gebiet mit* C^2*-Rand oder ein Polygon. Dann gibt für jedes* $\epsilon > 0$ *Zahlen* $\ell < m$ *und disjunkte, offene Quader* $Q_1, \dots, Q_m \subset \mathbb{R}^N$ *mit den folgenden Eigenschaften*

(a) $\bigcup_{j=1}^{\ell} \overline{Q}_j \subset \Omega$,

(b) $\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{m} \overline{Q}_j$,

(c) $\mathrm{vol}(\Omega) - \epsilon < \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{vol}(Q_j) \leq \mathrm{vol}(\Omega) \leq \sum_{j=1}^{m} \mathrm{vol}(Q_j) < \mathrm{vol}(\Omega) + \epsilon$.

11.6 Theorem (Weylsche Formel). *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ein beschränktes Gebiet mit* C^∞*-Rand oder ein Polygon. Dann*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N_{D,\Omega}(R)}{R^{N/2}} = \frac{\alpha_N}{(2\pi)^N} \mathrm{vol}(\Omega).$$

Bemerkung. Beachte, dass Satz 10.6 für Neumann-Randwerte nicht zur Verfügung steht. Man kann dennoch zeigen

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N_{N,\Omega}(R)}{R^{N/2}} = \frac{\alpha_N}{(2\pi)^N} \mathrm{vol}(\Omega).$$

Details findet man in Abschnitt VI §4 von Courant und Hilbert [4].

Bemerkung. Aufbauend auf der dargestellten Arbeit von Weyl und einer Arbeit von Pleijel zeigt Kac [13] für konvexe Polygone mit r Löchern

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4\sqrt{2\pi t}} + \frac{1-r}{6}, \quad t \to \infty,$$

wobei L der Umfang von Ω ist. Er stellt dann die Frage: "Can one hear the shape of a drum?"

Gordon, Webb und Wolpert [8] zeigen, dass dies unmöglich ist, indem sie zwei Polygone angeben, welche genau dieselben Eigenwerte haben. Wenn man die Polygone mal hat, sieht man das leicht mit dem Transplantationsverfahren, welches bei Chapman [2] erklärt ist.

12 Integralkerne

12.1 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $q\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ heißt *Wärmeleitungskern,* wenn

$$\begin{aligned} \Delta_x q(x, y, t) - q_t(x, y, t) &= 0 \qquad && x, y \in \Omega, t > 0, \\ q(x, y, t) &= 0 && x \in \partial\Omega, y \in \Omega, t > 0, \end{aligned}$$

und für alle stetigen Funktionen $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{t \to 0} \int_\Omega q(x, y, t) f(x) d\lambda_n(x) = f(y) \quad \text{für alle } y \in \Omega.$$

12.2 Satz. *Jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^2-Rand hat einen Wärmeleitungskern. Für alle $x, y \in \Omega$ und $t > 0$ gilt $q(x, y, t) = q(y, x, t)$.*

Die Existenz war in der Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen im WS 2017/18 als Korollar 17.14 gezeigt worden. Grundlagen war damals das Buch von Jost [11]. Dort wird in Corollary 5.3.2 auch die Symmetrie gezeigt.

Unser nächstes Ziel ist der Satz von Mercer. Wir folgen der Darstellung in Abschnitt VI.4 von Werner [26].

12.3 Bemerkung. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für einen Kern $k \in L^2(\Omega^2)$ zeigt man wie in Beispiel 11.6 der Einführung in die Funktionalanalysis, dass der Integraloperator

$$T_k\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad T_k(f)(s) = \int_\Omega k(s, t) f(t)\, d\lambda_n(t),$$

kompakt ist.

Wenn der Kern symmetrisch ist, also $k(s, t) = k(t, s)$ für alle s, t, dann ist T_k selbstadjungiert und besitzt daher ein vollständiges Orthonormalsystem $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Eigenfunktionen.

Wenn außerdem noch $k \in C(\overline{\Omega}^2)$, dann ist $T_k f$ für jedes $f \in L^2(\Omega)$ stetig, wie eine Anwendung des Lebesgueschen Grenzwertsatzes zeigt. Insbesondere liegen alle e_n in $C(\overline{\Omega})$.

12.4 Lemma. *Es sei* $k \in C(\overline{\Omega}^2)$ *symmetrisch, d. h.* $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$*, und es sei* $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren von* T_k*. Es sei* μ_j *der Eigenwert zu* e_j*. Für jedes* $f \in C(\overline{\Omega})$ *gilt*

$$T_k(f)(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \, (f, e_j) \, e_j(s),$$

wobei die Reihe gleichmäßig konvergiert.

12.5 Lemma. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 12.4 sei* T_k *positiv. Dann gilt* $k(t,t) \geq 0$ *für alle* $t \in \overline{\Omega}$*.*

12.6 Theorem (Satz vom Mercer). *Es sei* $k \in C(\overline{\Omega}^2)$ *symmetrisch, es sei* $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren von* T_k *und der Operator* T_k *sei positiv. Es sei* μ_j *der Eigenwert zu* e_j*. Dann gilt für alle* $s,t \in \overline{\Omega}$

$$k(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j e_j(s) \overline{e_j(t)}.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig.

12.7 Satz (Dini). *Es sei* X *ein kompakter topologischer Raum und es sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine fallende Folge in* $C(X,\mathbb{R})$*, deren punktweiser Grenzwert stetig ist. Dann ist die Konvergenz gleichmäßig.*

13 Beweis der Weylschen Asymptotik mit der Wärmeleitungsmethode

13.1 Bezeichnung. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand und es sei $q\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times]0, \infty \to \mathbb{R}$ der Wärmeleitungskern. Es sei $f \in C(\Omega)$. Nach Theorem 17.16 der Einführung in die partiellen Differentialgleichungen bzw. Theorem 5.3.2 in Jost [11] löst

$$u(x,t) := \int_\Omega q(x,y,t) f(y)\, d\lambda_n(y)$$

das Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0, && x \in \Omega, t > 0,\\ u(x,t) &= 0, && x \in \partial\Omega, t > 0,\\ u(x,0) &= f(x), && x \in \Omega. \end{aligned}$$

Für $t > 0$ definieren wir

$$P_t\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad P_t f(x) := \int_\Omega q(x,y,t) f(y)\, d\lambda_n(y).$$

Die Operatoren P_t sind selbstadjungiert und kompakt.

13.2 Satz (Halbgruppeneigenschaft). *Für $s, t > 0$ gilt $P_t \circ P_s = P_{t+s}$.*

13.3 Lemma. *Es sei $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren von P_1 und es sei $\mu_j e_j = P_1 e_j$. Dann $0 < \mu_j < 1$ und für alle $t > 0$ gilt $P_t \Phi_j = \mu_j^t \Phi_j$.*

13.4 Satz. *Die Eigenwerte μ_j aus Lemma 13.3 schreiben wir als $e^{-\lambda_j}$. Dann*

$$q(x,y,t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \Phi_j(x) \overline{\Phi_j(y)}. \tag{13.1}$$

Für jedes $\epsilon > 0$ ist die Konvergenz gleichmäßig auf $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [\epsilon, \infty[$.

13.5 Satz. *Das Φ_j aus der Entwicklung in Satz 13.4 ist Eigenvektor von $-\Delta$ mit Dirichlet-Randbedingungen zum Eigenwert λ_j.*

Im weiteren folge ich Dodziuk [5].

13.6 Lemma. $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} = \int_\Omega q(x,x,t)\,dx$.

Wir bezeichnen mit

$$k(x,y,t) := \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{|x-y|^2}{4t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung aus der Einführung in die partiellen Differentialgleichungen. Das bedeutet, dass für jede beschränkte Funktion $g \in C(\mathbb{R}^n)$ die Funktion

$$v(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y,t) g(y)\,d\lambda_n(y)$$

das folgende Anfangswertproblem löst

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= 0, && \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[, \\ v &= g, && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

13.7 Lemma. *Für alle $x, y \in \overline{\Omega}$ und alle $t > 0$ gilt $q(x,y,t) \leq k(x,y,t)$.*

13.8 Lemma. *Für $y \in \Omega$ sei $\ell(y) := \operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Für $x, y \in \Omega$ gilt dann*

$$0 \leq k(x,y,t) - q(x,y,t) \leq \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{\ell(y)^2}{4t}\right), & 0 < t \leq t_0, \\ \dfrac{1}{(4\pi t_0)^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{\ell(y)^2}{4t_0}\right), & t_0 < t \end{cases}$$

wobei $t_0 := \dfrac{\ell(y)^2}{2n}$.

13.9 Theorem. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge mit C^2-Rand und seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ die Eigenwerte von $-\Delta$ mit Dirichlet-Randwerten. Dann existiert $C > 0$, so dass für alle $t > 0$*

$$0 \leq \frac{\lambda_n(\Omega)}{(4\pi t)^{n/2}} - \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \leq C t^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}.$$

13.10 Definition. Wir schreiben $a(t) \sim b(t)$, $t \to t_0$, falls $\lim_{t\to t_0} \frac{a(t)}{b(t)} = 1$.

13.11 Theorem (Taubersatz von Karamata). *Falls* $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \sim A t^{-\gamma}$ *für* $t \searrow 0$, *so gilt für die Zählfunktion*

$$N(R) \sim \frac{AR^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}, \quad R \to \infty.$$

Damit hat man einen zweiten Beweis von Theorem 11.6.

