Funktionalanalysis II

Rüdiger W. Braun

Sommersemester 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen 5

2 Chaos 9

3 Mischende Systeme 12

4 Operatoren in Frécheträumen 15

5 Hyperzyklische Operatoren 18

6 Der Satz von Herrero und Bourdon 22

7 Das Hyperzyklizitäts-Kriterium 24

8 Verknüpfungsoperatoren 28

9 Der Hardyraum 32

10 Verknüpfungsoperatoren im Hardyraum 34

11 Spektrale Eigenschaften hyperzyklischer Operatoren 35

12 Der Satz von Ansari 38

13 Der Satz von Bourdon und Feldman 39

14 Der Satz von León und Müller 40

15 Chaotische Operatorhalbgruppen 43

16 Der Satz von Conejero, Müller und Peris 46

17 Der Erzeuger einer hyperzyklischen Halbgruppe 47

18 Kriterien für die Hyperzyklizität von Halbgruppen 49

19 Halbgruppenlösungen von Differentialopersatoren 52

20 Frequent hypercyclicty 54

Literatur **58**

1 Grundlagen

Die Vorlesung orientiert sich an dem Buch [7] von Grosse-Erdmann und Peris.

Dieses Kapitel enthält grundlegende Definitionen sowie einige klassische Beispiele aus der endlich-dimensionalen Theorie. Diese sind alle nichtlinear.

1.1 Definition. (a) Ein *diskretes dynamisches System* besteht aus einem metrischen Raum X und einer stetigen Abbildung $T\colon X \to X$.

(b) Für $x \in X$ bezeichnen wir

$$\operatorname{orb}(x, T) = \{T^n x \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

als *Bahn* von x.

1.2 Beispiel. Sei $e(t) = e^{2\pi i t}$. Ferner seien $X = S^1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $T\colon S^1 \to S^1$, $x \mapsto e(\alpha)x$. Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist $\operatorname{orb}(x, T)$ für jedes $x \in S^1$ endlich und für irrationales α ist $\operatorname{orb}(x, T)$ für jedes x unendlich.

Für $n \neq m$ gilt nämlich $T^n x = T^m x$ genau dann, wenn $2\pi i n\alpha = 2\pi i m\alpha + 2\pi i k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

1.3 Beispiel (Logistische Abbildung). Einen kontinuierlichen, exponentiellen Wachstumsprozess modelliert man durch die Differentialgleichung $y' = \gamma y$. Der entsprechende diskrete Prozess wird gegeben durch die Differenzengleichung

$$N_{n+1} - N_n = \gamma N_n.$$

Ist das Wachstum durch eine Schranke L begrenzt, so verwendet man stattdessen die *logistische Differenzengleichung*

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = \gamma(L - N_n).$$

Für $N_1 < L$ und $\gamma L < 1$ ist die Folge $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend.

Für größere γ kann sie aber den Wert L überschießen, dann wird die Dynamik nicht-trivial.

Man skaliert nun um zu

$$M_n = \frac{N_n}{L + \frac{1}{\gamma}}, \quad \mu = 1 + \gamma L.$$

Dann $M_{n+1} = \mu M_n(1 - M_n)$.

Daher definiert man für $\mu \in \mathbb{R}$ die *logistische Abbildung* durch

$$L_\mu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mu x(1 - x).$$

Für $0 \leq \mu \leq 4$ bildet L_μ das Inheitsintervall in sich ab, im Falle von $\mu = 4$ sogar auf sich. Auf der Website wird die Entwicklung der Orbits ursprünglich benachbarter Punkte unter L_4 gezeigt.

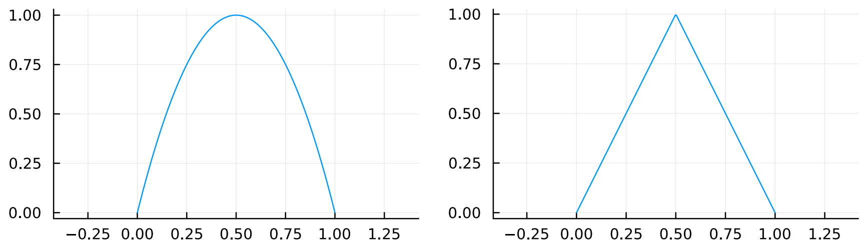

Abbildung 1.1: Die logistische Abbildung L_4 und die Zeltabbildung

1.4 Beispiel (Zeltabbildung (engl.: tent map)). Wir werden später sehen, dass die folgende, einfacher zu behandelnde, Abbildung äquivalent zur Einschränkung $L_4 \colon [0, 1] \to [0, 1]$ ist. Dazu werden wir im nächsten Punkt einen angemessenen Äquivalenzbegriff erklären

$$T \colon [0, 1] \to [0, 1], \quad Tx = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Abbildung 1.1 zeigt die logistische Abbildung L_4 und die Zeltabbildung. Auf der Website wird auch die Entwicklung der Bahnen ursprünglich benachbarter Punkte unter der Zeltabbildung gezeigt.

1.5 Definition. Es seien $S \colon Y \to Y$ und $T \colon X \to X$ dynamische Systeme.

(a) T heißt *quasikonjugiert* zu S, wenn es eine stetige Abbildung $\Phi \colon Y \to X$ mit dichtem Bild gibt, so dass $T \circ \Phi = \Phi \circ S$.

(b) T und S heißen *konjugiert,* wenn Φ homöomorph gewählt werden kann.

Bemerkung. Konjugiertheit von dynamischen Systemen ist offenbar eine Äquivalenzrelation.

1.6 Beispiel. (a) Für $\mu \neq 0, 2$ sind die logistischen Abbildungen L_μ und $L_{2-\mu}$ konjugiert.

(b) Die Einschränkung von L_4 auf $[0, 1]$ ist konjugiert zur Zeltabbildung.

1.7 Bemerkung. Wenn $\Phi \colon Y \to X$ eine Quasikonjugation von T zu S ist, so gilt $S(\mathrm{orb}(y, S)) = \mathrm{orb}(\Phi(y), T)$ für jedes $y \in Y$.

1.8 Definition. Es sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System. Ein $Y \subseteq X$ heißt T-*invariant*, wenn $TY \subseteq Y$.

1.9 Satz. *Es sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System. Dann sind äquivalent:*

(a) Wenn $X = A \cup B$, wobei $A \subseteq X$ einen inneren Punkt besitzt und T-invariant ist und $B \subseteq X$ ebenfalls einen inneren Punkt besitzt, dann $A \cap B \neq \emptyset$.

(b) Wenn U und V zwei nicht-leere, offene Teilmengen von X sind, dann existiert $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $T^n U \cap V \neq \emptyset$.

(c) Für jedes nicht-leere, offene $U \subseteq X$ ist $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n U$ dicht in X.

(d) Für jedes nicht-leere, offene $U \subseteq X$ ist $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n} U$ dicht in X.

1.10 Definition. Ein dynamisches System, welches den Bedingungen aus Satz 1.9 genügt, heißt *topologisch transitiv.*

1.11 Korollar. *Es sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System mit homöomorphem T. Es ist genau dann topologisch transitiv, wenn T^{-1} topologisch transitiv ist.*

1.12 Beispiel. Die Zeltabbildung ist topologisch transitiv.

1.13 Satz. *Wenn T quasikonjugiert zu S und S topologisch transitiv ist, dann ist auch T topologisch transitiv.*

1.14 Satz. *Es sei X ein metrischer Raum ohne isolierte Punkte und sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System.*

(a) Wenn $\operatorname{orb}(x, T)$ dicht in X ist, dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch $\operatorname{orb}(T^n x, T)$ dicht in X.

(b) Wenn T eine dichte Bahn besitzt, dann ist T topologisch transitiv.

1.15 Definition. Eine G_δ-Menge ist ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen.

1.16 Definition. Seien X ein metrischer Raum und M eine Teilmenge von X. M heißt *nirgends dicht* in X, falls $\overline{M}$ keinen inneren Punkt besitzt. M heißt von *erster Kategorie* in X, wenn M abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Andernfalls heißt M von *zweiter Kategorie* in X.

1.17 Theorem (Bairescher Kategoriensatz). *Ein vollständiger metrischer Raum ist von zweiter Kategorie in sich.*

1.18 Theorem (Birkhoff 1920). *Es sei X ein separabler, vollständiger, metrischer Raum ohne isolierten Punkt und es sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System. Dann sind gleichwertig:*

(a) T *ist topologisch transitiv.*

(b) *Es gibt* $x \in X$*, so dass* $\operatorname{orb}(x, T)$ *dicht in* X *ist.*

In diesem Fall ist die Menge der Punkte mit dichtem Orbit sogar eine dichte G_δ*-Menge.*

Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) auch dann gilt, wenn X isolierte Punkte besitzt.

1.19 Beispiel. Die *Verdopplungsabbildung* ist gegeben durch $T\colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^2$. Sie ist topologisch transitiv, wie aus den folgenden Überlegungen folgt.

