Funktionalanalysis II

Rüdiger W. Braun

Sommersemester 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Die Vorlesung orientiert sich an dem Buch [1] von Grosse-Erdmann und Peris.

Dieses Kapitel enthält grundlegende Definitionen sowie einige klassische Beispiele aus der endlich-dimensionalen Theorie. Diese sind alle nichtlinear.

1.1 Definition. (a) Ein *diskretes dynamisches System* besteht aus einem metrischen Raum X und einer stetigen Abbildung $T\colon X \to X$.

(b) Für $x \in X$ bezeichnen wir

$$\operatorname{orb}(x, T) = \{T^n x \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

als *Bahn* von x.

1.2 Beispiel. Sei $e(t) = e^{2\pi i t}$. Ferner seien $X = S^1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $T\colon S^1 \to S^1$, $x \mapsto e(\alpha)x$. Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist $\operatorname{orb}(x, T)$ für jedes $x \in S^1$ endlich und für irrationales α ist $\operatorname{orb}(x, T)$ für jedes x unendlich.

Für $n \neq m$ gilt nämlich $T^n x = T^m x$ genau dann, wenn $2\pi i n\alpha = 2\pi i m\alpha + 2\pi i k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

1.3 Beispiel (Logistische Abbildung). Einen kontinuierlichen, exponentiellen Wachstumsprozess modelliert man durch die Differentialgleichung $y' = \gamma y$. Der entsprechende diskrete Prozess wird gegeben durch die Differenzengleichung

$$N_{n+1} - N_n = \gamma N_n.$$

Ist das Wachstum durch eine Schranke L begrenzt, so verwendet man stattdessen die *logistische Differenzengleichung*

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = \gamma(L - N_n).$$

Für $N_1 < L$ und $\gamma L < 1$ ist die Folge $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend.

Für größere γ kann sie aber den Wert L überschießen, dann wird die Dynamik nicht-trivial.

Man skaliert nun um zu

$$M_n = \frac{N_n}{L + \frac{1}{\gamma}}, \quad \mu = 1 + \gamma L.$$

Dann $M_{n+1} = \mu M_n(1 - M_n)$.

Daher definiert man für $\mu \in \mathbb{R}$ die *logistische Abbildung* durch

$$L_\mu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mu x(1 - x).$$

Für $0 \leq \mu \leq 4$ bildet L_μ das Inheitsintervall in sich ab, im Falle von $\mu = 4$ sogar auf sich. Auf der Website wird die Entwicklung der Orbits ursprünglich benachbarter Punkte unter L_4 gezeigt.

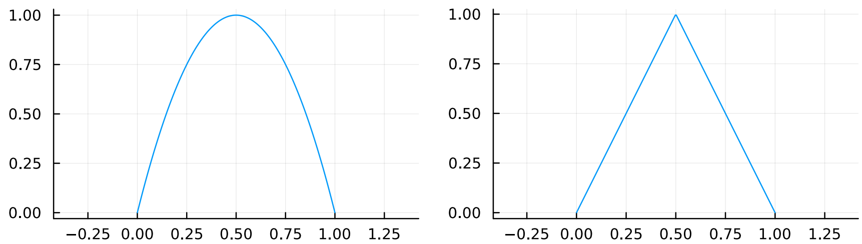

Abbildung 1.1: Die logistische Abbildung L_4 und die Zeltabbildung

1.4 Beispiel (Zeltabbildung (engl.: tent map)). Wir werden später sehen, dass die folgende, einfacher zu behandelnde, Abbildung äquivalent zur Einschränkung $L_4 \colon [0,1] \to [0,1]$ ist. Dazu werden wir im nächsten Punkt einen angemessenen Äquivalenzbegriff erklären

$$T \colon [0,1] \to [0,1], \quad Tx = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Abbildung 1.1 zeigt die logistische Abbildung L_4 und die Zeltabbildung. Auf der Website wird auch die Entwicklung der Bahnen ursprünglich benachbarter Punkte unter der Zeltabbildung gezeigt.

1.5 Definition. Es seien $S \colon Y \to Y$ und $T \colon X \to X$ dynamische Systeme.

(a) T heißt *quasikonjugiert* zu S, wenn es eine stetige Abbildung $\Phi \colon Y \to X$ mit dichtem Bild gibt, so dass $T \circ \Phi = \Phi \circ S$.

(b) T und S heißen *konjugiert,* wenn Φ homöomorph gewählt werden kann.

Bemerkung. Konjugiertheit von dynamischen Systemen ist offenbar eine Äquivalenzrelation.

1.6 Beispiel. (a) Für $\mu \neq 0, 2$ sind die logistischen Abbildungen L_μ und $L_{2-\mu}$ konjugiert.

(b) Die Einschränkung von L_4 auf $[0,1]$ ist konjugiert zur Zeltabbildung.