14 Der Taubersatz von Karamata

Ich zeige den Taubersatz wie in Korevaar [16].

14.1 Definition. Eine Funktion $L\colon]a,\infty[\to \mathbb{R}$ *variiert langsam,* (engl. "is slowly varying"), wenn sie Borel-messbar ist, es ein b gibt, so dass $L(u) > 0$ für alle $u > b$, und für alle $\lambda > 0$ gilt

$$\lim_{u\to\infty} \frac{L(\lambda u)}{L(u)} = 1.$$

14.2 Beispiel. (a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ variiert $L(u) = (\log u)^{\alpha} (\log\log u)^{\beta}$ langsam.

(b) Für $0 < \alpha < 1$ variiert $L(u) = \exp((\log u)^{\alpha})$ langsam.

(c) Es sei $|f(u)| = o(1)$ für $u \to \infty$. Dann variiert $L(u) = 1 + f(u)$ langsam.

Als Beispiel, was man mit dem Begriff machen kann, zitiere ich ohne Beweis:

14.3 Theorem ([16], Chapter IV, Proposition 5.1). *Es seien $a > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Die Funktion $L\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$ variiere langsam und sei auf allen kompakten Teilmengen von $[a,\infty[$ beschränkt. Dann gelten die folgenden Asymptotiken für $u \to \infty$*

$$\int_a^u t^{\beta-1} L(t)\, dt \sim \frac{u^{\beta}}{\beta} L(u), \qquad \beta > 0,$$
$$\int_u^{\infty} t^{\beta-1} L(t)\, dt \sim -\frac{u^{\beta}}{\beta} L(u), \qquad \beta < 0.$$

14.4 Definition. Eine *Massefunktion* ist eine monoton wachsende Funktion $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $S(\nu) = 0$ für alle $\nu < 0$ und $\lim_{\nu\searrow\nu_0} S(\nu) = S(\nu_0)$ für alle ν_0. Der Maßfortsetzungssatz liefert uns zu jeder Massefunktion ein Maß μ_S mit $\mu_S(]a,b]) = S(b) - S(a)$. Die *Laplace-Stieltjes Transformierte* von S — bzw. die Laplace-Transformierte von μ_s — ist dann definiert durch

$$\mathcal{L}\mu_S(t) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} e^{-t\nu} \mu_S(\nu).$$

14.5 Beispiel. Es sei $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, dann ist die zugehörige Zählfunktion $N(R) := \{j | \lambda_j \leq R\}$ eine Massefunktion. Für jede Funktion $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{[0,u]} f \, d\mu_N = \sum_{\lambda_j \leq R} f(\lambda_j).$$

Daher

$$\mathcal{L}\mu_N(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}.$$

14.6 Beispiel. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, nicht-negative Funktion mit $f(\nu) = 0$ für alle $\nu \leq 0$ und es sei $F(u) = \int_0^u f \, d\lambda_1$. Wir nehmen an, dass für alle $\epsilon > 0$ gilt $F(u) = O(e^{\epsilon u})$, $u \to \infty$. Dann ist F eine Massefunktion und es gilt $\mu_F(]a,b]) = \int_a^b f(\nu) \, d\lambda_1(\nu)$. Damit bekommen wir für $t > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mu_F(t) = \int_0^\infty e^{-t\nu} f(\nu) \, d\lambda_1(\nu) = -te^{-t\nu}F(\nu)\Big|_0^\infty + t\int_0^\infty e^{-t\nu}F(\nu) \, d\lambda_1(\nu) \\ = t\int_0^\infty e^{-t\nu}F(\nu) \, d\lambda_1(\nu). \end{aligned}$$

14.7 Theorem. *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei eine Massefunktion S_k gegeben. Es gebe ein a, so dass die Laplace-Stieltjes Transformierten $\mathcal{L}\mu_{S_k}$ in $]a,\infty[$ punktweise gegen eine Funktion F konvergieren. Dann gibt es eine Massefunktion S, so dass $F = \mathcal{L}\mu_S$ und $S_k(\nu) \to S(\nu)$, $k \to \infty$, an jeder Stelle ν, an der S stetig ist.*

Beweis. Das ist Theorem 7.1 in Chapter IV von Korevaar [16]. Er zitiert Feller [7], Chapter 13, für den Beweis. □

14.8 Theorem (Taubersatz von Karamata). *Es sei S eine Massefunktion, deren Laplace-Stieltjes Transformierte für alle $t > 0$ existiert. Es sei $\varphi(\nu) = \nu^\alpha L(\nu)$ für ein $\alpha \geq 0$ und ein L, welches langsam variiert. Dann sind äquivalent*

$$S(x) \sim A\varphi(x), \qquad x \to \infty, \tag{14.1}$$

$$\mathcal{L}\mu_S\left(\frac{1}{x}\right) \sim A\Gamma(\alpha+1)\varphi(x), \qquad x \to \infty. \tag{14.2}$$

In unserer Anwendung haben wir $\mathcal{L}\mu_N(x) \sim \frac{\lambda_n(\Omega)}{(4\pi x)^{n/2}}$, genauer

$$\mathcal{L}\mu_N\left(\frac{1}{x}\right) = A\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) x^{n/2}L(x)$$

für $A := \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ und ein L der Form $L(x) = 1 + O(x^{-1/2})$. Daher variiert L langsam. Mit dem Taubersatz folgt

$$N(R) \sim \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^{N/2}.$$

Vergleicht man dies mit der früheren Formel, muss man sich aus der Analysis III erinnern, dass im $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{vol}(B_1(0)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

15 Die hyperbolische Metrik

Wir folgen den Büchern von Iwaniec [10] und Beardon [1].

15.1 Bezeichnung. (a) Mit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ bezeichnen wir die obere Halbebene.

(b) Ein *Automorphismus* der oberen Halbebene ist eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, d. h. eine holomorphe Bijektion, deren Inverse ebenfalls holomorph ist. Die Menge aller Automorphismen bildet die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$, wobei die Gruppenoperation die Komposition von Abbildungen ist.

(c) Eine *Möbius-Transformation* ist eine Abbildung der Form $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \neq 0$.

(d) Die *spezielle lineare Gruppe* über einem Körper k ist definiert als $\mathrm{SL}_2(k) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in k^{2\times 2} \middle| \det(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = 1 \right\}$.

(e) In der Funktionentheorie wird gezeigt, dass durch

$$\widetilde{\Phi}\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \operatorname{Aut}(\mathbb{H}), \quad \widetilde{\Phi}(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right))(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus gegeben wird, dessen Kern aus den beiden Matrizen $\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ besteht. Setzt man also

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),$$

so wird durch

$$\Phi\colon \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \to \operatorname{Aut}(\mathbb{H}), \quad \Phi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right))(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

ein Gruppenisomorphismus gegeben.

(f) Die Cayley-Abbildung $\psi_i\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$, ist biholomorph. Ihre Umkehrabbildung wird gegeben durch $\psi_i^{-1}(w) = i\frac{1+w}{1-w}$. Also sind $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ isomorph. In der Funktionentheorie wurde gezeigt

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C}, |a| > |b| \right\}.$$

15.2 Definition. Sei G eine Gruppe und M eine Menge. Man sagt, dass G auf M *operiert,* wenn es eine Abbildung $G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto g.x$, mit den folgenden Eigenschaften gibt

(a) $(gh).x = g.(h.x)$, $g, h \in G$, $x \in M$.

(b) Für das neutrale Element n von G gilt $n.x = x$, $x \in M$.

Eine Gruppenoperation heißt *transitiv,* wenn es zu je zwei Elementen $x, y \in M$ ein $g \in G$ mit $g.x = y$ gibt.

15.3 Beispiel. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ operieren auf $\mathbb{H}$ via Möbius-Transformationen, d. h.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

15.4 Lemma. *Die Operation der* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *auf* $\mathbb{H}$ *ist transitiv.*

Genauer: Zu $z, w \in \mathbb{H}$ *gibt es* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ *and* $y \in \,]0, 1]$, *so dass* $f(z) = i$ *und* $f(w) = iy$.

Erstaunlicherweise gibt es eine Metrik auf $\mathbb{H}$, bezüglich derer sämtliche Automorphismen isometrisch sind. Die machen wir jetzt.

15.5 Definition. Für einen stückweisen C^1-Weg $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{H}$ definieren wir seine *hyperbolische Länge* als

$$L(\gamma) := \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}\gamma(t)}\, dt.$$

Die *hyperbolische Metrik* ist dann definiert als

$$\rho(z, w) := \inf \left\{ L(\gamma) \,\middle|\, \gamma\colon [a, b] \to \mathbb{H} \text{ stückw. } C^1\text{-Weg mit } \gamma(a) = z, \gamma(b) = w \right\}.$$

15.6 Lemma. *(a)* $L(\gamma) = L(\beta)$, *wenn* $\beta(t) = \gamma(Ct)$ *für ein* $C \neq 0$.

(b) Die hyperbolische Metrik ist in der Tat eine Metrik.

15.7 Lemma. *Für* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ *von der Form* $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, *gelten*

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} \quad \textit{und} \quad f'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

15.8 Satz. *Die hyperbolische Metrik ist invariant unter Automorphismen.*

15.9 Theorem. *Setzt man*

$$u(z,w) = \frac{|z-w|^2}{4 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w},$$

so gilt $\cosh \rho(z,w) = 1 + 2u(z,w)$.