Wir schränken Sie ein auf die T-invariante Teilmenge

$$W = \left\{ z \in S^1 \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N} : z^{2^n} = 1 \right\}.$$

Wir zeigen, dass $T\colon W \to W$ topologisch transitiv ist. Sei dazu $\emptyset \neq U \subseteq W$ offen. Dann umfasst U eine Menge der Form

$$V = \left\{ \alpha e\left(\frac{j}{2^n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0, |j| < \epsilon 2^n \right\}$$

für geeignete $\alpha \in W$ und $\epsilon > 0$. Dann

$$T^m V = \left\{ \alpha^{2^m} e\left(\frac{2^m j}{2^n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0, |j| < \epsilon 2^n \right\} = \left\{ \alpha^{2^m} e\left(\frac{j}{2^k}\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{N}_0, |j| < \epsilon 2^m 2^k \right\}.$$

Das ist gleich W, falls $2^m \epsilon \geq 1$.

Weil W dicht in S^1 ist, folgt auch die erste Aussage.

Jede Bahn $\operatorname{orb}(x, T)$ mit $x \in W$ ist endlich, also nicht dicht. Das zeigt, dass der Satz von Birkhoff ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit von X nicht gilt.

1.20 Satz. *Sei* $T\colon X \to X$ *quasikonjugiert zu* $S\colon Y \to Y$ *via* $\Phi\colon Y \to X$*. Besitzt* $y \in Y$ *eine dichte Bahn unter* S*, so besitzt* $\Phi(y)$ *eine dichte Bahn unter* T*.*

2 Chaos

2.1 Definition. Sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System.

(a) $x \in X$ ist ein *Fixpunkt,* wenn $Tx = x$.

(b) $x \in X$ ist ein *periodischer Punkt,* wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T^n x = x$ gibt. Das kleinste solche n ist dann die *Periode* von x.

2.2 Bemerkung. Es seien $x, y \in X$ periodische Punkte. Dann sind $\operatorname{orb}(x, T)$ und $\operatorname{orb}(y, T)$ entweder disjunkt oder gleich.

2.3 Satz. *Es sei* $T\colon X \to X$ *quasikonjugiert zu* $S\colon Y \to Y$. *Wenn* S *eine dichte Menge von periodischen Punkten hat, dann auch* T.

2.4 Definition. Ein dynamisches System $T\colon X \to X$ heißt *chaotisch* (im Sinne von Devaney), wenn es die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(a) T ist topologisch transitiv.

(b) T besitzt eine dichte Menge von periodischen Punkten.

2.5 Satz. *Es sei* $T\colon X \to X$ *quasikonjugiert zu* $S\colon Y \to Y$. *Wenn* S *chaotisch ist, dann auch* T.

2.6 Beispiel. (a) Die Zeltabbildung ist chaotisch. Um das zu sehen, muss noch die Existenz einer dichten Menge periodischer Punkte gezeigt werden.

Sei $\epsilon > 0$ und sei $x \in [0, 1]$. Wir müssen zeigen, dass in $B_\epsilon(x)$ ein periodischer Punkt von T liegt. Jedenfalls umfasst $B_\epsilon(x)$ ein Intervall der Form $J = \left[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right]$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Wir hatten bereits gesehen, dass

$$T^n\left(\frac{m}{2^n}\right) = \begin{cases} 0, & m \text{ gerade}, \\ 1, & m \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Wegen des Zwischenwertsatzes enthält J einen Fixpunkt von T^n. Dieser Fixpunkt ist ein periodischer Punkt von T.

(b) Das dynamische System $L_4\colon [0, 1] \to [0, 1]$ ist chaotisch.

(c) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ betrachten wir die irrationale Drehung $T\colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto e(\alpha)z$. Auf Blatt 2 wird gezeigt, dass jedes $z \in S^1$ eine dichte Bahn besitzt. Wegen des Satzes von Birkhoff ist T topologisch transitiv. Da man aber sofort sieht, dass T keine periodischen Punkte hat, ist T nicht chaotisch.

2.7 Definition. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein dynamisches System $T\colon X \to X$ besitzt *empfindliche Abhängigkeit* von den Anfangsbedingungen (engl.: "sensitive dependance"), wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $x \in X$ ein $y \in B_\epsilon(x)$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$ existieren, so dass $d(T^n y, T^n x) > \delta$. Jedes solche δ bezeichnet man als *Empfindlichkeitskonstante* von T.

2.8 Beispiel. Sei $X =]1, \infty[$ mit der durch den Betrag gegebenen Metrik. Durch $T\colon X \to X$, $x \mapsto 2x$ wird ein dynamisches System gegeben, für weldches $|T^n x - T^n y| = 2^n |x-y|$ gilt. Es besitzt also emfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Versieht man X mit der Metrik $d(x, y) = |\log x - \log y|$, so ist T^n eine Isometrie.

Das bedeutet, dass die Eigenschaft der Empfindlichkeit von der gewählten Metrik abhängt und keine Invariante der Topologie ist. Sie ist auch nicht invariant unter Konjugationen, denn $T\colon (X, |\cdot|) \to (X, |\cdot|)$ ist konjugiert zu $T\colon (X, d) \to (X, d)$.

2.9 Theorem (Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey). *Sei* X *ein metrischer Raum ohne isolierte Punkte und sei* $T\colon X \to X$ *ein dynamisches System. Wenn* T *topologisch transitiv ist und eine dichte Menge periodischer Punkte besitzt, dann besitzt* T *empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.*

2.10 Beispiel (Linksshift). Wir setzen

$$\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$$

und versehen Σ_2 mit der Metrik

$$d(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

In dieser Topologie konvergiert $(x_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann gegen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $J \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n^{(j)} = x_n$ für alle $j \geq J$. Dies ist die Produkttopologie, daher ist Σ_2 kompakt nach dem Satz von Tychonoff.

Der *Linksshift für zwei Symbole* ist das durch

$$\sigma\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2, \quad \sigma(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

gegebene dynamische System.

2.11 Satz. $x \in \Sigma_2$ *ist genau dann periodisch unter* σ, *wenn* x *als Folge periodisch ist. Insbesondere besitzt* σ *eine dichte Menge periodischer Punkte.*

2.12 Satz. *(a) Die Bahn von x ist dicht genau dann, wenn es für jede endliche Folge $(y_1, \dots, y_m)$ in $\{0,1\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_{n+j} = y_j$, $j = 1, \dots, m$.*

(b) σ besitzt ein Element mit dichter Bahn.

2.13 Korollar. *Der Linksshift für zwei Symbole ist chaotisch.*

2.14 Beispiel. Die Verdopplungsabbildung $T\colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^2$, ist chaotisch. Dazu zeigen wir, dass sie quasikonjugiert ist zum Linksshift via

$$\Phi\colon \sigma_2 \to S^1, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto e\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}\right).$$

Wegen $x_0 = 0,1$ gilt nämlich

$$T\Phi(x) = e\left(x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right) = e\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right) = \Phi(\sigma x).$$

3 Mischende Systeme

3.1 Definition. Ein dynamisches System $T\colon X \to X$ heißt *mischend* (engl. “mixing”), wenn es zu je zwei offenene, nicht-leeren Teilmengen $U, V \subseteq X$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass

$$T^n U \cap V \neq \emptyset \text{ für alle } n \geq N.$$

Offenbar ist ein mischendes dynamisches System topologisch transitiv.

3.2 Satz. *Wenn T quasikonjugiert zu S und S mischend ist, dann ist auch T mischend.*

3.3 Beispiel. (a) Die Zeltabbildung ist mischend. Das zeigt der Beweis von Beispiel 1.12.

(b) $L_4\colon [0,1] \to [0,1]$ ist mischend.

3.4 Definition (Produktsysteme). Für zwei dynamische Systeme $S\colon X \to X$ und $T\colon Y \to Y$ ist das *Produktsystem* definiert als

$$S \times T\colon X \times Y \to X \times Y, (x, y) \mapsto (Sx, Ty).$$

Der Produktraum trägt die Metrik $d((x,y),(z,w)) = d(x,z) + d(y,w)$.

3.5 Bemerkung. $S \times T$ ist quasikonjugiert zu S via $\Phi\colon X \times Y \to X$, $(x,y) \mapsto x$. Die analoge Aussage für T gilt ebenso.

3.6 Korollar. *Es seien $S\colon X \to X$ und $T\colon Y \to Y$ dynamische Systeme.*

(a) Wenn $S \times T$ eine dichte Bahn besitzt, dann auch S und T.

(b) Wenn $S \times T$ topologisch transitiv ist, dann auch S und T.

(c) Wenn $S \times T$ chaotisch ist, dann auch S und T.