1.7 Bemerkung. Wenn $\Phi \colon Y \to X$ eine Quasikonjugation von T zu S ist, so gilt $S(\mathrm{orb}(y, S)) = \mathrm{orb}(\Phi(y), T)$ für jedes $y \in Y$.

1.8 Definition. Es sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System. Ein $Y \subseteq X$ heißt T-*invariant,* wenn $TY \subseteq Y$.

1.9 Satz. *Es sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System. Dann sind äquivalent:*

(a) *Wenn $X = A \cup B$, wobei $A \subseteq X$ einen inneren Punkt besitzt und T-invariant ist und $B \subseteq X$ ebenfalls einen inneren Punkt besitzt, dann $A \cap B \neq \emptyset$.*

(b) *Wenn U und V zwei nicht-leere, offene Teilmengen von X sind, dann existiert $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $T^n U \cap V \neq \emptyset$.*

(c) *Für jedes nicht-leere, offene $U \subseteq X$ ist $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n U$ dicht in X.*

(d) *Für jedes nicht-leere, offene $U \subseteq X$ ist $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n} U$ dicht in X.*

1.10 Definition. Ein dynamisches System, welches den Bedingungen aus Satz 1.9 genügt, heißt *topologisch transitiv.*

1.11 Korollar. *Es sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System mit homöomorphem T. Es ist genau dann topologisch transitiv, wenn T^{-1} topologisch transitiv ist.*

1.12 Beispiel. Die Zeltabbildung ist topologisch transitiv.

1.13 Satz. *Wenn T quasikonjugiert zu S und S topologisch transitiv ist, dann ist auch T topologisch transitiv.*

1.14 Satz. *Es sei X ein metrischer Raum ohne isolierte Punkte und sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System.*

(a) *Wenn $\operatorname{orb}(x, T)$ dicht in X ist, dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch $\operatorname{orb}(T^n x, T)$ dicht in X.*

(b) *Wenn T eine dichte Bahn besitzt, dann ist T topologisch transitiv.*

1.15 Definition. Eine G_δ-Menge ist ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen.

1.16 Definition. Seien X ein metrischer Raum und M eine Teilmenge von X. M heißt *nirgends dicht* in X, falls $\overline{M}$ keinen inneren Punkt besitzt. M heißt von *erster Kategorie* in X, wenn M abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Andernfalls heißt M von *zweiter Kategorie* in X.

1.17 Theorem (Bairescher Kategoriensatz). *Ein vollständiger metrischer Raum ist von zweiter Kategorie in sich.*

1.18 Theorem (Birkhoff 1920). *Es sei X ein separabler, vollständiger, metrischer Raum ohne isolierten Punkt und es sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System. Dann sind gleichwertig:*

(a) T *ist topologisch transitiv.*

(b) *Es gibt* $x \in X$, *so dass* $\operatorname{orb}(x, T)$ *dicht in* X *ist.*

In diesem Fall ist die Menge der Punkte mit dichtem Orbit sogar eine dichte G_δ*-Menge.*

Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) auch dann gilt, wenn X isolierte Punkte besitzt.

1.19 Beispiel. Die *Verdopplungsabbildung* ist gegeben durch $T\colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^2$. Sie ist topologisch transitiv, wie aus den folgenden Überlegungen folgt.

Wir schränken Sie ein auf die T-invariante Teilmenge

$$W = \left\{z \in S^1 \mid \exists n \in \mathbb{N} : z^{2^n} = 1\right\}.$$

Wir zeigen, dass $T\colon W \to W$ topologisch transitiv ist. Sei dazu $\emptyset \neq U \subseteq W$ offen. Dann umfasst U eine Menge der Form

$$V = \left\{\alpha e\left(\frac{j}{2^n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0, |j| < \epsilon 2^n\right\}$$

für geeignete $\alpha \in W$ und $\epsilon > 0$. Dann

$$T^m V = \left\{\alpha^{2^m} e\left(\frac{2^m j}{2^n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0, |j| < \epsilon 2^n\right\} = \left\{\alpha^{2^m} e\left(\frac{j}{2^k}\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{N}_0, |j| < \epsilon 2^m 2^k\right\}.$$

Das ist gleich W, falls $2^m \epsilon \geq 1$.

Weil W dicht in S^1 ist, folgt auch die erste Aussage.

Jede Bahn $\operatorname{orb}(x, T)$ mit $x \in W$ ist endlich, also nicht dicht. Das zeigt, dass der Satz von Birkhoff ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit von X nicht gilt.

1.20 Satz. *Sei* $T\colon X \to X$ *quasikonjugiert zu* $S\colon Y \to Y$ *via* $\Phi\colon Y \to X$. *Besitzt* $y \in Y$ *eine dichte Bahn unter* S, *so besitzt* $\Phi(y)$ *eine dichte Bahn unter* T.

2 Chaos

2.1 Definition. Sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System.

(a) $x \in X$ ist ein *Fixpunkt,* wenn $Tx = x$.