15.10 Korollar. *Die kürzesten Verbindungen der hyperbolischen Metrik sind die* Orthokreise. *Das sind die Kreisbögen und Geraden, die den Rand senkrecht schneiden.*

15.11 Bezeichnung. Zu der Metrik gehört auch ein Volumenelement. Durch

$$\mu(E) = \int_E \frac{d\lambda_2(x,y)}{y^2}$$

wird ein Borelmaß auf $\mathbb{H}$ gegeben. Das zugehörige Integral ist offenbar gegeben durch $\int_{\mathbb{H}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{H}} f(x,y) y^{-2} d\lambda_2(x,y)$.

15.12 Satz. *Für jedes* $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ *und jede Borelmenge* $E \subset \mathbb{H}$ *gilt* $\mu(E) = \mu(g(E))$.

15.13 Satz (Gauß-Bonnet). *Es sei* $\triangle \subset \mathbb{H}$ *ein hyperbolisches Dreieck mit den Winkeln* α, β *und* γ. *Dann* $\mu(\triangle) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

15.14 Satz. *Die durch die hyperbolische Metrik induzierte Topologie auf* $\mathbb{H}$ *ist gleich der Teilraumtopologie der Riemannschen Zahlensphäre* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

15.15 Bemerkung. Für $E \subset \mathbb{H}$ definieren wir $\widetilde{E}$ als den Abschluss von E in $\mathbb{H}$ in der hyperbolischen Metrik und $\overline{E}$ als den Abschluss in der Riemannschen Zahlensphäre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. In diesem Sinn ist $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Wegen des Satzes gilt $\widetilde{E} = \overline{E} \cap \mathbb{H}$.

15.16 Lemma. *Wir definieren einen unbeschränkten Operator* A *in* $L^2(\mathbb{H}, \mu)$ *durch* $D(A) = \mathscr{D}(\mathbb{H})$ *und*

$$Au = -y^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Dann ist $\mathrm{id} + A$ *koerziv.*

15.17 Definition. Wenn B_{F} die Friedrichs-Erweiterung von $\mathrm{id} + A$ ist, dann bezeichnen wir $\mathrm{B}_{\mathsf{F}} - \mathrm{id}$ als *Laplace-Operator* auf $\mathbb{H}$. Es handelt sich um den Laplace-Beltrami-Operator der Riemannschen Fläche $\mathbb{H}$.

16 Fuchssche Gruppen

16.1 Definition. Die Menge $\Gamma z = \{\gamma.z \mid \gamma \in \Gamma\}$ ist der *Orbit* von z unter der Gruppenoperation. Zwei Elemente heißen *äquivalent*, wenn sie im selben Orbit liegen.

Eine Gruppe Γ operiert *diskontinuierlich* auf $\mathbb{H}$, wenn kein Orbit einen Häufungspunkt in $\mathbb{H}$ besitzt.

Eine Untergruppe $\Gamma \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, welche diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$ operiert, ist eine *Fuchssche Gruppe.*

16.2 Lemma. *Für $z \in \mathbb{H}$ und $K \subset \mathbb{H}$ kompakt ist $\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) | \gamma.z \in K\}$ kompakt.*

16.3 Theorem. *(Poincaré, siehe Katok [15], Theorem 2.2.6) Eine Untergruppe $\Gamma \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist genau dann diskret in der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, wenn sie als Untergruppe der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$ operiert.*

16.4 Korollar. *Jede Untergruppe einer Fuchsschen Gruppe ist eine Fuchssche Gruppe.*

16.5 Beispiel. (a) Die *Modulgruppe* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ist eine Fuchssche Gruppe.

(b) Für $N \in \mathbb{N}$ ist

$$\Gamma(N) := \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) | \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mod N\}$$

die N-*te Hauptkongruenzgruppe.* Es gilt $\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

(c) Für $N \in \mathbb{N}$ ist

$$\Gamma_0(N) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) | c \equiv 0 \mod N\}$$

die N-*te Hecke Kongruenzgruppe.* Es gelten $\Gamma_0(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\Gamma(N) \leq \Gamma_0(N)$.

(d) Für $q \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ setzen wir

$$\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau_q := \begin{pmatrix} 1 & 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die von σ und τ_q erzeugte Untergruppe Γ_q von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist eine Fuchssche Gruppe. Sie wird als *Hecke Gruppe* bezeichnet. Der Beweis, dass die Hecke Gruppe in der Tat diskret ist, ist nicht einfach. Man findet ihn in [1], § 10.6. Dort wird auch gezeigt, dass $\Gamma_3 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

16.6 Definition. Eine Fuchssche Gruppe heißt *von erster Art,* wenn jedes Element von $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Häufungspunkt eines Orbits ist.

16.7 Beispiel. (a) Die Modulgruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ist eine Fuchssche Gruppe erster Art.

(b) Die Fuchssche Gruppe $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | m \in \mathbb{Z}\}$, welche aus den Translationen besteht, ist nicht von erster Art.

16.8 Satz. *Es sei Γ eine Fuchssche Gruppe erster Art und es sei $\Gamma_0 \leq \Gamma$ eine Untergruppe von endlichem Index, dann ist Γ_0 ebenfalls eine Fuchssche Gruppe erster Art.*

16.9 Beispiel. (a) Man kann zeigen, dass $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = N^3 \prod_{p|N} \left(1 - p^{-2}\right)$, wobei das Produkt über alle Primteiler von N gebildet wird. Daher sind auch die Kongruenzgruppen $\Gamma(N)$ und $\Gamma_0(N)$ von erster Art.

(b) Man kann ebenfalls zeigen, dass die Hecke Gruppen von erster Art sind.

16.10 Lemma. *Es sei Γ eine Fuchssche Gruppe und es sei $z \in \mathbb{H}$. Dann gibt es eine Umgebung W von z, so dass $\gamma(w) \neq w$ für alle $w \in W \setminus \{z\}$ und alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$.*

17 Fundamentalgebiete

17.1 Definition. Es sei $F = \widetilde{G}$ für ein Gebiets $G \subset \mathbb{H}$ und es sei $\Gamma \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Man bezeichnet F als *Fundamentalgebiet* von Γ, wenn

(a) $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} \gamma.F = \mathbb{H}$.

(b) $G \cap \gamma.G = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$.

Wenn F ein Fundamentalgebiet von Γ ist, dann bezeichnet man $\{\gamma.F | \gamma \in \Gamma\}$ als *Parkettierung* (engl. "tesselation") von $\mathbb{H}$.

17.2 Beispiel. Sei $\Gamma := \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | m \in \mathbb{Z}\}$. Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$F_m := \left\{ z \in \mathbb{H} \middle| m - \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq m + \frac{1}{2} \right\}$$

ein Fundamentalgebiet von Γ. Alle F_m zusammen bilden eine Parkettierung.

17.3 Definition. Für $z, w \in \mathbb{H}$ bezeichnen wir mit $[z, w]$ die hyperbolisch kürzeste Verbindung von z und w. Wir bezeichnen $[z, w]$ als *hyperbolisches Geradenstück.*

17.4 Definition. Eine *hyperbolische Halbebene* ist eine von einem Orthokreis berandete Teilmenge von $\mathbb{H}$. Eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{H}$ ist *(hyperbolisch) konvex,* wenn sie Durchschnitt von abgeschlossenen hyperbolischen Halbebenen ist.

17.5 Bezeichnung. Zu $z, w \in \mathbb{H}$ sei $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ gegeben durch $\Phi(z) = i$ und $\Phi(w) = iy$ für ein $y < 1$. Dann ist $i\sqrt{y}$ der hyperbolische Mittelpunkt von $[i, iy]$. Der Orthokreis $L := \left\{ \sqrt{y} e^{i\varphi} \middle| 0 < \varphi < \pi \right\}$ steht senkrecht auf $[i, iy]$ und schneidet $[i, iy]$ in $i\sqrt{y}$. Dann ist $\Phi^{-1}(L)$ die *Mittelsenkrechte* von $[z, w]$.

17.6 Lemma. *Es sei* L *die Mittelsenkrechte zu* $[z, w]$*. Für alle* $u \in L$ *gilt* $\rho(z, u) = \rho(w, u)$*. Für alle* u *in der Zusammenhangskomponente von* z *in* $\mathbb{H} \setminus L$ *gilt* $\rho(z, u) < \rho(w, u)$ *und für die in der anderen gilt* $\rho(z, u) > \rho(w, u)$*.*

17.7 Theorem. *Jede Fuchssche Gruppe besitzt ein konvexes Fundamentalgebiet.*

Beweis. Wir konstruieren das Fundamentalpolygon mit der Methode von Dirichlet. Wegen Lemma 16.10 existiert $w \in \mathbb{H}$, welches von keinem $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ auf sich selbst abgebildet wird. Das zugehörige *Dirichletgebiet* ist definiert als

$$D_w(\Gamma) := \{z \in \mathbb{H} | \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\} : \rho(z, w) \leq \rho(z, \gamma.w)\}.$$

Es gilt

$$D_w(\Gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}} H_w(\gamma),$$

wobei

$$H_w(\gamma) := \{z \in \mathbb{H} | \rho(z, w) \leq \rho(z, \gamma.w)\}.$$

Wegen $\gamma.w \neq w$ und des Lemmas ist $H_w(\gamma)$ eine hyperbolische Halbebene, die von der Mittelsenkrechte auf $[w, \gamma.w]$ berandet wird. Also ist $D_w(\Gamma)$ hyperbolisch konvex.