3.7 Definition. Es sei $T\colon X \to X$ ein dynamisches System. Für $A, B \subseteq X$ wird die *Wiederkehrmenge* von A nach B definert als

$$N(A,B) = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid T^n A \cap B \neq \emptyset\}.$$

3.8 Lemma. $T\colon X \to X$ *sei ein topologisch transitives dynamisches System. Dann ist für je zwei nicht-leere, offene Mengen $U, V \subseteq X$ die Wiederkehrmenge $N(U,V)$ unendlich.*

3.9 Satz. *Es seien* $S\colon X \to X$ *und* $T\colon Y \to Y$ *dynamische Systeme. Wenn* S *und* T *topologisch transitiv sind und mindestens eines der beiden Systeme mischend ist, dann ist auch* $S \times T$ *topologisch transitiv.*

3.10 Satz. *Es seien* $S\colon X \to X$ *und* $T\colon Y \to Y$ *dynamische Systeme.* $S \times T$ *ist genau dann mischend, wenn* S *und* T *mischend sind.*

3.11 Beispiel. Für ein irrationales α ist die Drehung $T\colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto e(\alpha)z$, topologisch transitiv. (Das ist eine Übungsaufgabe.) Für $(z, w) \in S^1 \times S^1$ gilt aber

$$\frac{T^n z}{T^n w} = \frac{z}{w} \text{ für jedes } n.$$

Also kann $T \times T$ nicht topologisch transitiv sein.

3.12 Definition. Ein dynamisches System $T\colon X \to X$ heißt *schwach mischend,* wenn $T \times T$ topologisch transitiv ist.

Wir haben bereits gesehen

$$\text{mischend} \Rightarrow \text{schwach mischend} \Rightarrow \text{topologisch transitiv}$$

Ferner haben wir gesehen, dass die Rückrichtung für die zweite Folgerung nicht gilt. Wir werden später sehen, dass auch die Rückrichtung der ersten Folgerung nicht gilt.

3.13 Satz. *Wenn* T *quasikonjugiert zu* S *und* S *schwach mischend ist, dann ist auch* T *schwach mischend.*

3.14 Satz. *Seien* $S\colon X \to X$ *und* $T\colon Y \to Y$ *dynamische Systeme. Wenn* $S \times T$ *schwach mischend ist, dann auch* S *und* T.

3.15 Satz. *Es sei* $T\colon X \to X$ *ein dynamisches System.*

(a) T *ist topologisch transitiv genau dann, wenn für je zwei nicht-leere offene Teilmengen* U, V *von* X *die Menge* $N(U, V)$ *nicht leer ist.*

(b) T *ist mischend genau dann, wenn für je zwei nicht-leere offene Teilmengen* U, V *von* X *die Menge* $N(U, V)$ *kofinit ist.*

(c) T *ist schwach mischend genau dann, wenn für je vier nicht-leere offene Teilmengen* U_1, U_2, V_1, V_2 *von* X *die Menge* $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$ *nicht leer ist.*

3.16 Lemma (4-Mengen-Trick). *Sei* $T\colon X \to X$ *ein dynamisches System und seien* $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq X$ *nicht-leer und offen.*

(a) *Falls es eine stetige Abbildung* $S\colon X \to X$ *gibt, die mit* T *kommutiert und für die*

$$S(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \textit{ und } S(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$$

gilt, so gibt es nicht-leere offene Mengen $U_1' \subseteq U_1$ *und* $V_1' \subseteq V_1$, *so dass*

$$N(U_1', V_1') \subseteq N(U_2, V_2) \textit{ und } N(V_1', U_1') \subseteq N(V_2, U_2).$$

Falls T *zusätzlich topologisch transitiv ist, so gilt* $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$.

(b) *Falls* T *topologisch transitiv ist, so gilt*

$$N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2) \neq \emptyset \Rightarrow N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset.$$

3.17 Theorem (Furstenberg 1967). *Sei* $T\colon X \to X$ *ein schwach mischendes dynamisches System. Für jedes* $n \geq 2$ *ist dann auch das* n*-fache Produkt* $T \times T \times \cdots \times T$ *schwach mischend.*

3.18 Satz. *Ein dynamisches System* $T\colon X \to X$ *ist genau dann schwach mischend, wenn für je drei nicht-leere offene Mengen* $U, V_1, V_2 \subseteq X$ *gilt*

$$N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset.$$

3.19 Bemerkung. Es sei $T\colon X \to X$ ein topologisch transitives dynamisches System. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist das Bild von T^n dicht in X.

3.20 Satz. *Ein dynamisches System* $T\colon X \to X$ *ist genau dann schwach mischend, wenn für je zwei nicht-leere offene Mengen* $U, V \subseteq X$ *gilt*

$$N(U, U) \cap N(U, V) \neq \emptyset.$$

3.21 Theorem. *Für ein dynamisches System* $T\colon X \to X$ *sind äquivalent:*

(a) T *ist schwach mischend.*

(b) *Für je zwei nicht-leere offene Mengen* $U, V \subseteq X$ *enthält* $N(U, V)$ *beliebig lange Intervalle.*

4 Operatoren in Frécheträumen

Dieses Kapitel besteht zum größten Teil aus Zitaten aus der Einführung in die Funktionalanalysis.

4.1 Definition. Eine Familie $(p_i)_{i \in I}$ von Halbnormen auf E heißt *separierend*, wenn es zu jedem $x \in E \setminus \{0\}$ ein i mit $p_i(x) \neq 0$ gibt.

4.2 Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *F-Norm* auf E ist ein Funktion $q \colon E \to [0, \infty[$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $x, y \in E$ gilt $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$.

(b) Für alle $x \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$ gilt $q(\lambda x) \leq q(x)$.

(c) Für alle $x \in E$ gilt $\lim_{\lambda \to 0} q(\lambda x) = 0$.

(d) Wenn $q(x) = 0$, dann $x = 0$.

4.3 Lemma. *Es sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine separierende Folge von Halbnormen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E und es sei $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in E.*

(a) Durch

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)} \tag{4.1}$$

wird eine F-Norm auf E gegeben.

(b) Es gilt genau dann $\lim_{j \to \infty} q(x_j - x) = 0$, wenn $\lim_{j \to \infty} p_n(x_j - x) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(c) Die Folge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchyfolge bezüglich der Metrik $d(x, y) = q(x - y)$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $J \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $p_n(x_i - x_j) < \epsilon$ für alle $i, j \geq J$.

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ ist

$$U = \{x \in E \mid p_n(x) < \epsilon\} \tag{4.2}$$

eine Nullumgebung in der durch (4.1) gegebenen Metrik.

(e) Wenn $p_1 \leq p_2 \leq \ldots$, dann liegt in jeder Nullumgebung der durch (4.1) gegebenen Metrik eine Nullumgebung der Form (4.2).

4.4 Definition. Es sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine separierende Folge von Halbnormen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E. Wir versehen E mit der durch die F-Norm (4.1) induzierten Metrik. Wenn E vollständig ist, dann ist E ein *Fréchetraum.*

In dieser Vorlesung verlangen wir, abweichend vom üblichen Sprachgebrauch, dass Fréchetträume separabel sind.

Die Forderung der Separabilität benötigen wir, um den Satz von Birkhoff anwenden zu können. Nicht-triviale Fréchetträume haben keine isolierten Punkte.

4.5 Beispiel. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $H(U)$ der Raum der holomorphen Funktionen auf U. Es sei $\mathring{K}_1 \subset K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset K_2 \subset \dots U$ eine kompakte Ausschöpfung von U. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$p_n\colon H(U) \to [0,\infty[, \quad p_n(f) = \sup\{|f(x)| \mid x \in K_n\}$$

eine Halbnorm auf $H(U)$. Weil jedes $x \in U$ in einem der K_n liegt, ist die Folge separierend. Der Raum $H(U)$ wird mit der durch die p_n indizierten Metrik versehen. Eine Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in dieser Metrik, wenn sie kompakt im Sinne der Funktionentheorie konvergiert. Wegen des Satzes von Montel ist $H(U)$ ein Fréchetraum.

4.6 Beispiele. Weitere Beispiele für Fréchetträume sind

(a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt von der Form $K = \overline{G}$ für ein offenes $G \subset \mathbb{R}^n$. Dann versehen wir

$$C^\infty(K) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(K)$$

mit den Halbnormen

$$p_j(f) = \sup_{x\in G} \max_{|\alpha|\le j} \left|f^{(\alpha)}(x)\right|, \quad j \in \mathbb{N}.$$

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir wählen eine kompakte Ausschöpfung und definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Halbnorm $p_j(f) = \max\{|f(x)| \mid x \in K_j\}$.

(c) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Auf die folgende Weise wird ein Halbnormensystem für $C^\infty(U)$ erklärt

$$p_j(f) = \max_{|\alpha|\le n} \max\left\{|f^{(\alpha)}(x)| \;\middle|\; x \in K_j\right\}.$$

Man kann zeigen, dass $C^\infty(U)$ dadurch zu einem Fréchetraum wird.

4.7 Satz. *Es seien E, F Fréchetträume, deren Topologien durch die Halbnormensysteme $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gegeben sind. Eine lineare Abbildung $T\colon E \to F$ ist genau dann stetig, wenn es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $j \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ gibt, so dass für alle $x \in E$ gilt*

$$q_k(Tx) \le Cp_j(x).$$

4.8 Beispiel. (a) Wenn $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, so ist für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Ableitungsabbildung

$$D\colon C^\infty(G) \to C^\infty(G), \quad f \mapsto f^{(\alpha)},$$

ein stetig. Das folgt sofort aus dem Satz.