(b) $x \in X$ ist ein *periodischer Punkt,* wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T^n x = x$ gibt. Das kleinste solche n ist dann die *Periode* von x.

2.2 Bemerkung. Es seien $x, y \in X$ periodische Punkte. Dann sind $\operatorname{orb}(x, T)$ und $\operatorname{orb}(y, T)$ entweder disjunkt oder gleich.

2.3 Satz. *Es sei* $T\colon X \to X$ *quasikonjugiert zu* $S\colon Y \to Y$. *Wenn* S *eine dichte Menge von periodischen Punkten hat, dann auch* T.

2.4 Definition. Ein dynamisches System $T\colon X \to X$ heißt *chaotisch* (im Sinne von Devaney), wenn es die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(a) T ist topologisch transitiv.

(b) T besitzt eine dichte Menge von periodischen Punkten.

2.5 Satz. *Es sei* $T\colon X \to X$ *quasikonjugiert zu* $S\colon Y \to Y$. *Wenn* S *chaotisch ist, dann auch* T.

2.6 Beispiel. (a) Die Zeltabbildung ist chaotisch. Um das zu sehen, muss noch die Existenz einer dichten Menge periodischer Punkte gezeigt werden.

Sei $\epsilon > 0$ und sei $x \in [0, 1]$. Wir müssen zeigen, dass in $B_\epsilon(x)$ ein periodischer Punkt von T liegt. Jedenfalls umfasst $B_\epsilon(x)$ ein Intervall der Form $J = \left[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right]$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Wir hatten bereits gesehen, dass

$$T^n\left(\frac{m}{2^n}\right) = \begin{cases} 0, & m \text{ gerade,} \\ 1, & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wegen des Zwischenwertsatzes enthält J einen Fixpunkt von T^n. Dieser Fixpunkt ist ein periodischer Punkt von T.

(b) Das dynamische System $L_4\colon [0, 1] \to [0, 1]$ ist chaotisch.

(c) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ betrachten wir die irrationale Drehung $T\colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto e(\alpha)z$. Auf Blatt 2 wird gezeigt, dass jedes $z \in S^1$ eine dichte Bahn besitzt. Wegen des Satzes von Birkhoff ist T topologisch transitiv. Da man aber sofort sieht, dass T keine periodischen Punkte hat, ist T nicht chaotisch.

2.7 Definition. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein dynamisches System $T\colon X \to X$ besitzt *empfindliche Abhängigkeit* von den Anfangsbedingungen (engl.: "sensitive dependance"), wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $x \in X$ ein $y \in B_\epsilon(x)$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$ existieren, so dass $d(T^n y, T^n x) > \delta$. Jedes solche δ bezeichnet man als *Empfindlichkeitskonstante* von T.

2.8 Beispiel. Sei $X =]1, \infty[$ mit der durch den Betrag gegebenen Metrik. Durch $T\colon X \to X$, $x \mapsto 2x$ wird ein dynamisches System gegeben, für weldches $|T^n x - T^n y| = 2^n |x - y|$ gilt. Es besitzt also emfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Versieht man X mit der Metrik $d(x, y) = |\log x - \log y|$, so ist T^n eine Isometrie.

Das bedeutet, dass die Eigenschaft der Empfindlichkeit von der gewählten Metrik abhängt und keine Invariante der Topologie ist. Sie ist auch nicht invariant unter Konjugationen, denn $T\colon (X, |\cdot|) \to (X, |\cdot|)$ ist konjugiert zu $T\colon (X, d) \to (X, d)$.

2.9 Theorem (Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey). *Sei X ein metrischer Raum ohne isolierte Punkte und sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System. Wenn T topologisch transitiv ist und eine dichte Menge periodischer Punkte besitzt, dann besitzt T empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.*

2.10 Beispiel (Linksshift)*.* Wir setzen

$$\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$$

und versehen Σ_2 mit der Metrik

$$d(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

In dieser Topologie konvergiert $(x_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann gegen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $J \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n^{(j)} = x_n$ für alle $j \geq J$. Dies ist die Produkttopologie, daher ist Σ_2 kompakt nach dem Satz von Tychonoff.

Der *Linksshift für zwei Symbole* ist das durch

$$\sigma\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2, \quad \sigma(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

gegebene dynamische System.