Sei $z \in \mathbb{H}$ gegeben. Da Γ diskontinuierlich operiert, existiert $\gamma \in \Gamma$, so dass $\rho(w, \gamma.z)$ minimal ist. Für $\eta \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ gilt dann $\rho(\gamma.z, w) \leq \rho(\eta^{-1}.(\gamma.z), w) = \rho(\gamma.z, \eta.w)$. Also $\gamma.z \in D_w(\Gamma)$.

Seien nun $z \in \mathbb{H}$ und $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ mit $z \in D_w(\Gamma)$ und $\gamma.z \in D_w(\Gamma)$. Dann gilt $\rho(z, w) \leq \rho(z, \gamma.w)$, weil $z \in D_w(\Gamma)$, und $\rho(\gamma.z, w) \leq \rho(\gamma.z, \gamma.w) = \rho(z, w)$, weil $\gamma.z \in D_w(\Gamma)$. Insgesamt also $\rho(z, w) = \rho(\gamma.z, w) = \rho(z, \gamma^{-1}.w)$. Daher liegt z auf der Mittelsenkrechten durch $[w, \gamma^{-1}.w]$, also in $\partial H_w(\gamma^{-1})$. Dann entweder $z \in \partial D_w(\Gamma)$ oder $z \notin D_w(\Gamma)$.

Wir haben die Eigenschaft (a) aus der Definition nachgewiesen. Wenn wir G als das hyperbolische Innere von $D_w(\Gamma)$ definieren, dann haben wir (b) für G nachgewiesen. Wir müssen noch zeigen, dass $D_w(\Gamma) = \widetilde{G}$. Wir nehmen zum Widerspruch die Existenz einer gegen w konvergenten Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, so dass es zu jedem n ein $\gamma_n \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ gibt mit $\rho(z_n, w) > \rho(z_n, \gamma_n.w)$. Dann

$$\rho(w, \gamma_n.w) \leq \rho(w, z_n) + \rho(z_n, \gamma_n.w) < 2\rho(w, z_n) \to 0.$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass Γ diskontinuierlich operiert.

Hat man nun einen Randpunkt $z \in \partial D_w(\Gamma)$, dann liegt, da Orthokreise keine inneren Punkte haben, nicht das ganze Dirichletgebiet in der Geodätischen $[z, w]$. Es gibt also ein $\zeta \in D_w(\mathbb{H}) \setminus [z, w]$. Dann liegt das von z, w und ζ aufgespannte, hyperbolische Dreieck in $D_w(\Gamma)$ und z liegt im Abschluss des Inneren dieses Dreiecks. □

17.8 Beispiel. Wir bestimmen $D_{2i}(SL_2(\mathbb{Z}))$. Zuerst zeigen wir, dass $\gamma.(2i) \neq 2i$ für $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \setminus \{\pm \mathrm{id}\}$. Wenn $\gamma.(2i) = 2i$, dann

$$2 = \operatorname{Im} \gamma.(2i) = \frac{2}{|2ic + d|^2} = \frac{2}{4c^2 + d^2}.$$

Das kann nur sein, wenn $c = 0$ und $d = \pm 1$. In diesem Fall ist γ eine Translation. Wegen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ ist $D_{2i}(SL_2(\mathbb{Z}))$ jedenfalls eine Teilmenge von

$$F := \left\{ z \in \mathbb{H} \,\middle|\, |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \right\}.$$

Wenn F kein Fundamentalpolygon ist, dann kann das nur daran liegen, dass Eigenschaft (b) der Definition verletzt ist. In diesem Fall gibt es also $z \neq w$ im Innern von F und $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ mit $\gamma.z = w$. Wegen $|z| > 1$ und $|\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}$ gilt

$$|cz + d|^2 = c^2|z|^2 + 2cd \operatorname{Re} z + d^2 > c^2 - |cd| + d^2 = (|c| - |d|)^2 + |cd|.$$

Weil die rechte Seite nur im Fall $c = d = 0$ verschwinden könnte, ist sie eine natürliche Zahl. Daher $|cz + d| > 1$ und

$$\operatorname{Im} \gamma.z = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2} < \operatorname{Im} z.$$

Für γ^{-1} gilt das aber auch, und wir haben einen Widerspruch.

Die entsprechende Parkettierung der Ebene zeigt Abbildung 17.1.

17.9 Beispiel. Eine Parkettierung der Ebene zur Hecke-Gruppe Γ_7 zeigt Abbildung 17.2

17.10 Satz. *Es seien Γ_0 eine Fuchssche Gruppe und $\Gamma \leq \Gamma_0$ eine Untergruppe von endlichem Index m. Falls*

$$\Gamma_0 = \bigcup_{j=1}^{m} \Gamma \gamma_j$$

die Zerlegung von Γ_0 in Γ-Nebenklassen und F ein Fundamentalgebiet für Γ_0 ist, so ist $H := \bigcup_{j=1}^{m} \gamma_j.F$ ein Fundamentalgebiet für Γ.

17.11 Beispiel. Wir hatten in der Übung gesehen, dass

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) \cup \Gamma(2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cup \Gamma(2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \Gamma(2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cup \Gamma(2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cup \Gamma(2)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das gemäß Satz 17.10 dazu gehörige Fundamentalgebiet zeigt Abbildung 17.3.

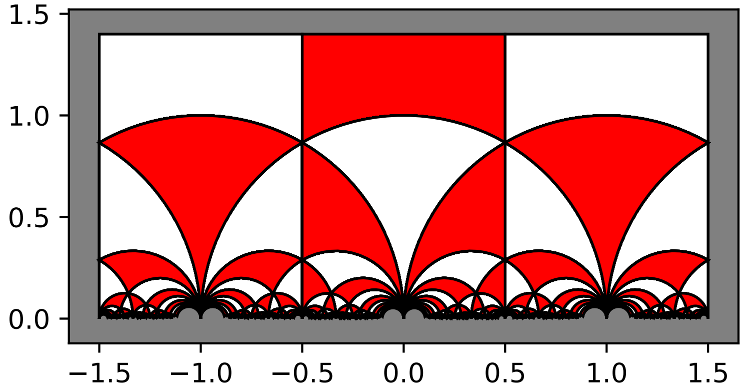

Abbildung 17.1: Parkettierung der Modulgruppe

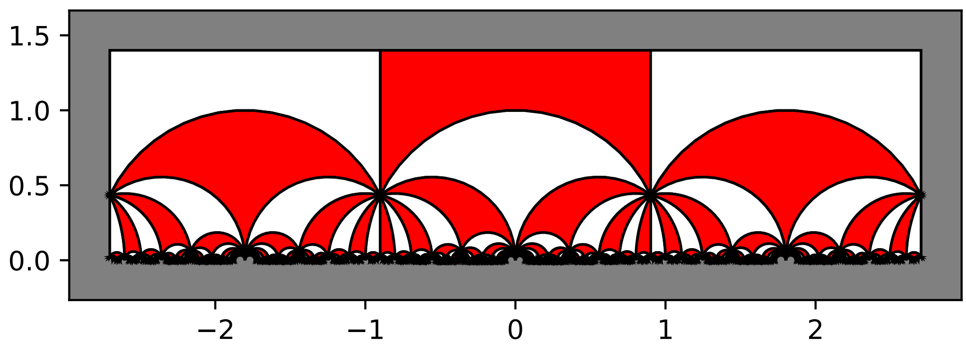

Abbildung 17.2: Parkettierung der Hecke-Gruppe Γ_7

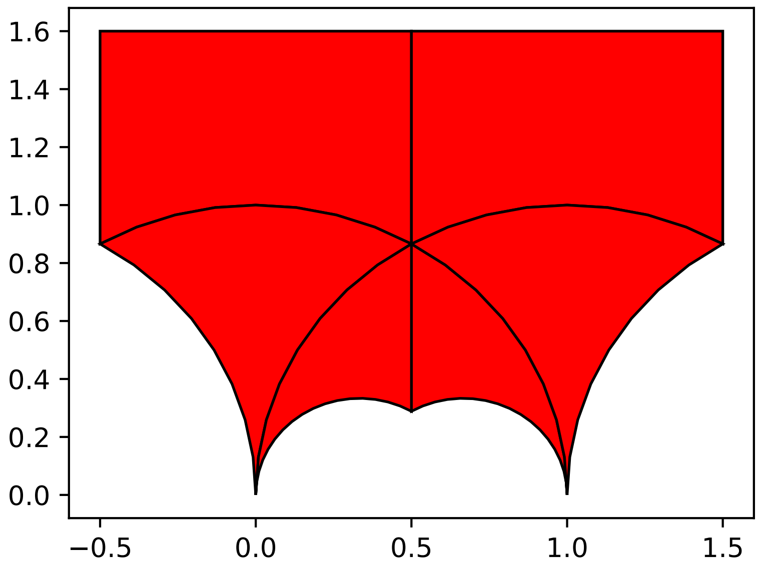

Abbildung 17.3: Fundamentalgebiet der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(2)$

17.12 Satz. *Die zu einem Dirichletgebiet* $D_w(\Gamma)$ *gehörige Parkettierung ist lokal endlich, d. h. zu jedem Kompaktum* $K \subset \mathbb{H}$ *gibt es nur endlich viele* $\gamma \in \Gamma$ *mit* $\gamma.D_w(\Gamma) \cap K \neq \emptyset$.