(b) Dasselbe gilt für kompakte Mengen K, welche der Abschluss einer offenen Menge sind.

(c) Wenn $U \subseteq \mathbb{C}$ offen ist, dann ist die Abbildung

$$D\colon H(U) \to H(U), \quad f \mapsto f'$$

stetig. Auch das folgt aus dem Satz, wenn man die Cauchysche Abschätzungsformel verwendet.

4.9 Definition. Es sei F ein Fréchetraum.

(a) Ein *Operator auf* F ist eine lineare stetige Abbildung $T\colon F \to F$.

(b) Ein *lineares dynamisches System* ist ein Operator auf einem separablen Fréchetraum.

5 Hyperzyklische Operatoren

5.1 Definition. Sei $T\colon X \to X$ ein lineares dynamisches System.

(a) $x \in X$ heißt *zyklisch,* wenn die lineare Hülle seiner Bahn dicht ist.

(b) $x \in X$ heißt *superzyklisch,* wenn $\{\lambda T^n x \mid \lambda \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht ist.

(c) $x \in X$ heißt *hyperzyklisch,* wenn seine Bahn dicht ist.

(d) Ein Operator heißt *hyperzyklisch,* wenn er einen hyperzyklischen Vektor besitzt.

Bemerkung. (a) In §6 der Funktionalanalysis I hatten wir bereits den Begriff des zyklischen Vektors eingeführt. Damals hatten wir ξ als zyklischen Vektor der Darstellung $\Psi\colon A \to L(H)$ definiert, wenn $\{\Psi(a)\xi \mid a \in A\}$ dicht in H ist. Die jetzige Definition ist eine Variante, bei der H durch X und die Banachalgebra A durch den Polynomring $\mathbb{K}[X]$ ersetzt wird.

(b) Wahrscheinlich das bedeutendste offene Problem der abstrakten Funktionalanalysis ist das “invariant subspace problem”: Besitzt jeder beschränkte Operator auf einem Hilbertraum einen nicht-trivialen invarianten abgeschlossenen Unterraum?

Wenn man “Hilbertraum” durch “Banachraum” ersetzt, dann gibt es ein Gegenbeispiel von Read von 1984.

(c) Ein anderes offenes Problem ist das “invariant subset problem”: Besitzt jeder beschränkte Operator auf einem Hilbertraum eine nicht-triviale invariante abgeschlossene Teilmenge?

Auch hier gibt es im Banachraumfall ein Gegenbeispiel von Read, und zwar von 1988.

5.2 Bemerkung. Ein Operator T besitzt genau dann keinen nicht-trivialen abgeschlossenen invarianten Unterraum, wenn jeder von 0 verschiedene Vektor zyklisch ist.

Er besitzt genau dann keine nicht-triviale abgeschlossene invariante Teilmenge, wenn jeder von 0 verschiedene Vektor hyperzyklisch ist.

5.3 Theorem (Birkhoff). *Ein Operator* $T\colon X \to X$ *ist genau dann hyperzyklisch, wenn er topologisch transitiv ist. In diesem Fall ist*

$$\mathrm{HC}(T) = \{x \in X \mid x \text{ hyperzyklisch}\}$$

eine dichte G_δ*-Menge.*

Den Beweis des folgenden Satzes von Runge habe ich dem Buch [12] von Rudin entnommen.

5.4 Theorem (Runge). *Sei* $K \subset \mathbb{C}$ *kompakt und sei* $\mathbb{C} \setminus K$ *zusammenhängend. Sei ferner* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *eine offene Obermenge von* K. *Für jedes* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *gibt es eine Folge* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Polynomen, welche in* K *gleichmäßig gegen* f *konvergiert.*

5.5 Beispiel (Birkhoff). Sei $0 \neq a \in \mathbb{C}$. Der Translationsoperator

$$T\colon \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}), \quad Tf(z) = f(z+a),$$

ist hyperzyklisch.

5.6 Beispiel (MacLane). Der Operator $D\colon \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $f \mapsto f'$, ist hyperzyklisch.

5.7 Beispiel (Rolewicz). Es sei $X = \ell^p$ für $1 \le p < \infty$ oder $X = c_0$, es sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und es sei

$$T\colon X \to X, \quad (x_1, x_2, \dots) \to (\lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$$

das λ-fache des Rückwärtsshifts.

Im Fall $|\lambda| \le 1$ gilt $\|T^n x\| \le \|x\|$ für alle n, also kann T nicht hyperzyklisch sein.

Im Fall $|\lambda| > 1$ ist T dagegen hyperzyklisch.

5.8 Bemerkung. (a) Wenn T invertierbar und hyperzyklisch ist, dann ist auch T^{-1} hyperzyklisch. Das folgt sofort aus Satz 1.9 und dem Satz von Birkhoff.

(b) Wenn T quasikonjugiert zu S und S hyperzyklisch ist, dann ist auch T hyperzyklisch.

Das ist Satz 1.13. Interessant ist hier, dass die Abbildung Φ, welche die Quasikonjugation induziert, nicht linear zu sein braucht.

(c) Wenn X ein reeller Fréchetraum ist, dessen Topologie durch das Halbnormensystem $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben wird, dann ist

$$\widetilde{X} = \{x + iy \mid x, y \in X\}$$

mit den Halbnormensystem $\widetilde{p}_n((x,y)) = p_n(x) + p_n(y)$, ein komplexer Fréchetraum, den man als *Komplexifizierung* bezeichnet. Er ist $\mathbb{R}$-linear isomorph und homöomorph zum Produkt $X \oplus X$.

Die Komplexifizierung von T ist

$$\widetilde{T}(x+iy) = Tx + iTy.$$

Aus Korollar 3.6 und der vorhergehenden Bemerkung folgt sofort: Wenn die Komplexifizierung $\widetilde{T}$ hyperzyklisch ist, dann auch T.

5.9 Satz. *Hyperzyklische Operatoren haben empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Jede positive Zahl kann als Empfindlichkeitskonstante gewählt werden.*

5.10 Beispiel. Für $|\lambda| > 1$ ist der Rolewicz-Opertor chaotisch.

5.11 Lemma. *Es sei* $T\colon X \to X$ *eine lineare Abbildung. Dann ist die Menge ihrer periodischen Punkte ein Untervektorraum von* X.

Für eine lineare Abbildung $T\colon X \to X$ bezeichnen mit $E(\lambda)$ ihren Eigenraum zum Eigenwert λ.

5.12 Satz. *Sei* $T\colon X \to X$ *eine* $\mathbb{C}$*-lineare Abbildung. Der Unterraum ihrer periodischen Punkte ist gleich*

$$\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Q}} E(e(\alpha)).$$

5.13 Bemerkung. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ setzen wir $f_\lambda(z) = \exp(\lambda z)$. Wenn $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Nullfolge ist, dann konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Funktionenfolge

$$z \mapsto \frac{1}{\mu_n^k}\left(f_{\mu_n}(z) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{z^j}{j!}\mu_n^j\right)$$

in $H(\mathbb{C})$ gegen $z \mapsto \frac{z^k}{k!}$.

Beweis. Wir müssen für jedes $R > 0$ zeigen, dass

$$\sup_{|z|\le R}\left|\frac{1}{\mu_n^k}\left(f_{\mu_n}(z) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{z^j}{j!}\mu_n^j\right) - \frac{z^k}{k!}\right| \to 0, \quad n\to\infty.$$

Es gilt für $|z| \le R$ und $|\mu_n| \le 1$

$$\left|\frac{1}{\mu_n^k}\left(f_{\mu_n}(z) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{z^j}{j!}\mu_n^j\right) - \frac{z^k}{k!}\right| = \left|\sum_{j=k}^{\infty}\frac{z^j}{j!}\mu_n^{j-k} - \frac{z^k}{k!}\right| \le |\mu_n|\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{R^j}{j!}|\mu_j|^{j-k-1} \le |\mu_n|e^R.$$

□

5.14 Lemma. *Es sei* $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ *eine Menge mit Häufungspunkt. Dann ist die lineare Hülle von* $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *dicht in* $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Beweis. Wir bezeichnen den Abschluss der linearen Hülle mit E. Es sei λ ein Häufungspunkt von Λ. Dann gibt es eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\Lambda\setminus\{\lambda\}$, die gegen λ konvergiert.

Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $z \mapsto z^k f_\lambda(z)$ in E liegt. Dazu setzen wir $\mu_n = \lambda_n - \lambda$.

Induktionsanfang: $f_{\lambda_n} = f_\lambda f_{\mu_n}$ konvergiert in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ wegen der Bemerkung gegen f_λ. Da E abgeschlossen ist, folgt $f_\lambda \in E$.