2.11 Satz. *$x \in \Sigma_2$ ist genau dann periodisch unter σ, wenn x als Folge periodisch ist. Insbesondere besitzt σ eine dichte Menge periodischer Punkte.*

2.12 Satz. *(a) Die Bahn von* x *ist dicht genau dann, wenn es für jede endliche Folge* $(y_1, \ldots, y_m)$ *in* $\{0, 1\}$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass* $x_{n+j} = y_j$*,* $j = 1, \ldots, m$*.*

(b) σ *besitzt ein Element mit dichter Bahn.*

2.13 Korollar. *Der Linksshift für zwei Symbole ist chaotisch.*

2.14 Beispiel. Die Verdopplungsabbildung $T\colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^2$, ist chaotisch. Dazu zeigen wir, dass sie quasikonjugiert ist zum Linksshift via

$$\Phi\colon \sigma_2 \to S^1, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mapsto e\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}\right).$$

Wegen $x_0 = 0, 1$ gilt nämlich

$$T\Phi(x) = e\left(x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right) = e\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right) = \Phi(\sigma x).$$

3 Mischende Systeme

3.1 Definition. Ein dynamisches System $T\colon X \to X$ heißt *mischend* (engl. "mixing"), wenn es zu je zwei offenene, nicht-leeren Teilmengen $U, V \subseteq X$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass

$$T^n U \cap V \neq \emptyset \text{ für alle } n \geq N.$$

Offenbar ist ein mischendes dynamisches System topologisch transitiv.

3.2 Satz. *Wenn* T *quasikonjugiert zu* S *und* S *mischend ist, dann ist auch* T *mischend.*

3.3 Beispiel. (a) Die Zeltabbildung ist mischend. Das zeigt der Beweis von Beispiel 1.12.

(b) $L_4\colon [0,1] \to [0,1]$ ist mischend.

3.4 Definition (Produktsysteme). Für zwei dynamische Systeme $S\colon X \to X$ und $T\colon Y \to Y$ ist das *Produktsystem* definiert als

$$S \times T\colon X \times Y \to X \times Y, (x, y) \mapsto (Sx, Ty).$$

Der Produktraum trägt die Metrik $d((x,y),(z,w)) = d(x,z) + d(y,w)$.

3.5 Bemerkung. $S \times T$ ist quasikonjugiert zu S via $\Phi\colon X \times Y \to X$, $(x,y) \mapsto x$. Die analoge Aussage für T gilt ebenso.

3.6 Korollar. *Es seien* $S\colon X \to X$ *und* $T\colon Y \to Y$ *dynamische Systeme.*

(a) Wenn $S \times T$ *eine dichte Bahn besitzt, dann auch* S *und* T.

(b) Wenn $S \times T$ *topologisch transitiv ist, dann auch* S *und* T.

(c) Wenn $S \times T$ *chaotisch ist, dann auch* S *und* T.

3.7 Definition. Es sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System. Für $A, B \subseteq X$ wird die *Wiederkehrmenge* von A nach B definert als

$$N(A,B) = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid T^n A \cap B \neq \emptyset\}.$$

3.8 Lemma. $T\colon X \to X$ *sei ein topologisch transitives dynamisches System. Dann ist für je zwei nicht-leere, offene Mengen* $U, V \subseteq X$ *die Wiederkehrmenge* $N(U,V)$ *unendlich.*

3.9 Satz. *Es seien* $S: X \to X$ *und* $T: Y \to Y$ *dynamische Systeme. Wenn* S *und* T *topologisch transitiv sind und mindestens eines der beiden Systeme mischend ist, dann ist auch* $S \times T$ *topologisch transitiv.*

3.10 Satz. *Es seien* $S: X \to X$ *und* $T: Y \to Y$ *dynamische Systeme.* $S \times T$ *ist genau dann mischend, wenn* S *und* T *mischend sind.*

3.11 Beispiel. Für ein irrationales α ist die Drehung $T: S^1 \to S^1$, $z \mapsto e(\alpha)z$, topologisch transitiv. (Das ist eine Übungsaufgabe.) Für $(z, w) \in S^1 \times S^1$ gilt aber

$$\frac{T^n z}{T^n w} = \frac{z}{w} \text{ für jedes } n.$$

Also kann $T \times T$ nicht topologisch transitiv sein.

3.12 Definition. Ein dynamisches System $T: X \to X$ heißt *schwach mischend,* wenn $T \times T$ topologisch transitiv ist.

Wir haben bereits gesehen

$$\text{mischend} \Rightarrow \text{schwach mischend} \Rightarrow \text{topologisch transitiv}$$

Ferner haben wir gesehen, dass die Rückrichtung für die zweite Folgerung nicht gilt. Wir werden später sehen, dass auch die Rückrichtung der ersten Folgerung nicht gilt.