17.13 Satz. *Es sei* F *Dirichletgebiet zu einer Fuchsschen Gruppe. Zu jedem Kompaktum* K *existieren höchstens endlich viele hyperbolische Halbebenen* $H_1, \ldots, H_k$, *so dass* $F \cap K = K \cap H_1 \cap H_k$.

17.14 Definition. Ein *konvexes Fundamentalpolygon* für Γ ist ein konvexes, lokal endliches Fundamentalgebiet.

17.15 Korollar. *Es sei* Γ *eine Fuchssche Gruppe. Ihr Dirichletgebiet ist ein konvexes Fundamentalpolygon.*

17.16 Definition. Es sei F ein konvexes Fundamentalpolygon einer Fuchsschen Gruppe Γ. Eine *Seite* von F ist eine geodätische Strecke positiver Länge der Form $F \cap \gamma.F$ für ein $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$.

Wenn es $\gamma, \eta \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ mit $\gamma \neq \eta$ gibt, so dass $F \cap \gamma.F \cap \eta.F$ genau ein Element z enthält, dann ist z eine *Ecke* von F.

17.17 Bemerkung. Im folgenden muss Γ als Untergruppe der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ verstanden werden.

(a) In §9.3 von Beardon [1] wird gezeigt, dass jeder Randpunkt von F, der in $\mathbb{H}$ liegt, auf mindestens einer Seite liegt. Ecken sind genau die Randpunkte, die auf zwei verschiedenen Seiten liegen.

(b) Der Winkel an einer Ecke kann aber den Wert π annehmen.

(c) Zu jeder Seite s existiert ein eindeutig bestimmtes $\gamma_s \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ mit $s = F \cap \gamma_s.F$. Für dieses γ_s ist $s' := \gamma_s^{-1}.s$ ebenfalls eine Seite von F, die allerdings nicht notwendig verschieden von s zu sein braucht.

(d) Es gilt $\gamma_{s'} = \gamma_s^{-1}$ und daher $(s')' = s$.

(e) Die Menge $\{\gamma_s |\ s \text{ Seite von } F\}$ ist ein Erzeugendensystem von Γ.

(f) Es ist nicht ausgeschlossen, dass $s = s'$. Sagen wir $s = [z, w]$. Wegen $\gamma \neq \mathrm{id}$ muss gelten $\gamma.z = w$ und $\gamma.w = z$. Wegen des Zwischenwertsatzes gibt es einen Punkt $u \in [z, w]$, $u \neq z, w$ mit $\gamma.u = u$. Daher ist γ elliptisch. Da γ nur einen Fixpunkt haben kann, ist u aus Symmetriegründen der Mittelpunkt von $[z, w]$.

    Wenn über den Rand integriert werden soll, dann bezeichnet man auch u als Ecke von F und entsprechend die Stücke $[z, u]$ und $[u, w]$ als Seiten.

17.18 Beispiel. (a) Ein Erzeugendensystem der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ wird gegeben durch τ und σ, wobei

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir hatten in Abbildung 17.3 ein konvexes Fundamentalpolygon der $\Gamma(2)$ gesehen. Die Seiten s_j, die zugehörigen γ_s sind und die transformierten Seiten $\gamma.s_j{}^{-1}$ sind

$$s_1 = \left[-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \infty\right], \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \left[\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \infty\right],$$

$$s_3 = \left[-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, 0\right], \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s_4 = \left[\frac{1}{2} + \frac{i}{6}\sqrt{3}, 0\right],$$

$$s_5 = \left[\frac{1}{2} + \frac{i}{6}\sqrt{3}, 1\right], \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad s_6 = \left[\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, 1\right].$$

Wegen der Bemerkung wir $\Gamma(2)$ also von den angegebenen drei Matrizen erzeugt. Wegen $\left(\begin{smallmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$ genügen sogar beiden ersten.

17.19 Satz. *Alle konvexen Fundamentalpolygone einer Fuchsschen Gruppe haben denselben hyperbolischen Flächeninhalt.*

17.20 Definition. Eine Fuchssche Gruppe heißt *cofinit,* wenn ihre konvexen Fundamentalpolygone endlichen hyperbolischen Flächeninhalt besitzen.

Sie heißt *cokompakt,* wenn ihre konvexen Fundamentalpolygone kompakt sind.

Sie heißt *geometrisch endlich,* wenn sie ein konvexes Fundamentalpolygon mit endlich vielen Seiten besitzt.

17.21 Satz (Siegel (s. Katok [15], Theorem 4.1.1). *Cofinite Fuchssche Gruppen sind geometrisch endlich.*

17.22 Bemerkung. Sei F ein konvexes Fundamentalpolygon. Der Rand von F in der $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ besteht aus den Seiten von F und möglicherweise noch Punkten in $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ und abgeschlossenen reellen Intervallen. Diese Intervalle bezeichnet man als *freie Seiten.*

17.23 Satz. *Sei Γ eine geometrisch endliche Gruppe erster Art. Dann ist Γ cofinit.*

Das folgende Lemma wird für das Poincarésche Scheibenmodell ausgesprochen.

17.24 Lemma. *Sei $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Fuchsschen Gruppe Γ mit konvexem Fundamentalpolygon F. Dann konvergiert der euklidische Durchmesser von $\gamma_n.F$ gegen 0.*

17.25 Satz. *Sei Γ eine cofinite Fuchssche Gruppe, dann ist Γ von erster Art.*

17.26 Satz. *Es seien Γ eine Fuchssche Gruppe, $\sigma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ und*

$$B := \left\{\sigma\gamma\sigma^{-1}\middle|\gamma \in \Gamma\right\}.$$

Dann sind B und Γ isomorph.

Es gilt $\gamma.z = z$ für ein $\gamma \in \Gamma$ genau dann, wenn $\beta.(\sigma.z) = \sigma.z$ für ein $\beta \in B$.

17.27 Definition. Es sei Γ eine Fuchssche Gruppe. Ein Element $\gamma \in \Gamma\setminus\{\mathrm{id}\}$ heißt

(a) *elliptisch,* wenn es genau ein $z \in \mathbb{H}$ mit $\gamma.z = z$ gibt,

(b) *parabolisch,* wenn es genau ein $z \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ mit $\gamma.z = z$ gibt,

(c) *hyperbolisch,* wenn es $z, w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $z \neq w$, $\gamma.z = z$ und $\gamma.w = w$ gibt.

17.28 Satz. *Es sei* $\Gamma \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *eine Gruppe, welche ein hyperbolisches Element* η *und ein parabolisches Element* π *enthält, so dass* $\pi.x = x$ *und* $\eta.x = x$ *für dasselbe* x*. Dann ist* Γ *nicht diskret.*

17.29 Satz. *Sei* Γ *eine cofinite, nicht cokompakte Fuchssche Gruppe. Dann enthält* Γ *ein parabolisches Element.*

18 Automorphe Funktionen

18.1 Definition. Eine Funktion $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *automorph* bzgl. Γ, wenn $f(\gamma z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$ und alle $\gamma \in \Gamma$. Der Raum $C^\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ besteht aus allen automorphen Funktionen von der Klasse C^∞.

18.2 Bezeichnung. Sei $1 \leq p < \infty$ und sei F ein Fundamentalpolygon von Γ. Für eine messbare, automorphe Funktion f setzen wir

$$\|f\|_p = \left(\int_F |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Wegen der Invarianz des hyperbolischen Flächeninhalts μ hängt $\|f\|_p$ nicht von der Wahl von F ab. Wir setzen

$$L^p(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \{f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \text{ automorph} \mid \|f\|_p < \infty\}.$$

18.3 Satz. *(a)* $L^p(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ *ist ein Banachraum.*

(b) Durch $(f, g) = \int_F f\overline{g}\, d\mu$ *wird* $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ *zu einem Hilbertraum.*

(c) Der Raum $C^\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ *ist dicht in* $L^p(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.

18.4 Satz. *Es sei* Γ *eine Fuchssche Gruppe erster Art. Der durch* $D(A) := C^\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ *und* $Au = u - y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ *gegebene Operator ist koerziv.*

18.5 Bemerkung. Im Beweis des vorigen Theorems wurde gezeigt, dass

$$H_E = \{f \in L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mu) \mid f \text{ besitzt erste Ableitungen in } L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \lambda_2)\},$$

versehen mit der Norm

$$\|f\|_E^2 = \|f\|^2_{L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mu)} + \|\nabla f\|^2_{L^2(F,\lambda_2)}.$$

Man beachte, dass die (euklidische) Greensche Formel zeigt, dass für automorphes f das Integral $\int_F \langle \nabla u, \nabla u\rangle \, d\lambda_2$ unabhängig von der Wahl des konvexen Fundamentalpolygons F ist.

18.6 Definition. Der automorphe Laplace-Operator ist definiert als $\Delta = A_F - \mathrm{id}$, wobei A_F die Friedrichserweiterung des Operators aus Satz 18.4 ist.

18.7 Satz. *Sei Γ eine cokompakte Fuchssche Gruppe. Dann ist die Einbettung $H_E \hookrightarrow L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mu)$ kompakt. Insbesondere gelten die Aussagen von Theorem 4.3.*

Bemerkung. Für Fuchssche Gruppen Γ erster Art werden wir zeigen, dass $(\mathrm{id} + \Delta)^{-1}$ genau dann kompakt ist, wenn Γ cokompakt ist.