Zum Schluss von k nach $k+1$ gehen wir davon aus, dass $z^j f_\lambda \in E$ für $j = 0, \ldots, k$. Dann

$$E \ni \frac{1}{\mu_n^{k+1}}\left(f_{\lambda_n}(z) - \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!}\mu_n^j f_\lambda(z)\right) \to \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} f_\lambda,$$

wobei die Folge in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ konvergiert. Daher $z^{k+1} f_\lambda \in E$.

Für ein beliebiges $f \in H(\mathbb{C})$ gilt nun

$$f(z) = e^{\lambda z}(f(z)e^{-\lambda z}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k f_\lambda(z),$$

wobei die a_k die Taylorkoeffizienten von $ff_{-\lambda}$ sind. Da die Taylorreihe in $H(\mathbb{C})$ konvergiert, ist $f \in E$ gezeigt. □

5.15 Beispiel. (a) Der MacLanesche Operator $D\colon H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ ist chaotisch.

(b) Für $a \neq 0$ ist der Birkhoffsche Operator $T_a\colon H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ chaotisch.

6 Der Satz von Herrero und Bourdon

6.1 Satz. *Es sei* $T\colon X \to X$ *ein lineares dynamisches System. Wenn* T *einen hyperzyklischen Vektor besitzt, dann ist jedes* $x \in X$ *Summe zweier hyperzyklischer Vektoren.*

6.2 Korollar. *Wenn* T *hyperzyklisch ist und* $\mathrm{HC}(T) \cup \{0\}$ *ein Untervektorraum von* X *ist, dann ist jeder von Null verschiedene Vekor hyperzyklisch.*

6.3 Definition. (a) Für einen Fréchetraum X bezeichnen wir mit X' den Raum aller linearen, stetigen Funktionale $\varphi\colon X \to \mathbb{K}$. Man nennt X' den *Dualraum* von X.

Dieser Raum ist offensichtlich ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Er kann topologisiert werden, ist dann aber i. a. kein Fréchetraum.

(b) Für $\varphi \in X'$ und $x \in X$ schreibt man gelegentlich $\langle \varphi, x \rangle$ anstelle von $\varphi(x)$.

(c) Es $T\colon X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung zwischen Fréchetträumen. Ihre *Transponierte* ist die durch

$$\langle T'\varphi, x \rangle = \langle \varphi, Tx \rangle\,, \quad \varphi \in X', x \in X,$$

gegebene Abbildung. Wenn man X' auf vernünftige Weise topologisiert, dann ist T' stetig.

(d) Es gilt $(ST)' = T'S'$, speziell also $(T')^n = (T^n)'$.

6.4 Lemma. *Es sei* X *ein Fréchetraum. Ein Unterraum* $E \subseteq X$ *ist genau dann dicht in* X*, wenn es kein* $\varphi \in X' \setminus \{0\}$ *gibt, welches auf* E *verschwindet.*

6.5 Lemma. *Für einen Operator* $T\colon X \to X$ *und* $\lambda \in \mathbb{K}$ *sind äquivalent:*

(a) λ *ist kein Eigenwert von* T'.

(b) $T - \lambda$ *hat dichtes Bild.*

6.6 Satz. *Es* T *hyperzyklisch. Dann besitzt* T' *keine Eigenwerte und für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$ *ist* $\mathrm{Bild}(T - \lambda)$ *dicht.*

6.7 Lemma. *Es sei* $T\colon X \to X$ *ein hyperzyklischer Operator auf einem reellen Fréchetraum* X*. Dann besitzt die Transponierte* $\widetilde{T}'$ *der Komplexifizierung keine Eigenwerte.*

6.8 Korollar. *Endlich dimensionale lineare Operatoren sind nicht hyperzyklisch.*

6.9 Theorem (Bourdon). *Es sei* T *ein hyperzyklischer Operator und es sei* P *ein von Null verschiedenes Polynom. Dann hat der Operator* $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ *dichtes Bild.*

6.10 Theorem (Herrero(1991)/Bourdon(1993)). *Es sei* x *ein hyperzyklischer Vektor für den Operator* T*. Dann ist die Menge*

$$\{\mathrm{P}(\mathrm{T})\mathrm{x} \mid \mathrm{P}\ \textit{Polynom}\} \setminus \{0\}$$

eine dichte Menge von hyperzyklischen Vektoren.

6.11 Korollar. *Jeder hyperzyklische Operator besitzt einen dichten invarianten Unterraum, welche aus hyperzyklischen Vektoren und der Null besteht.*

6.12 Korollar. *Für einen hyperzyklischen Operator ist* $\mathrm{HC}(\mathrm{T})$ *zusammenhängend.*

6.13 Satz. *Die Bahn eines hyperzyklischen Punktes ist* $\mathbb{K}$*-linear unabhängig.*

7 Das Hyperzyklizitäts-Kriterium

7.1 Theorem (Kriterium von Kitai (1982)). *Es sei* $T\colon X \to X$ *ein Operator. Es gebe dichte Teilmengen* $X_0, Y_0 \subseteq X$ *und eine Abbildung* $S\colon Y_0 \to Y_0$*, so dass für alle Wahlen* $x \in X_0$ *und* $y \in Y_0$

(a) $T^n x \to 0$*,*

(b) $S^n y \to 0$*,*

(c) $TSy = y$*.*

Dann ist T *mischend.*

Bemerkung. Die Abbildung S braucht weder linear noch stetig zu sein.

7.2 Beispiel. Damit gelingt ein sehr kurzer Beweis, dass für $|\lambda| > 1$ der Operator von Rolewicz

$$T\colon \ell^p \to \ell^p, \quad (x_1, x_2, \dots) \mapsto (\lambda x_2, \lambda x_3, \dots),$$

hyperzyklisch ist. Man wählt nämlich für $X_0 = Y_0$ den Unterraum der endlichen Folgen und für $S\colon Y_0 \to Y_0$ die Abbildung

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \left(0, \frac{x_1}{\lambda}, \frac{x_2}{\lambda}, \dots\right).$$

7.3 Beispiel. Wir versehen $\mathbb{Z}$ mit dem durch $\nu(\{n\}) = \frac{1}{1+|n|}$ gegebenen Maß und betrachten den Rückwärts-Shift

$$B\colon \ell^1(\mathbb{Z}, \nu) \to \ell^1(\mathbb{Z}, \nu), \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Wie definieren $X_0 = Y_0$ als den Unterraum der endlichen Folgen und $S\colon Y_0 \to Y_0$ als den Vorwärts-Shift. Dann sind die Voraussetzungen des Kriteriums von Kitai erfüllt. Folglich ist B hyperzyklisch.

7.4 Theorem (Kriterium von Godefroy und Shapiro (1991)). *Es sei* $T\colon X \to X$ *ein Operator. Die Unterräume*

$$X_0 = \mathrm{LH}\{x \in X \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1,\ Tx = \lambda x\},$$
$$Y_0 = \mathrm{LH}\{x \in X \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| > 1,\ Tx = \lambda x\}$$

seien dicht in X*. Dann ist* T *mischend.*

7.5 Beispiel. Der Rückwärts-Shift aus Beispiel 7.3 besitzt keine Eigenwerte. Das zeigt, dass das Kriterium von Kitai echt stärker als das von Godefroy und Shapiro ist.

7.6 Theorem (Hyperzyklizitäts-Kriterium). *Es sei* $T\colon X \to X$ *ein Operator. Es gebe dichte Teilmengen* $X_0, Y_0 \subseteq X$*, eine unbeschränkte Folge* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{N}$ *und Abbildungen* $S_{n_k}\colon Y_0 \to X$, $k \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $x \in X_0$*,* $y \in Y_0$

(a) $T^{n_k}x \to 0$,

(b) $S_{n_k}(y) \to 0$,

(c) $T^{n_k}S_{n_k}(y) \to y$.

Dann ist T *schwach mischend.*

Bemerkung. Wenn T die Voraussetzungen des Hyperzyklizitäts-Kriterium erfüllt, dann tut dies auch $T \oplus T$. Es hätte also genügt, die Hyperzyklizität von T zu zeigen.

7.7 Theorem (Kriterium von Gethner und Shapiro (1987)). *Es sei* $T\colon X \to X$ *ein Operator. Es gebe dichte Teilmengen* $X_0, Y_0 \subseteq X$*, eine unbeschränkte Folge* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{N}$ *und eine Abbildung* $S\colon Y_0 \to Y_0$*, so dass für alle* $x \in X_0$*,* $y \in Y_0$

(a) $T^{n_k}x \to 0$,

(b) $S^{n_k}(y) \to 0$,

(c) $TS(y) = y$.

Dann ist Z *schwach mischend.*

7.8 Beispiel. Für

$$w = \left(1, 2, \frac{1}{2}, 2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)$$

betrachten wir den gewichteten Rückwärts-Shift

$$T\colon c_0 \to c_0, \quad x \mapsto (w_2x_2, w_3, x_3, \dots).$$

Da w beschränkt ist, ist T stetig. Wir zeigen, dass T schwach mischend, aber nicht mischend ist.

7.9 Definition. Seien $T_n\colon X \to X$ Operatoren. Die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *topologisch transitiv,* wenn es zu je zwei nicht-leeren, offenen Mengen $U, V \subseteq X$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $T_nU \cap V \neq \emptyset$.