3.13 Satz. *Wenn* T *quasikonjugiert zu* S *und* S *schwach mischend ist, dann ist auch* T *schwach mischend.*

3.14 Satz. *Seien* $S: X \to X$ *und* $T: Y \to Y$ *dynamische Systeme. Wenn* $S \times T$ *schwach mischend ist, dann auch* S *und* T*.*

3.15 Satz. *Es sei* $T: X \to X$ *ein dynamisches System.*

(a) T *ist topologisch transitiv genau dann, wenn für je zwei nicht-leere offene Teilmengen* U, V *von* X *die Menge* $N(U, V)$ *nicht leer ist.*

(b) T *ist mischend genau dann, wenn für je zwei nicht-leere offene Teilmengen* U, V *von* X *die Menge* $N(U, V)$ *kofinit ist.*

(c) T *ist schwach mischend genau dann, wenn für je vier nicht-leere offene Teilmengen* U_1, U_2, V_1, V_2 *von* X *die Menge* $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$ *nicht leer ist.*

3.16 Lemma (4-Mengen-Trick). *Sei* $T: X \to X$ *ein dynamisches System und seien* $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq X$ *nicht-leer und offen.*

(a) *Falls es eine stetige Abbildung* $S\colon X \to X$ *gibt, die mit* T *kommutiert und für die*

$$S(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \text{ und } S(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$$

gilt, so gibt es nicht-leere offene Mengen $U_1' \subseteq U_1$ *und* $V_1' \subseteq V_1$, *so dass*

$$N(U_1', V_1') \subseteq N(U_2, V_2) \text{ und } N(V_1', U_1') \subseteq N(V_2, U_2).$$

Falls T *zusätzlich topologisch transitiv ist, so gilt* $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$.

(b) *Falls* T *topologisch transitiv ist, so gilt*

$$N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2) \neq \emptyset \Rightarrow N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset.$$

3.17 Theorem (Furstenberg 1967). *Sei* $T\colon X \to X$ *ein schwach mischendes dynamisches System. Für jedes* $n \geq 2$ *ist dann auch das* n*-fache Produkt* $T \times T \times \cdots \times T$ *schwach mischend.*

3.18 Satz. *Ein dynamisches System* $T\colon X \to X$ *ist genau dann schwach mischend, wenn für je drei nicht-leere offene Mengen* $U, V_1, V_2 \subseteq X$ *gilt*

$$N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset.$$

3.19 Bemerkung. Es sei $T\colon X \to X$ ein topologisch transitives dynamisches System. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist das Bild von T^n dicht in X.

3.20 Satz. *Ein dynamisches System* $T\colon X \to X$ *ist genau dann schwach mischend, wenn für je zwei nicht-leere offene Mengen* $U, V \subseteq X$ *gilt*

$$N(U, U) \cap N(U, V) \neq \emptyset.$$

3.21 Theorem. *Für ein dynamisches System* $T\colon X \to X$ *sind äquivalent:*

(a) T *ist schwach mischend.*

(b) *Für je zwei nicht-leere offene Mengen* $U, V \subseteq X$ *enthält* $N(U, V)$ *beliebig lange Intervalle.*

4 Operatoren in Frécheträumen

Dieses Kapitel besteht zum größten Teil aus Zitaten aus der Einführung in die Funktionalanalysis.

4.1 Definition. Eine Familie $(p_i)_{i \in I}$ von Halbnormen auf E heißt *separierend,* wenn es zu jedem $x \in E \setminus \{0\}$ ein i mit $p_i(x) \neq 0$ gibt.

4.2 Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *F-Norm* auf E ist ein Funktion $q\colon E \to [0, \infty[$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $x, y \in E$ gilt $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$.

(b) Für alle $x \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$ gilt $q(\lambda x) \leq q(x)$.

(c) Für alle $x \in E$ gilt $\lim_{\lambda \to 0} q(\lambda x) = 0$.

(d) Wenn $q(x) = 0$, dann $x = 0$.

4.3 Lemma. *Es sei* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine separierende Folge von Halbnormen auf einem* $\mathbb{K}$-*Vektorraum* E *und es sei* $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *eine Folge in* E.

(a) Durch

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)} \tag{4.1}$$

wird eine F-Norm auf E *gegeben.*

(b) Es gilt genau dann $\lim_{j \to \infty} q(x_j - x) = 0$, *wenn* $\lim_{j \to \infty} p_n(x_j - x) = 0$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

(c) Die Folge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *ist genau dann eine Cauchyfolge bezüglich der Metrik* $d(x, y) = q(x - y)$, *wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *und jedem* $n \in \mathbb{N}$ *ein* $J \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass* $p_n(x_i - x_j) < \epsilon$ *für alle* $i, j \geq J$.

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ *und* $\epsilon > 0$ *ist*

$$U = \{x \in E \mid p_n(x) < \epsilon\} \tag{4.2}$$

eine Nullumgebung in der durch (4.1) *gegebenen Metrik.*

(e) Wenn $p_1 \leq p_2 \leq \dots$, *dann liegt in jeder Nullumgebung der durch* (4.1) *gegebenen Metrik eine Nullumgebung der Form* (4.2).

4.4 Definition. Es sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine separierende Folge von Halbnormen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E. Wir versehen E mit der durch die F-Norm (4.1) induzierten Metrik. Wenn E vollständig ist, dann ist E ein *Fréchetraum.*

In dieser Vorlesung verlangen wir, abweichend vom üblichen Sprachgebrauch, dass Fréchetträume separabel sind.