19 Eisenstein-Reihen

In diesem Abschnitt sei Γ eine cofinite Fuchssche Gruppe, welche nicht cokompakt ist. Nach Satz 17.29 besitzt Γ ein parabolisches Element γ. Auf Blatt 11 wird gezeigt, dass man durch Übergang zu einer durch Konjugation äquivalenten Gruppe erreichen kann, dass

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Wir gehen davon aus, dass diese Situation hergestellt worden ist.

Hierbei ist $\Gamma_z := \{\gamma \in \Gamma | \gamma.z = z\}$ der *Stabilisator* von z. Mit $\Gamma_\infty \backslash \Gamma = \{\Gamma_\infty \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ bezeichnen wir die Menge der Rechtsnebenklassen des Stabilisators von ∞.

19.1 Definition. Sei $\varphi \colon (0, \infty) \to \mathbb{C}$ messbar. Die formale Reihe

$$\mathcal{E}_\infty(z, \varphi) = \sum_{[\gamma] \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \varphi(\operatorname{Im}(\gamma z)) \tag{19.1}$$

bezeichnet man als gewichtete Eisenstein-Reihe (hierbei ist φ das Gewicht).

19.2 Satz. *(a)* $\varphi(\operatorname{Im}(\gamma z))$ *hängt nicht vom Repräsentaten* γ *der Nebenklasse ab.*

(b) Wenn $\int_0^\infty \frac{|\varphi(y)|}{y^2} dy < \infty$*, dann konvergiert die Reihe (19.1) absolut in* $L^1(\Gamma \backslash \mathbb{H}, \mu)$*. Speziell ist dann* $\mathcal{E}_\infty(z, \varphi)$ *automorph.*

19.3 Theorem (Jørgensensche Ungleichung, siehe Elstrodt, Grunewald und Mennicke [6], Theorem 2.4.1). *Wenn* $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$ *eine diskrete Untergruppe erzeugen, dann gilt*

$$\left|\operatorname{tr}(A)^2 - 4\right| + \left|\operatorname{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2\right| \geq 1,$$

außer wenn eine der beiden folgenden Aussagen gelten

(a) $\operatorname{tr}(A) = 2$ *und* B *lässt den einzigen Fixpunkt von* A *fest,*

(b) $BAB^{-1} \in \{A, A^{-1}\}$.

19.4 Lemma. *Unter den Voraussetzungen dieses Kapitels gelten:*

(a) *Wenn* $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, *aber* $\gamma \notin \Gamma_\infty$, *dann* $|c| \geq 1$.

(b) *Wenn* $\operatorname{Supp} \varphi \subseteq [1, \infty[$, *dann gilt* $\mathcal{E}_\infty(z, \varphi) = \varphi(z)$ *für alle* z *mit* $\operatorname{Im} z \geq 1$.

19.5 Satz. *Sei* $\varphi \in C^\infty(]0, \infty[)$ *mit* $\operatorname{Supp} \varphi \subset [\epsilon, \infty[$ *für ein* $\epsilon > 0$. *Dann ist die Reihe* (19.1) *endlich und* $\mathcal{E}_\infty(\cdot, \varphi)$ *ist von der Klasse* C^∞.

Wir müssen für den hyperbolischen Laplace-Operator noch die folgende Rechnung nachholen:

19.6 Satz. *Sei* $f \in C^2(\mathbb{H})$ *und sei* $\gamma \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$. *Dann* $\Delta(f \circ \gamma) = (\Delta f) \circ \gamma$.

19.7 Lemma. *Es sei* Γ *eine Fuchssche Gruppe erster Art, welche ein parabolisches Element mit Fixpunkt* ∞ *besitzt. Für jedes Paar* $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ *gibt es dann höchstens eine Nebenklasse* $[\gamma]$ *in* $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$ *von der Form* $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

19.8 Bemerkung. Der nächste Satz beruht auf der Beobachtung, dass $\Delta y^s = s(1-s)y^s$. Das bedeutet, dass die Eisensteinreihe $\mathcal{E}_\infty(\cdot, y^s)$ die Eigenwertgleichung für $\lambda = s(1-s)$ erfüllt, falls sie konvergiert. In den Übungen sehen wir, dass das für $\operatorname{Re} s > 1$ der Fall ist. Dann ist sie aber nicht in $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H}, \mu)$.

19.9 Satz. *Sei* Γ *eine Fuchssche Gruppe erster Art, die nicht cokompakt ist. Dann* $[\frac{1}{4}, \infty[\subset \sigma(\Delta)$.

Beweis. Zu vorgegebenem $\lambda \geq \frac{1}{4}$ setze $s = \frac{1}{2} + i\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}$. Dann $1 - s = \bar{s}$ und $s(1-s) = |s|^2 = \lambda$. Wir wählen $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\chi(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $\chi(x) = 1$ für $x \geq 1$. Für hinreichend großes R setzen wir

$$\varphi_R(y) \coloneqq \begin{cases} \chi(y-1)y^s, & 0 < y \leq R, \\ \chi\left(3 - \frac{y}{R}\right) y^s, & y > R. \end{cases}$$

Wegen der Invarianz gilt $\Delta \mathcal{E}_\infty(\cdot, \varphi_R)) = -\mathcal{E}_\infty(\cdot, y^2 \varphi_R'')$. Dabei

$$\begin{aligned} & -y^2 \varphi_R''(y) \\ &= \begin{cases} -\chi''(1+y)y^{s+2} - 2s\chi'(1+y)y^{s+1} - s(s-1)\chi(1+y)y^s, & 0 < y < R, \\ -\frac{1}{R^2}\chi''\left(3 - \frac{y}{R}\right) y^{s+2} + \frac{2s}{R}\chi'\left(3 - \frac{y}{R}\right) y^{s+1} - s(s-1)\chi\left(3 - \frac{y}{R}\right) y^s, & y > R. \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen der Folgerung aus der Jørgensenschen Ungleichung kann zu es zu jedem $z \in \mathbb{H}$ höchstens ein $\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma$ mit $\operatorname{Im} \gamma.z > 1$ geben. Für jedes $z \in \mathbb{H}$ hat die Reihe (19.1) also höchstens eine von Null verschiedenen Term. (Die Reihe drückt also eine Fallunterscheidung aus.) Das bedeutet, dass das Quadrat von (19.1) gliedweise bestimmt werden kann. Insbesondere

$$\|(\lambda - \Delta)\mathcal{E}_\infty(\cdot, \varphi_R)\|^2_{L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mu)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_1^{3R} (\lambda\varphi_R(y) - y^2\varphi_R''(y))^2 \, dy \, dx.$$

Der Integrand verschwindet für $2 \leq y \leq 2R$. Das Integral für $1 \leq y \leq 2$ hängt nicht von R ab. Bei der Abschätzung des Integrals für $2R \leq y \leq 3R$ müssen die drei Terme des zweiten Teils der Fallunterscheidung einzeln betrachtet werden. Der dritte hebt sich dabei gegen $\lambda\mathcal{E}_\infty(\cdot, \varphi_R)$ weg. Wir schätzen den zweiten ab durch

$$C_1 \int_{2R}^{3R} \frac{1}{R^2} |y^{s+1}|^2 \frac{dy}{y^2} = \frac{C_1}{R^2} \int_{2R}^{3R} y \, dy = \frac{5C_1}{2}.$$

Der erste Term wird abgeschätzt durch

$$C_2 \int_{2R}^{3R} \frac{1}{R^4} |y^{s+2}|^2 \frac{dy}{y^2} = \frac{C_2}{R^4} \int_{2R}^{3R} y^3 \, dy = \frac{65C_2}{4}.$$

Damit haben wir gesehen

$$\|(\lambda - \Delta)\mathcal{E}_\infty(\cdot, \varphi_R)\|^2_{L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mu)} = O(1), \quad R \to \infty,$$
$$\|\mathcal{E}(\cdot, \varphi_R)\|_{L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mu)} \geq \sqrt{\log R}.$$

Also ist $\lambda - \Delta$ nicht invertierbar. □

19.10 Vermutung (Selbergsche Spektrallückenvermutung). Wenn Δ der automorphe Laplace-Operator zu $\Gamma(N)$ ist, dann $\sigma(\Delta) \cap \,]0, \frac{1}{4}[\, = \emptyset$.

20 Fourier-Entwicklung automorpher Funktionen

Es gelten dieselben Vereinbarungen wir in Kapitel 19.

20.1 Satz. *Sei* Γ *eine nicht cokompakte Fuchssche Gruppe erster Art mit* $\Gamma_\infty = \{\left(\begin{smallmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) | m \in \mathbb{Z}\}$. *Es sei* $f \in C^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ *derart, dass* $\Delta f = \lambda f$ *für ein* $\lambda \neq \frac{1}{4}$ *und dass* $\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x+iR)|$ *für* $R \to \infty$ *höchstens polynomiell wächst. Es sei* $s = \frac{1}{2} + i\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}$. *Dann existieren eine Folge* $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ *und* β_0 *in* $\mathbb{C}$, *so dass*

$$f(x+iy) = \alpha_0 y^s + \beta_0 y^{1-s} + \sqrt{y} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} \alpha_m K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\, e^{2\pi i m x}.$$

Bemerkung. Im Fall $\lambda = \frac{1}{4}$ muss y^{1-s} durch $\sqrt{y}\ln y$ ersetzt werden.