7.10 Theorem (Universalitätskriterium). *Es seien* X *ein Fréchetraum und* $T_n\colon X \to X$ *Operatoren. Es sind gleichwertig*

(a) $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist topologisch transisitv.*

(b) *Es gibt eine dichte Menge von Punkten* $x \in X$*, für welche* $\{T_n x \mid n \in \mathbb{N}\}$ *dicht in* X *ist.*

In diesem Fall ist die Menge aller x*, für welche* $\{T_n x \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ *dicht ist, eine dichte* G_δ*-Menge.*

7.11 Theorem. *Es seien* X *ein Fréchetraum und* $T_n \colon X \to X$ *Operatoren mit dichtem Bild, die paarweise kommutieren. Es sind gleichwertig*

(a) $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist topologisch transisitv.*

(b) *Es gibt ein* $x \in X$*, für welches* $\{T_n x \mid n \in \mathbb{N}\}$ *dicht in* X *ist.*

7.12 Lemma. T *sei schwach mischend. Für jede endliche Auswahl* $V, U_1, \ldots, U_k$ *nicht-leerer, offener Mengen in* X *gibt es* $n \in \mathbb{N}$*, so dass*

$$T^n U_j \cap V \neq \emptyset, \quad j = 1, \ldots, k.$$

7.13 Definition. Es sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Ein Operator T heißt *hereditär hyperzyklisch* in Bezug auf $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jeder Teillfolge $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein $x \in X$ gibt, so dass $\{T^{m_k} x \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht in X ist.

T heißt hereditär hyperzyklisch, wenn er hereditär hyperzyklisch in Bezug auf eine Folge ist.

7.14 Theorem (Bès und Peris (1999)). *Es sei* $T \colon X \to X$ *ein Operator. Es sind äquivalent:*

(a) T *erfüllt das Hyperzyklizität-Kriterium.*

(b) T *ist schwach mischend.*

(c) T *ist hereditär hyperzyklisch.*

Die Frage, ob hyperzyklisch und schwach mischend dasselbe sind, war allerdings 1999 noch offen. Durch den Satz von Bès und Peris ist klar, dass sie äquivalent zu einer Frage von Herrero von 1992 ist: Ist jeder hyperzyklische Operator schwach mischend?

7.15 Korollar. *Das Hyperzyklizitäts-Kriterium ist äquivalent zu folgendem:*

> *Es gibt einen dichten Unterraum* $X_0 \subseteq X$*, eine unbeschränkte Folge* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *eine lineare Abbildung* $S_{n_k} \colon X_0 \to X$*, so dass für jedes* $x \in X_0$
>
> (a) $T^{n_k} x \to 0$,

(b) $S_{n_k}x \to 0$,

(c) $T^{n_k}S_{n_k}x \to x$.

7.16 Theorem (Abstrakter Satz von Mittag-Leffler). *Es seien* X_n, $n \in \mathbb{N}$, *vollständige metrische Räume und es seien* $f_n\colon X_{n+1} \to X_n$, $n \in \mathbb{N}$, *stetig mit dichtem Bild. Dann gibt es für jede nicht-leere offene Menge* $U \subseteq X_1$ *eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $x_n \in X_n$, *so dass* $x_1 \in U$ *und* $f_n(x_{n+1}) = x_n$ *für alle* n.

Der klassische Satz von Mittag-Leffler ist

7.17 Theorem (Mittag-Leffler (1877)). *Sei* $S \subset \mathbb{C}$ *eine diskrete Menge. Jedem Punkt* $w \in S$ *sei ein* $h_w \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *mit* $h_w(0) = 0$ *zugeordnet. Dann existiert* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus S)$, *so dass für jedes* $w \in S$ *die Funktion*

$$z \mapsto f(z) - h_w\left(\frac{1}{z-w}\right)$$

in w *eine hebbare Singularität besitzt.*

7.18 Theorem (Peris (2001)). *Ein Operator erfüllt genau dann das Hyperzyklizitäts-Kriterium, wenn er das Kriterium von Gethner und Shapiro erfüllt.*

Bemerkung. De la Rosa und Read [11] sowie Bayart und Matheron [2] haben Beispiele von Operatoren angegeben, die hyperzyklisch, aber nicht schwach mischend sind.

8 Verknüpfungsoperatoren

8.1 Definition. Es seien G und H Gebiete in $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\varphi\colon G \to H$ heißt *biholomorph,* wenn sie bijektiv ist und φ und φ^{-1} holomorph sind. Eine biholomorphe Abbildung $\varphi\colon G \to G$ heißt *automorph.* Die Gesamtheit aller automorphen Abbildungen von G ist die *Automorphismengruppe* $\operatorname{Aut}(G)$.

8.2 Bemerkung. Grosse-Erdmann und Peris bezeichnen bijektive holomorphe Abbildungen zwischen zwei Gebieten als *konform.* Es ist eine Konsequenz des Satzes von der Gebietstreue, dass konforme Abbildungen biholomorph sind.

8.3 Bezeichnung. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $\varphi \in \operatorname{Aut}(\Omega)$. Dann wird durch

$$C_\varphi\colon \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega), \quad f \mapsto f \circ \varphi,$$

ein Operator erklärt. Wir nennen ihn *Verkettungsoperator* (engl. composition operator).

8.4 Satz. *Es seien Ω_1 und Ω_2 Gebiete und $\psi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ biholomorph. Es seien $\varphi_j \in \operatorname{Aut}(\Omega_j)$, so dass $\varphi_2 \circ \psi = \psi \circ \varphi_1$. Dann sind C_{φ_2} und C_{φ_1} konjugiert.*

8.5 Beispiel. Je zwei Birkhoff-Operatoren T_a und T_b mit $a, b \neq 0$ sind konjugiert. Man wählt dazu die biholomorphe Abbildung $\psi(z) = \frac{b}{a}z$.

8.6 Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_n\colon \Omega \to \Omega$ holomorph. Man bezeichnet $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als *weglaufende Folge* (engl. run-away sequence), wenn es zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\varphi_n(K) \cap K = \emptyset$.

8.7 Beispiel. Für $\Omega = \mathbb{C}$ und $\varphi(z) = az + b$ ist die Folge $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann weglaufend, wenn $a = 1$ und $b \neq 0$.

8.8 Satz. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\varphi \in \operatorname{Aut}(\Omega)$. Wenn C_φ hyperzyklisch ist, dann ist $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weglaufende Folge.*

8.9 Definition. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist die Gruppe der reellen 2×2-Matrizen mit Determinante 1.

8.10 Satz. *Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe und sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene. Dann*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Aut}(\mathbb{C}) &= \{z \mapsto az + b \mid a \neq 0\},\\
\operatorname{Aut}(\mathbb{D}) &= \left\{ \frac{az+b}{\overline{b}z + \overline{a}} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C}, |a| > |b| \right\},\\
\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) &= \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \right\}.
\end{aligned}$$

Das wurde in meiner Funktionentheorie gezeigt. Wer eine weniger algebraisch orientierte Funktionentheorie gehört hat, konsultiert §9.2 aus dem Buch [10] von Remmert.

8.11 Satz.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*) = \{z \mapsto az \mid a \neq 0\} \cup \left\{z \mapsto \frac{a}{z} \;\middle|\; a \neq 0\right\}.$$

8.12 Beispiel. Für $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ ist $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann weglaufend, wenn $\varphi(z) = z + b$ für ein $b \neq 0$. Das hatten wir im letzten Beispiel gesehen. Wir hatten gesehen, dass C_φ dann chaotisch ist.

8.13 Beispiel. $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)$ ist genau dann weglaufend, wenn $\varphi(z) = az$ für ein a mit $|a| \neq 1$ ist.

Beweis. Wenn $\varphi(z) = \frac{a}{z}$, dann

$$\varphi^2(z) = \frac{a}{\frac{a}{z}} = z$$

und daher

$$\varphi^n(z) = \begin{cases} \frac{a}{z}, & n \text{ ungerade,} \\ z, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Das ist schon mal nicht weglaufend.

Wenn $|a| = 1$, dann $\varphi(S^1) = S^1$, also auch nicht weglaufend.

Wir setzen $RG(w, R, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - w| < R\}$. Jedes Kompaktum liegt in einem Ringgebiet $RG(0, R, r)$. Im Fall $|a| \neq 1$ existiert wegen

$$\varphi^n(RG(0, R, r)) = RG(0, |a|^n R, |a|^n r)$$

ein n mit $\varphi^n(K) \cap K = \emptyset$. □

8.14 Satz. *Für kein $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)$ ist C_φ hyperzyklisch.*

8.15 Satz ([1], Kapitel 4, Theorem 14). *Ein beschränktes Gebiet Ω in $\mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\mathbb{C} \setminus \Omega$ zusammenhängend ist.*

8.16 Lemma. *Seien $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \cdots \subseteq X$ zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raums X. Dann ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ zusammenhängend.*

8.17 Bemerkung. Die $SL_2(\mathbb{C})$ vie Möbiustransformation operiert auf $\mathbb{C}$. Das geschieht wir folgt: Für

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gilt

$$M.z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Mit derselben Formel operiert $SL_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$.