Die Forderung der Separabilität benötigen wir, um den Satz von Birkhoff anwenden zu können. Nicht-triviale Fréchetträume haben keine isolierten Punkte.

4.5 Beispiel. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $H(U)$ der Raum der holomorphen Funktionen auf U. Es sei $\mathring{K}_1 \subset K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset K_2 \subset \dots U$ eine kompakte Ausschöpfung von U. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$p_n\colon H(U) \to [0, \infty[, \quad p_n(f) = \sup\{|f(x)| \mid x \in K_n\}$$

eine Halbnorm auf $H(U)$. Weil jedes $x \in U$ in einem der K_n liegt, ist die Folge separierend. Der Raum $H(U)$ wird mit der durch die p_n indizierten Metrik versehen. Eine Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in dieser Metrik, wenn sie kompakt im Sinne der Funktionentheorie konvergiert. Wegen des Satzes von Montel ist $H(U)$ ein Fréchetraum.

4.6 Beispiele. Weitere Beispiele für Fréchetträume sind

(a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt von der Form $K = \overline{G}$ für ein offenes $G \subset \mathbb{R}^n$. Dann versehen wir

$$C^\infty(K) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(K)$$

mit den Halbnormen

$$p_j(f) = \sup_{x\in G} \max_{|\alpha|\le j} \left|f^{(\alpha)}(x)\right|, \quad j \in \mathbb{N}.$$

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir wählen eine kompakte Ausschöpfung und definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Halbnorm $p_j(f) = \max\{|f(x)| \mid x \in K_j\}$.

(c) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Auf die folgende Weise wird ein Halbnormensystem für $C^\infty(U)$ erklärt

$$p_j(f) = \max_{|\alpha|\le n} \max\left\{|f^{(\alpha)}(x)| \;\middle|\; x \in K_j\right\}.$$

Man kann zeigen, dass $C^\infty(U)$ dadurch zu einem Fréchetraum wird.

4.7 Satz. *Es seien E, F Fréchetträume, deren Topologien durch die Halbnormensysteme $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gegeben sind. Eine lineare Abbildung $T\colon E \to F$ ist genau dann stetig, wenn es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $j \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ gibt, so dass für alle $x \in E$ gilt*

$$q_k(Tx) \le Cp_j(x).$$

4.8 Beispiel. (a) Wenn $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, so ist für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Ableitungsabbildung

$$D\colon C^\infty(G) \to C^\infty(G), \quad f \mapsto f^{(\alpha)},$$

ein stetig. Das folgt sofort aus dem Satz.

(b) Dasselbe gilt für kompakte Mengen K, welche der Abschluss einer offenen Menge sind.

(c) Wenn $U \subseteq \mathbb{C}$ offen ist, dann ist die Abbildung

$$D\colon H(U) \to H(U), \quad f \mapsto f'$$

stetig. Auch das folgt aus dem Satz, wenn man die Cauchysche Abschätzungsformel verwendet.

4.9 Definition. Es sei F ein Fréchetraum.

(a) Ein *Operator auf* F ist eine lineare stetige Abbildung $T\colon F \to F$.

(b) Ein *lineares dynamisches System* ist ein Operator auf einem separablen Fréchetraum.

5 Hyperzyklische Operatoren

5.1 Definition. Sei $T\colon X \to X$ ein lineares dynamisches System.

(a) $x \in X$ heißt *zyklisch,* wenn die lineare Hülle seiner Bahn dicht ist.

(b) $x \in X$ heißt *superzyklisch,* wenn $\{\lambda T^n x \mid \lambda \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht ist.

(c) $x \in X$ heißt *hyperzyklisch,* wenn seine Bahn dicht ist.

(d) Ein Operator heißt *hyperzyklisch,* wenn er einen hyperzyklischen Vektor besitzt.

Bemerkung. (a) In §6 der Funktionalanalysis I hatten wir bereits den Begriff des zyklischen Vektors eingeführt. Damals hatten wir ξ als zyklischen Vektor der Darstellung $\Psi\colon A \to L(H)$ definiert, wenn $\{\Psi(a)\xi \mid a \in A\}$ dicht in H ist. Die jetzige Definition ist eine Variante, bei der H durch X und die Banachalgebra A durch den Polynomring $\mathbb{K}[X]$ ersetzt wird.

(b) Wahrscheinlich das bedeutendste offene Problem der abstrakten Funktionalanalysis ist das "invariant subspace problem": Besitzt jeder beschränkte Operator auf einem Hilbertraum einen nicht-trivialen invarianten abgeschlossenen Unterraum?

Wenn man "Hilbertraum" durch "Banachraum" ersetzt, dann gibt es ein Gegenbeispiel von Read von 1984.

(c) Ein anderes offenes Problem ist das "invariant subset problem": Besitzt jeder beschränkte Operator auf einem Hilbertraum eine nicht-triviale invariante abgeschlossene Teilmenge?