20.2 Satz. *Für* $\operatorname{Re} s > 1$ *konvergiert die Reihe* $\mathcal{E}_\infty(\cdot, y^s)$ *gegen eine Funktion von der Klasse* C^∞. *Diese Funktion erfüllt*

$$-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathcal{E}_\infty(\cdot, y^s) = s(1-s)E_\infty(\cdot, y^s).$$

20.3 Bemerkung. Wenn man Satz 20.1 anwendet, erhält man für s mit $\operatorname{Re} s > 1$

$$\mathcal{E}_\infty(x+iy, y^s) = y^s + \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\varphi(s)y^{1-s} + \sum_{m\neq 0}\varphi_m(s)\sqrt{y}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)e^{2\pi i m x}. \tag{20.1}$$

Im Fall der Modulgruppe $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ kann man die φ_m bestimmen. Beispielsweise hat man

$$\varphi(s) = \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)},$$

wobei ζ die Riemannsche ζ-Funktion ist. Findet man in Kubota [17] (4.4.1).

20.4 Satz. *Die Funktionen* φ *und* φ_m *aus der Entwicklung* (20.1) *sind holomorph in* $\{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} s > 1\}$.

Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass die Funktionen φ und φ_m, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, meromorphe Fortsetzungen nach $\mathbb{C}$ besitzen. Zusammen mit einem Beweis der Bemerkung hat man dann auch die meromorphe Fortsetzbarkeit der Riemannschen ζ-Funktion gezeigt. Dieses Ergebnis hatten wir allerdings in der Funktionentheorie schon durch Summation der divergenten Reihe bewiesen.

21 Pseudo-Laplace Operatoren

Es gelten dieselben Vereinbarungen wir in Kapitel 19. Mit F wird ein konvexes Fundamentalpolygon bezeichnet, welches ∞ als Randpunkt besitzt.

Der Einfachheit halber setzen wir außerdem voraus, dass ∞ der einzige Randpunkt von F ist, der nicht in $\mathbb{H}$ liegt.

Wir folgen der Arbeit [3] von Colin de Verdière.

21.1 Bezeichnung. Für $\eta > 1$ definieren wir einen Operator A_η in einem Unterraum H_η von $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mu)$. Der Definitionsbereich $D(A_\eta)$ besteht aus denjenigen $f \in L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mu)$, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) In der Fourierentwicklung

$$f(x+iy) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(y) e^{2\pi i m x}$$

gilt $a_0(y) = 0$ für alle $y \geq \eta$.

(b) Der distibutionelle Gradient ∇f (im euklidischen Sinn) liegt in L^1_{loc}.

(c) $\int_F (\nabla f, \nabla f)\, d\lambda_2 < \infty$.

Der Unterraum H_η von $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mu)$ ist nun der Abschluss von $D(A_\eta)$.

Für $u \in D(A_\eta)$ definieren wir $A_\eta u$ durch

$$(A_\eta u, v)_{L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mu)} = \int_F u\bar{v}\, d\mu + \int_F (\nabla u, \nabla v)\, d\lambda_2, \quad v \in D(A_\eta).$$

Dann ist A_η offenbar symmetrisch und koerziv. Es ist auch klar, dass $A_\eta u \in H_\eta$ für $u \in D(A_\eta)$.

Wenn $(A_\eta)_F$ die Friedrichs-Erweiterung ist, dann setzen wir $\Delta_\eta = (A_\eta)_F - \mathrm{id}$. Die Operatoren Δ_η bezeichner Colin de Verdière als *Pseudo-Laplace Operatoren.*

Für ein $u \in L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mu)$ und $m\imath\mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $u_m(y)$ den m-ten Fourier-Koeffizienten von $u(\cdot, y)$.

21.2 Bezeichnung. Eine Teilmenge K eines metrischen Raums heißt *präkompakt,* wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $\{x_1, \dots, x_n\} \subset K$ gibt, so dass $K \subset \bigcup_{j=1}^n B_\epsilon(x_j)$.

In Meise und Vogt [18], Satz 4.8, wird gezeigt, dass präkompakte Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums kompakt sind.

21.3 Satz. *Der Operator Δ_η besitzt eine kompakte Resolvente.*

21.4 Bezeichnung. Mit Δ bezeichnen wir den (positiven) hyperbolischen Laplace Operator auf $\mathbb{H}$. Mit Δ_∞ bezeichnen wir den automorphen Laplace-Operator zur Fuchsschen Gruppe Γ.

21.5 Definition. Es sei E ein lokalkonvexer $\mathbb{C}$-Vektorraum und es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

(a) Eine Abbildung $f\colon \Omega \to E$ heißt *schwach holomorph,* wenn für alle $y \in E'$ die Funktion $y \circ f$ holomorph im klassischen Sinn ist.

(b) Die Abbildung heißt *stark holomorph,* wenn für jedes $z \in \Omega$ der Grenzwert

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

in E existiert.

In Rudin [21], Theorem 3.31 wird gezeigt: Wenn E ein Fréchetraum ist, dann sind die Begriffe schwach holomorph und stark holomorph äquivalent.

21.6 Satz. *Es sei $h \in C^\infty(]0, \infty[)$ mit $h(y) = 0$ für $y \leq b$ für ein $b > \eta$ und $h(y) = 1$ für $y \geq b + 1$. Wir setzen*

$$\Omega := \left\{ s \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re} s > \frac{1}{2},\ s(1-s) \notin \sigma(\Delta_\infty) \right\}.$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmt Funktion $E\colon \mathbb{H} \times \Omega \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

(a) $(\Delta - s(1-s))E(\cdot, s) = 0$,

(b) $E(z, s) - h(y)y^s \in L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mu)$, *wobei* $y = \operatorname{Im} z$.

Die Funktion $s \mapsto E(z, s) - h(y)y^s$ ist holomorph mit Werten im $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mu)$.

21.7 Lemma. *Es gilt $E(z, s) = \mathcal{E}_\infty(z, y^s)$, falls $\operatorname{Re} s > 1$.*

22 Pole der Resolventen

Zuerst mache ich ein vektorweriges Integral wie in Aufgabe 9.5 von Kaballo [12].

22.1 Lemma. *Es sei* E *ein Banachraum und es sei* $J\colon E \hookrightarrow E''$ *die Inklusion in den Bidualen. Ferner sei eine stetige Abbildung* $f\colon [a,b] \to E$ *gegeben. Offenbar wird durch*

$$F\colon E' \to \mathbb{C}, \quad \langle F, T\rangle := \int_a^b \langle T, f(t)\rangle \, dt,$$

ein Element $F \in E''$ *gegeben. Dieses* F *liegt sogar in* $J(E)$*.*

22.2 Definition. In der Situation von Lemma 22.1 setzt man

$$\int_a^b f(t) \, dt := F \in E.$$

Entsprechend sind dann auch Wegintegrale erkläert.

Ich folge nun dem Abschnitt I.5.3 des Buchs von Kato [14].

22.3 Lemma. *Es sei* A *ein Operator im Hilbertraum* H *mit kompakter Resolvente und es sei* $0 \in \sigma(A)$*. Sei* $B_r(0) \setminus \{0\} \subset \rho(A)$*. Dann gilt*

$$R(A,\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta^n A^n \quad \textit{falls } |\zeta| < r, \tag{22.1}$$

wobei

$$A_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_\epsilon} R(A,\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}$$

für ein beliebiges $\epsilon < r$*.*

22.4 Lemma. *Setzt man*

$$\eta_n := \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

so gilt für A_n *wie in Lemma 22.3*

$$A_n A_m = (\eta_n + \eta_m - 1) A_{n+m+1}. \tag{22.2}$$

22.5 Bemerkung. Aus (22.2) folgen nun:

(a) $P := -A_{-1}$ ist eine Projektion.

(b) Mit $S := A_0$ gilt $A_n = S^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Mit $D := -A_{-2}$ gilt $A_{-n} = -D^{n-1}$ für alle $n \geq 2$.

(d) Daher hat die Laurentreihe von R im Ursprung die Gestalt $R(A, \zeta) = R_1(A, \zeta) + R_2(A, \zeta)$ mit

$$R_1(A, \zeta) = -\zeta^{-1}P - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{-n-1}D^n \quad \text{und} \quad R_2(A, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n S^{n+1}.$$

22.6 Satz. *Die Unterräume* $H_1 := PH$ *und* $H_2 := (1 - P)H$ *sind invariant unter* $R_1(A, \zeta)$ *bzw.* $R_2(A, \zeta)$.

Die Dimension von H_1 *ist endlich.*

22.7 Lemma. $D|_{H_1}$ *ist nilpotent.*

22.8 Theorem. *Wenn* A *kompakte Resolventen* $R(A, \zeta)$ *besitzt, dann ist die Resolvente eine meromorphe Funktion von* ζ.

23 Meromorphe Fortsetzung der Eisensteinreihen

Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in Kapitel 21. Es gilt $\eta > 2$.