8.18 Definition. Ein Element $M \in SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm \mathrm{id}\}$ heißt

(a) *elliptisch,* wenn es genau ein $z \in \mathbb{H}$ mit $M.z = z$ gibt,

(b) *parabolisch,* wenn es genau ein $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $M.z = z$ gibt,

(c) *hyperbolisch,* wenn es $t, u \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $t \neq u$, $M.t = t$ und $M.u = u$ gibt.

Ein Automorphismus von $\mathbb{H}$ heißt elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, wenn er die Möbiustransformation zu einem entsprechendem Element der $SL_2(\mathbb{R})$ ist.

8.19 Satz. $M \in SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm \mathrm{id}\}$ *ist genau dann*

(a) elliptisch, wenn $|\mathrm{Spur}\, M| < 2$*,*

(b) parabolisch, wenn $|\mathrm{Spur}\, M| = 2$*,*

(c) hyperbolisch, wenn $|\mathrm{Spur}\, M| > 2$*.*

Insbesondere ist jedes $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \setminus \{\mathrm{id}\}$ *entweder elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch.*

Beweis als Übung.

8.20 Beispiel. (a) Die Abbildung $\psi_i \colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$, heißt *Cayleyabbildung.* Die Cayleyabbildung ist biholomorph. Ihre Inverse ist $\psi_i^{-1} \colon w \mapsto \frac{1+w}{1-w} i$.

(b) Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ operiert $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ auf $\mathbb{H}$ als Translation. Ihr einziger Fixpunkt ist ∞. Sie ist daher parabolisch, ihre Spur beträgt 2.

(c) Die Rotation ρ_α um den Winkel α liegt in $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Man kann sie als Operation der Matrix
$$\begin{pmatrix} e\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 \\ 0 & e\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$
auf $\mathbb{D}$ schreiben. Dann ist $\psi_i^{-1} \circ \rho_\alpha \circ \psi_i \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. Die zugehörige Matrix $M_\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$ ist elliptisch. Wegen $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ gilt $\mathrm{Spur}(M_\alpha) = 2\cos\frac{\alpha}{2}$. Außer für $\alpha \in \mathbb{Z}\pi$ ist $|\mathrm{Spur}(M_\alpha)| < 2$. Für $\alpha \in \mathbb{Z}\pi$ gilt $M_\alpha = \pm \mathrm{id}$.

(d) Auf den ersten Blick sieht es so aus, als hätten wir eine andere Definition als Grosse-Erdmann und Peris. Das ist aber nicht so.

8.21 Bemerkung. Sei $M \in SL_2(\mathbb{R})$ und sei $A \in GL_2(\mathbb{C})$ so, dass $AMA^{-1} \in SL_2(\mathbb{R})$. Dann ist M genau dann elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch, wenn dies für AMA^{-1} zutrifft.

Das folgt aus $\mathrm{Spur}(M) = \mathrm{Spur}(A^{-1}(AM)) = \mathrm{Spur}((AM)A^{-1})$.

8.22 Lemma. *Sei* $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ *parabolisch. Dann ist* M *konjugiert zu einer Translation* $z \mapsto z + r$ *für ein* $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*.*

8.23 Lemma. *Sei* $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *hyperbolisch. Dann ist* M *konjugiert zu einer Dilatation* $z \mapsto rz$ *für ein* $r \in \,]0,\infty[\, \setminus \{1\}$.

8.24 Theorem. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *einfach zusammenhängend und sei* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. *Dann sind gleichwertig:*

(a) C_φ *ist hyperzyklisch.*

(b) C_φ *ist mischend.*

(c) C_φ *ist chaotisch.*

(d) $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist weglaufend.*

(e) φ *hat keinen Fixpunkt.*

(f) C_φ *ist quasikonjugiert zu einem Birkhoff-Operator.*

9 Der Hardyraum

9.1 Bemerkung. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ und $0 < r < 1$. Dann gilt nach Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}} = \sqrt{\frac{1}{1-r^2}} \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $\mathcal{O}(\mathbb{D})$.

9.2 Definition. Der *Hardyraum* ist der Raum

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \;\middle|\; (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \right\},$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b}_n.$$

Es ist klar, dass $H^2(\mathbb{D})$ ein Hilbertraum ist, in dem die Monome eine Orthonormalbasis bilden.

9.3 Definition. Für $\lambda \in \mathbb{D}$ definieren wir $k_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ durch

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}.$$

Die k_λ heißen *reproduzierende Kerne.*

9.4 Satz. *Sei* $\lambda \in \mathbb{D}$.

(a) $k_\lambda \in H^2(\mathbb{D})$.

(b) Für jedes $f \in H^2(\mathbb{D})$ *gilt* $f(\lambda) = (f, k_\lambda)$.

9.5 Satz. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ *liegt genau dann in* $H^2(\mathbb{D})$*, wenn*

$$\sup_{0\leq r<1} \int_0^1 |f(re(t))|^2 \, dt < \infty.$$

Ferner gilt für $f, g \in H^2(\mathbb{D})$

$$(f, g) = \lim_{r\nearrow 1} \int_0^1 f(re(t)) \overline{g(re(t))} \, dt.$$

9.6 Lemma. *Es sei $\Lambda \subseteq \mathbb{D}$ eine Teilmenge mit Häufungspunkt in $\mathbb{D}$. Dann ist die lineare Hülle von $\{k_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ dicht in $H^2(D)$.*

9.7 Bezeichnung. Für beschränktes $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ wird durch

$$M_\varphi \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D}), \quad f \mapsto \varphi f,$$

ein Operator gegeben, den man als *Multiplikationsoperator* bezeichnet.

9.8 Bemerkung. M_φ ist nie hyperzyklisch.

9.9 Theorem (Godefroy und Shapiro (1991)). *Sei $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ beschränkt, aber nicht konstant. Für den Adjungierten M_φ^* des Multiplikationsoperators sind gleichwertig*

(a) M_φ^* *ist hyperzyklisch.*

(b) M_φ^* *ist mischend.*

(c) M_φ^* *ist chaotisch.*

(d) $\varphi(\mathbb{D}) \cap S^1 \neq \emptyset$.

9.10 Theorem (Spektralabbildungssatz für das Punktspektrum im Dunford-Riesz–Kalkül). *Sei $T \colon X \to X$ ein Operatur, sei Ω eine offene Obermenge von $\sigma(T)$ und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ auf keiner Zusammenhangskomponente von Ω konstant. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $f(\lambda)$ genau dann ein Eigenwert von $f(T)$, wenn λ ein Eigenwert von T ist.*

9.11 Bemerkung. Es sei $X = \ell^p$ für $1 \leq p < \infty$ oder $X = c_0$ und es sei $B \colon X \to X$ der Rückwärts-Shift. Für $\lambda \in \mathbb{D}$ ist

$$e_\lambda = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$$

ein Eigenvektor des Rückwärts-Shifts zum Eigenwert λ.

9.12 Lemma. *Es sei X wie in Bemerkung 9.11 und es sei $\Lambda \subseteq \mathbb{D}$ eine Teilmenge mit Häufungspunkt in $\mathbb{D}$. Dann ist die lineare Hülle E von $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ dicht in X.*

9.13 Theorem (deLaubenfels und Emamirat (2001)). *Es sei $X = \ell^p$ für $1 \leq p < \infty$ oder $X = c_0$ und es sei $B \colon X \to X$ der Rückwärts-Shift. Es sei φ eine nicht-konstante holomorphe Funktion in einer Umgebung von $\overline{D}$. Dann sind äquivalent:*

(a) $\varphi(B)$ *ist chaotisch.*

(b) $\varphi(\mathbb{D}) \cap S^1 \neq \emptyset$.

(c) $\varphi(B)$ *hat einen nicht-trivialen periodischen Punkt.*

9.14 Beispiel. Für $\lambda \neq 0$ sind die Operatoren $\mathrm{id} + \lambda B$ und $e^{\lambda B}$ chaotisch.

10 Verknüpfungsoperatoren im Hardyraum

Im letzten Kapitel wurde über Multiplikationsoperatoren berichtet. In diesem ist φ wieder ein Automorphismus und die Multiplilation ist die Operation der Automorphismengruppe.

10.1 Bemerkung.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C}, |a| > |b| \right\}.$$

$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ besitzt einen Pol bei $-\frac{\overline{a}}{b}$, also in $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Insbesondere ist $\varphi(z)$ für $z \in S^1$ definiert. Man rechnet sofort nach, dass $\varphi(S^1) \subseteq S^1$.

10.2 Satz. *Für* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *ist* C_φ *ein Operator von* $H^2(\mathbb{D})$ *nach* $H^2(\mathbb{D})$*. Es gilt*

$$\|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1+r}{1-r}},$$

wobei $r = |\varphi(0)|$.