Auch hier gibt es im Banachraumfall ein Gegenbeispiel von Read, und zwar von 1988.

5.2 Bemerkung. Ein Operator T besitzt genau dann keinen nicht-trivialen abgeschlossenen invarianten Unterraum, wenn jeder von 0 verschiedene Vektor zyklisch ist.

Er besitzt genau dann keine nicht-triviale abgeschlossene invariante Teilmenge, wenn jeder von 0 verschiedene Vektor hyperzyklisch ist.

5.3 Theorem (Birkhoff). *Ein Operator* $T\colon X \to X$ *ist genau dann hyperzyklisch, wenn er topologisch transitiv ist. In diesem Fall ist*

$$\mathrm{HC}(T) = \{x \in X \mid x \text{ hyperzyklisch}\}$$

eine dichte G_δ*-Menge.*

Den Beweis des folgenden Satzes von Runge habe ich dem Buch [2] von Rudin entnommen.

5.4 Theorem (Runge). *Sei* $K \subset \mathbb{C}$ *kompakt und sei* $\mathbb{C} \setminus K$ *zusammenhängend. Sei ferner* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *eine offene Obermenge von* K*. Für jedes* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *gibt es eine Folge* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Polynomen, welche in* K *gleichmäßig gegen* f *konvergiert.*

5.5 Beispiel (Birkhoff). Sei $0 \neq a \in \mathbb{C}$. Der Translationsoperator

$$T\colon \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}), \quad Tf(z) = f(z+a),$$

ist hyperzyklisch.

5.6 Beispiel (MacLane). Der Operator $D\colon \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $f \mapsto f'$, ist hyperzyklisch.

5.7 Beispiel (Rolewicz). Es sei $X = \ell^p$ für $1 \leq p < \infty$ oder $X = c_0$, es sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und es sei

$$T\colon X \to X, \quad (x_1, x_2, \dots) \to (\lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$$

das λ-fache des Rückwärtsshifts.

Im Fall $|\lambda| \leq 1$ gilt $\|T^n x\| \leq \|x\|$ für alle n, also kann T nicht hyperzyklisch sein.

Im Fall $|\lambda| > 1$ ist T dagegen hyperzyklisch.

5.8 Bemerkung. (a) Wenn T invertierbar und hyperzyklisch ist, dann ist auch T^{-1} hyperzyklisch. Das folgt sofort aus Satz 1.9 und dem Satz von Birkhoff.

(b) Wenn T quasikonjugiert zu S und S hyperzyklisch ist, dann ist auch T hyperzyklisch.

Das ist Satz 1.13. Interessant ist hier, dass die Abbildung Φ, welche die Quasikonjugation induziert, nicht linear zu sein braucht.

(c) Wenn X ein reeller Fréchetraum ist, dessen Topologie durch das Halbnormensystem $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben wird, dann ist

$$\widetilde{X} = \{x + iy \mid x, y \in X\}$$

mit den Halbnormensystem $\widetilde{p}_n((x,y)) = p_n(x) + p_n(y)$, ein komplexer Fréchetraum, den man als *Komplexifizierung* bezeichnet. Er ist $\mathbb{R}$-linear isomorph und homöomorph zum Produkt $X \oplus X$.

Die Komplexifizierung von T ist

$$\widetilde{T}(x + iy) = Tx + iTy.$$

Aus Korollar 3.6 und der vorhergehenden Bemerkung folgt sofort: Wenn die Komplexifizierung $\widetilde{T}$ hyperzyklisch ist, dann auch T.

5.9 Satz. *Hyperzyklische Operatoren haben empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Jede positive Zahl kann als Empfindlichkeitskonstante gewählt werden.*

5.10 Beispiel. Für $|\lambda| > 1$ ist der Rolewicz-Opertor chaotisch.

5.11 Lemma. *Es sei* $T\colon X \to X$ *eine lineare Abbildung. Dann ist die Menge ihrer periodischen Punkte ein Untervektorraum von* X*.*

Für eine lineare Abbildung $T\colon X \to X$ bezeichnen mit $E(\lambda)$ ihren Eigenraum zum Eigenwert λ.

5.12 Satz. *Sei* $T\colon X \to X$ *eine* $\mathbb{C}$*-lineare Abbildung. Der Unterraum ihrer periodischen Punkte ist gleich*

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} E(e(\alpha)).$$

5.13 Bemerkung. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ setzen wir $f_\lambda(z) = \exp(\lambda z)$. Wenn $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Nullfolge ist, dann konvergiert die Funktionenfolge $\left(\frac{f_{\mu_n} - 1}{\mu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H(\mathbb{C})$ gegen die Identität.

5.14 Lemma. *Es sei* $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ *eine Menge mit Häufungspunkt. Dann ist die lineare Hülle von* $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *dicht in* $H(\mathbb{C})$*.*

5.15 Beispiel. (a) Der MacLanesche Operator $D\colon H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ ist chaotisch.