Sei $h(y) \equiv 0$ in der Nähe von 1 und $\equiv 1$ in der Nähe von η. Für $\neq \frac{1}{2}$ und $s(1-s) \notin \sigma(\Delta_\eta)$ sei $H(y,s) := (s(1-s)-\Delta)(h(y)y^s)$ und $\widetilde{H}(z,s)$ diejenige automorphe Funktion, die in F mit H übereinstimmt. Wir setzen

$$F(z,s) := h(y)y^s - \big((s(1-s)-\Delta_\eta)^{-1}H(\cdot,s)\big)(z).$$

Für $1 < y < \eta$ gilt dann $(s(1-s)-\Delta)F = 0$. Daher gibt es $A(s)$ und $B(s)$ mit $F_0(z,s) = A(s)y^s + B(s)y^{1-s}$. Weil die Resolvente nach H_η abbildet, gilt $F_0(\eta,s) = \eta^s$.

23.1 Lemma. *Setzt man*

$$\widetilde{F}(z,s) := F(z,s) + \chi_{[\eta,\infty[}(y)\left(A(s)y^s + B(s)y^{1-s} - y^s\right),$$

so gilt $(s(1-s)-\Delta)F(z,s) = 0$.

23.2 Lemma. A *und* B *sind meromorph in* $\mathbb{C}$.

Für $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ gilt $\widetilde{F}(z,s) = A(s)y^s + g(y,s)$ für eine L^2-Funktion g. Daher gilt

$$E(z,s) = A(s)\widetilde{F}(z,s)$$

Für s mit $\operatorname{Re} s < \frac{1}{2}$ gilt $\widetilde{F}(z,s) = B(s)y^{1-s} + \widetilde{g}(y)$ für eine L^2-Funktion $\widetilde{g}$. Also

$$E(z,1-s) = B(s)\widetilde{F}(z,s).$$

Beide Gleichungen gelten überall. Wir schreiben die Fourierentwicklung (20.1) noch einmal hin, multiplizieren aber die Gamma-Funktion nach φ hinein:

$$\mathcal{E}_\infty(x+iy,y^s) = y^s + \varphi(s)y^{1-s} + \sum_{m\neq 0} \varphi_m(s)\sqrt{y}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)e^{2\pi i m x}.$$

Also $\varphi(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ und $\varphi(1-s) = \frac{A(s)}{B(s)}$. Wir haben gezeigt:

23.3 Theorem. *Die Eisensteinreihen besitzen eine meromorphe Fortsetzung nach $\mathbb{C}$ in dem Sinn, dass alle Fourierkoeffizienten meromorph sind. Es gelten*

$$\begin{aligned} \varphi(s)\varphi(1-s) &= 1, \\ E(z,s) &= \varphi(s)E(z,1-s). \end{aligned}$$

Beweis. Für $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ folgt aus Satz 21.6, dass

$$E(z,s) = \frac{1}{A(s)}\widetilde{F}(z,s),$$

weil beide dieselbe Differentialgleichung lösen und die Differenz zwischen linker und rechter Seite in $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mu)$ liegt. Für $\operatorname{Re} s < \frac{1}{2}$ ergibt sich mit demselben Argument

$$E(z,1-s) = \frac{1}{B(s)}\widetilde{F}(z,s).$$

Die beiden Gleichungen implizieren nun jeweils

$$\varphi(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad \text{und} \quad \varphi(1-s) = \frac{A(s)}{B(s)}. \qquad \square$$

23.4 Bemerkung. Die Vermutung von Phillips und Sarnak besagt, dass eine generische, cofinite, nicht cokompakte Fuchssche Gruppe nur endlich viele Eigenwerte besitzt. Die spannende Frage ist hier natürlich: Was bedeutet generisch? Arithmetische Gruppen wie $\Gamma(N)$ sind jedenfalls nicht generisch.

Die Vermutung von Selberg und Roelcke besagt, dass jede cofinite, nicht cokompakte Fuchssche Gruppe unendlich viele Eigenwerte besitzt. Diese Version der Vermutung von Selberg und Roelcke wird von Venkov berichtet. Elstrodt, Grunewald und Mennicke schreiben ihnen sogar eine schärfer Formulierung zu, die ich im folgenden erläutern werde.

23.5 Definition. Eine ganze Funktion $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ ist von *endlicher Ordnung,* wenn es $\kappa, C > 0$ gibt, so dass

$$|f(z)| \leq Ce^{|z|^\kappa}.$$

Eine meromorphe Funktion h ist von endlicher Ordnung, wenn es ganze Funktionen f und g von endlicher Ordnung κ gibt, so dass $h = \frac{f}{g}$.

In beiden Fällen ist das Infimum über diese κ die *Ordnung* der Funktion.

23.6 Beispiel. (a) Der Sinus hat die Ordnung 1. Das Infimum wird angenommen.

(b) Die Gamma-Funktion hat ebenfalls die Ordnung 1, das Infimum wird aber nicht angenommen. Das sieht man an der Stirlingschen und der Spiegelungsformel.

(c) Man kann zeigen, dass die Riemannsche ζ-Funktion ebenfalls die Ordnung 1 besitzt.

(d) Die von Elstrodt, Grunewald und Mennicke angegebene Formulierung der Selberg-Roelcke Vermutung besagt, dass die Ordnung von φ immer gleich §1§ ist.

23.7 Bezeichnung. Mit $N(R)$ bezeichnen wir die Zahl der Eigenwerte λ von Δ_∞ mit $\lambda \leq R$.

23.8 Theorem (Weyl-Selbergsche Asymptotik, Venkov [24], (7.8)).

$$N(r) - \frac{1}{4\pi}\int_{-\sqrt{R-\frac{1}{4}}}^{\sqrt{R-\frac{1}{4}}} \frac{\varphi'\left(\frac{1}{2}+ir\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}+ir\right)}\, dr \sim R\frac{\mu(F)}{4\pi}, \quad R \to \infty.$$

23.9 Bemerkung. (a) Der Intergrand des zweiten Terms ist negative.

(b) Die Philosophie ist an dieser Stelle, dass die logarithmische Ableitung einer ganzen Funktion der Ordnung κ wächst wie $R^{\kappa+\epsilon-1}$.

(c) Im Fall $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$\varphi(s) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)}.$$

Das ist eine Funktion der Ordnung 1. Genauere Abschätzungen ergeben tatsächlich, dass in der Weyl-Selbergschen Asymptotik der erste Term überwiegt.

(d) Mit demselben Ergebnis wurde das für die anderen Hauptkongruenzgruppen gemacht. Kongruenzuntergruppen sind arithmetisch.

(e) Die Hecke-Gruppe Γ_d ist nur für $d = 3, 4, 6$ arithmetisch. In allen Fällen gibt es aber unendlich viele ungerade Eigenfunktionen, denn die Weyl-Selbergsche Asymptotik kann auch für die ungeraden Funktionen allein gezeigt werden. Dort verschwindet das Integral dann komplett, weil die Eisensteinreihen gerade sind.

Literaturverzeichnis

[1] A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, vol. 91 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1983 original.

[2] S. J. Chapman, *Drums that sound the same*, Amer. Math. Monthly, 102 (1995), pp. 124–138.

[3] Y. Colin de Verdière, *Pseudo-laplaciens. II*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 33 (1983), pp. 87–113.

[4] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik I.* Heidelberger Taschenbücher. 30. 3. Aufl. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer-Verlag XV, 469 S. mit 26 Abb. (1968)., 1968.

[5] J. Dodziuk, *Eigenvalues of the Laplacian and the heat equation*, Amer. Math. Monthly, 88 (1981), pp. 686–695.

[6] J. Elstrodt, F. Grunewald, and J. Mennicke, *Groups acting on hyperbolic space*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998. Harmonic analysis and number theory.

[7] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1966.

[8] C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert, *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Invent. Math., 110 (1992), pp. 1–22.

[9] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, vol. 24 of Monographs and Studies in Mathematics, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[10] H. Iwaniec, *Spectral methods of automorphic forms*, vol. 53 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI; Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, second ed., 2002.

[11] J. Jost, *Partial differential equations*, vol. 214 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, second ed., 2007.

[12] W. Kaballo, *Grundkurs Funktionalanalysis.*, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2011.

[13] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly, 73 (1966), pp. 1–23.

[14] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132.

[15] S. Katok, *Fuchsian groups*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.

[16] J. Korevaar, *Tauberian theory*, vol. 329 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 2004. A century of developments.

[17] T. Kubota, *Elementary theory of Eisenstein series*, Kodansha, Tokyo, 1973.

[18] R. Meise and D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis.*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2nd revised ed. ed., 2011.

[19] F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, AKP Classics, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1997. Reprint of the 1974 original [Academic Press, New York; MR0435697 (55 #8655)].

[20] M. Renardy and R. C. Rogers, *An introduction to partial differential equations*, vol. 13 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993.

[21] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[22] C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen.*, Abh. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl., 1929 (1929), p. 70 s.

[23] H. Triebel, *Höhere Analysis.* Hochschulbücher für Mathematik. Bd. 76. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 704 S. m. 42 Abb. M 60.00 (1972)., 1972.

[24] A. B. Venkov, *Spectral theory of automorphic functions and its applications*, vol. 51 of Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990. Translated from the Russian by N. B. Lebedinskaya.

[25] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, England; The Macmillan Company, New York, 1944.

[26] D. Werner, *Funktionalanalysis.*, Berlin: Springer, 7th revised and expanded ed. ed., 2011.

[27] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A*, Springer-Verlag, New York, 1990. Linear monotone operators, Translated from the German by the author and Leo F. Boron.