(b) Für $a \neq 0$ ist der Birkhoffsche Operator $T_a\colon H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ chaotisch.

6 Der Satz von Herrero und Bourdon

6.1 Satz. *Es sei* $T\colon X \to X$ *ein lineares dynamisches System. Wenn* T *einen hyperzyklischen Vektor besitzt, dann ist jedes* $x \in X$ *Summe zweier hyperzyklischer Vektoren.*

6.2 Korollar. *Wenn* T *hyperzyklisch ist und* $\mathrm{HC}(T) \cup \{0\}$ *ein Untervektorraum von* X *ist, dann ist jeder von Null verschiedene Vekor hyperzyklisch.*

6.3 Definition. (a) Für einen Fréchetraum X bezeichnen wir mit X' den Raum aller linearen, stetigen Funktionale $\varphi\colon X \to \mathbb{K}$. Man nennt X' den *Dualraum* von X.

Dieser Raum ist offensichtlich ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Er kann topologisiert werden, ist dann aber i. a. kein Fréchetraum.

(b) Für $\varphi \in X'$ und $x \in X$ schreibt man gelegentlich $\langle \varphi, x \rangle$ anstelle von $\varphi(x)$.

(c) Es $T\colon X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung zwischen Fréchetträumen. Ihre *Transponierte* ist die durch

$$\langle T'\varphi, x \rangle = \langle \varphi, Tx \rangle\,, \quad \varphi \in X', x \in X,$$

gegebene Abbildung. Wenn man X' auf vernünftige Weise topologisiert, dann ist T' stetig.

(d) Es gilt $(ST)' = T'S'$, speziell also $(T')^n = (T^n)'$.

6.4 Lemma. *Es sei* X *ein Fréchetraum. Ein Unterraum* $E \subseteq X$ *ist genau dann dicht in* X*, wenn es kein* $\varphi \in X' \setminus \{0\}$ *gibt, welches auf* E *verschwindet.*

6.5 Lemma. *Für einen Operator* $T\colon X \to X$ *und* $\lambda \in \mathbb{K}$ *sind äquivalent:*

(a) λ *ist kein Eigenwert von* T'.

(b) $T - \lambda$ *hat dichtes Bild.*

6.6 Satz. *Es* T *hyperzyklisch. Dann besitzt* T' *keine Eigenwerte und für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$ *ist* $\mathrm{Bild}(T - \lambda)$ *dicht.*

6.7 Lemma. *Es sei* $T\colon X \to X$ *ein hyperzyklischer Operator auf einem reellen Fréchetraum* X*. Dann besitzt die Transponierte* $\widetilde{T}'$ *der Komplexifizierung keine Eigenwerte.*

6.8 Korollar. *Endlich dimensionale lineare Operatoren sind nicht hyperzyklisch.*

6.9 Theorem (Bourdon). *Es sei* T *ein hyperzyklischer Operator und es sei* P *ein von Null verschiedenes Polynom. Dann hat der Operator* $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ *dichtes Bild.*

6.10 Theorem (Herrero(1991)/Bourdon(1993)). *Es sei* x *ein hyperzyklischer Vektor für den Operator* T*. Dann ist die Menge*

$$\{\mathrm{P}(\mathrm{T})\mathrm{x} \mid \mathrm{P} \textit{ Polynom}\} \setminus \{0\}$$

eine dichte Menge von hyperzyklischen Vektoren.

6.11 Korollar. *Jeder hyperzyklische Operator besitzt einen dichten invarianten Unterraum, welche aus hyperzyklischen Vektoren und der Null besteht.*

6.12 Korollar. *Für einen hyperzyklischen Operator ist* $\mathrm{HC}(\mathrm{T})$ *zusammenhängend.*

6.13 Satz. *Die Bahn eines hyperzyklischen Punktes ist* $\mathbb{K}$*-linear unabhängig.*

7 Das Hyperzyklizitäts-Kriterium

7.1 Theorem (Kriterium von Godefray und Shapiro (1991)). *Es sei* $T\colon X \to X$ *ein Operator. Die Unterräume*

$$\begin{aligned} X_0 &= \mathrm{LH}\{x \in X \mid \exists\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1,\ Tx = \lambda x\}, \\ Y_0 &= \mathrm{LH}\{x \in X \mid \exists\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| > 1,\ Tx = \lambda x\} \end{aligned}$$

seien dicht in X. *Dann ist* T *mischend.*

7.2 Theorem (Kriterium von Kitai (1982)).

Literatur

[1] Karl-G. Grosse-Erdmann und Alfredo Peris Manguillot. *Linear chaos*. Universitext. Springer, London, 2011, S. xii+386. ISBN: 978-1-4471-2169-5. DOI: 10.1007/978-1-4471-2170-1. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2170-1.

[2] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Third. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987, S. xiv+416. ISBN: 0-07-054234-1.