10.3 Lemma. *Sei* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ *parabolisch und sei* $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *der Fixpunkt. Dann gilt für jedes* $z \in \overline{\mathbb{H}} \cup \{\infty\}$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(z) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{-n}(z) = t.$$

10.4 Lemma. *Sei* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ *hyperbolisch. Dann gibt es* $u, t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*, so dass für jedes* $z \in (\overline{\mathbb{H}} \cup \{\infty\}) \setminus \{u, t\}$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(z) = u \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi^{-n}(z) = t.$$

Dabei sind u *und* t *die beiden Fixpunkte von* φ *in* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

10.5 Theorem (Bourdon und Shapiro). *Sei* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ *und sei* $C_\varphi \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ *der zugehörige Verkettungsoperator. Es sind äquivalent:*

(a) C_φ *ist hyperzyklisch.*

(b) C_φ *ist mischend.*

(c) φ *hat keinen Fixpunkt in* $\mathbb{D}$.

11 Spektrale Eigenschaften hyperzyklischer Operatoren

In diesem Kapitel ist X immer ein komplexer Banachraum.

11.1 Lemma. *Sei* $T\colon X \to X$ *ein hyperzyklischer Operator. Dann ist jede nicht-triviale Bahn von* T' *unbeschränkt.*

Wir wiederholen aus der Funktionalanalysis I:

11.2 Definition. Sei A eine Banachalgebra. Für $a \in A$ definiert man den *Spektralradius* als

$$r(a) = \sup\{|z| \mid z \in \sigma(a)\}.$$

11.3 Satz (Spektralradiusformel). *Sei* A *eine Banachalgebra. Für* $a \in A$ *gilt*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}.$$

Insbesondere $r(a) \leq \|a\|$.

11.4 Lemma. *Sei* $r > 0$.

(a) Falls $\sigma(T) \subset B_r(0)$, *so gibt es* $\epsilon > 0$ *und* $M > 0$, *so dass* $\|T^n x\| \leq M(r-\epsilon)^n \|x\|$ *für alle* $x \in X$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Falls $\sigma(T) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(0)$, *so gibt es* $\epsilon > 0$ *und* $M > 0$, *so dass* $\|T^n x\| \geq M(r+\epsilon)^n \|x\|$ *für alle* $x \in X$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$.

11.5 Satz (Riesz-Zerlegung, Satz 11.14 der Funktionalanalysis I). *Es sei* $T\colon X \to X$ *ein Operator mit* $\sigma(T) = M \cup N$ *für disjunkte, nicht-leere, abgeschlossene Mengen* M *und* N. *Dann gibt es nicht-triviale abgeschlossene Unterräume* $X_1, X_2 \subseteq X$ *mit* $X = X_1 \oplus X_2$, *so dass* $T_j := T\big|_{X_j} \colon X_j \to X_j$ *und* $\sigma(T_1) = M$ *und* $\sigma(T_2) = N$.

11.6 Satz. *Sei* T *ein hyperzyklischer Operator. Dann* $\sigma(T) \cap S^1 \neq \emptyset$.

11.7 Beispiel. Der Volterra-Operator ist nicht hyperzyklisch.

11.8 Lemma. *Seien* A *eine kompakte und* B *kompakte, zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raums* X. *Dann sind äquivalent:*

(a) Jede Zusammenhangskomponente von A *trifft* B.

(b) $A \cup B$ *ist zusammenhängend.*

11.9 Theorem (Kitai (1982)). *Sei* T *ein hyperzyklischer Operator. Dann trifft jede Zusammenhangskomponente von* $\sigma(T)$ *den Einheitskreis.*

In der Einführung hatten wir einen Spektralsatz für kompakte Operatoren bewiesen. Er zeigt insbesondere:

11.10 Theorem. *Sei* T *ein kompakter Operator. Dann* $0 \in \sigma(T)$ *und* $\sigma(T)$ *ist entweder endlich oder eine Nullfolge. Wenn* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$*, dann ist* λ *Eigenwert von* T *und es gibt eine Zerlegung* $X = X_1 \oplus X_2$*, so dass* $T_j \colon X_j \to X_j$*, die Dimension von* X_1 *endlich ist,* $\{\lambda\} = \sigma(T_1)$ *und* $\lambda \notin \sigma(T_2)$*.*

11.11 Korollar. *Kompakte Operatoren sind nicht hyperzyklisch.*

11.12 Satz. *Sei* T *ein chaotischer Operator. Dann enthält* $\sigma(T)$ *keinen isolierten Punkt und unendlich viele Einheitswurzeln sind Eigenwert von* T*.*

11.13 Definition. Ein Operator T heißt *quasi-nilpotent,* wenn $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$.

11.14 Satz. *Es sei* $T = \lambda \operatorname{id}_X + K$ *für einen kompakten Operator* K*. Wenn* T *hyperzyklisch ist, dann* $|\lambda| = 1$ *und* K *ist quasi-nilpotent.*

11.15 Korollar. *Es sei* $T = \lambda \operatorname{id}_X + K$ *für einen kompakten Operator* K*. Dann ist* T *nicht chaotisch.*

11.16 Definition. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Banachraum heißt *(Schauder)-Basis*, wenn es zu jedem $x \in E$ eine eindeutig bestimmte Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gibt, so dass $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$.

Der folgende Satz geht auf Banach zurück. Einen Beweis findet man in Diestel [3], Chapter V.

11.17 Satz. *Es sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Schauderbasis. Für* $n \in \mathbb{N}$ *ist das Koeffizientenfunktional*

$$\varphi_n \colon X \to \mathbb{K}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \mapsto \lambda_n,$$

linear und stetig.

11.18 Bezeichnung. Es sei X ein Banachraum mit einer Schauderbasis und es sei $T \colon X \to X$ ein Operator. Wir ordnen ihm eine Matrix $(a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ zu, wobei

$$a_{n,k} = \varphi_n(Tx_k).$$

11.19 Lemma. *Wenn eine Zeile der Matrix* $(a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ *keine Außerdiagonalelemente besitzt, dann ist* T *nicht hyperzyklisch.*

11.20 Lemma (Arithmetisch-geometrische Mittelungleichung). *Sei* $1 < p < \infty$ *und sei* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Dann gilt für* $x, y > 0$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \geq x^{1/p} y^{1/q}.$$

Das wird üblicherweise zur Vorbereitung der Hölderschen Ungleichung in der Analysis III gezeigt.

11.21 Satz (Hardy-Ungleichung [8], Theorem 326). *Für* $N \in \mathbb{N}$ *und* $a_1, a_2, \ldots, a_N \geq 0$ *gilt*

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p.$$

11.22 Beispiel. Der Cesàro-Operator ist gegeben durch

$$C\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Die zugehörige Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Wegen der Hardyschen Ungleichung ist der Cesàro-Operator stetig. Wegen Lemma 11.19 ist er nicht hyperzyklisch.

11.23 Definition. Es sei H ein Hilbertraum. Ein Operator $T\colon H \to H$ ist *hyponormal,* wenn $T^*T - TT^* \geq 0$.

11.24 Bemerkung. (a) Positive Operatoren hatten wir in der Einführung erklärt. Ein $A \in L(H)$ ist positiv, wenn $(Ax, x) \geq 0$ für alle x.

(b) Normale Operatoren sind hyponormal.

11.25 Lemma. T *ist genau dann hyponormal, wenn* $\|Tx\| \geq \|T^*x\|$ *für alle* $x \in X$.

11.26 Definition. Ein Operator $T\colon X \to X$ in einem Banachraum heißt *paranormal,* wenn $\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$.

11.27 Satz. *Hyponormale Operatoren sind paranormal.*

11.28 Theorem (Kitai (1982 für hyponormale Operatoren), Bourdon (1997)). *Kein paranormaler Operator ist hyperzyklisch.*

11.29 Korollar. *Normale Operatoren auf Hilberträumen sind nicht hyperzyklisch.*

12 Der Satz von Ansari

Bis auf weiteres ist X wieder ein Fréchetraum.

12.1 Lemma. *Es sei* X *ein metrischer Raum ohne isolierte Punkte, sei* $T\colon X \to X$ *stetig und seien* A *und* B *zwei Bahnen unter* T*. Falls* $\mathring{\overline{A}} \cap \mathring{\overline{B}} \neq \emptyset$*, so gilt* $\overline{A} = \overline{B}$*.*

12.2 Theorem (Ansari 1995). *Sei* $T\colon X \to X$ *ein Operator. Für jedes* $p \in \mathbb{N}$ *gilt* $HC(T^p) = HC(T)$.

Bemerkung. Der Satz von Ansari ist ein Phänomen der linearen dynamischen Systeme, wie das Beispiel $X = \{\pm 1\}$, $Tx = -x$, zeigt.

13 Der Satz von Bourdon und Feldman

13.1 Definition. Eine Teilmenge M eines topolgischen Raums X ist *irgendwo dicht,* wenn sie nicht nirgends dicht ist.

13.2 Bezeichnung. Sei $T\colon X \to X$ ein Operator. Für $x \in X$ setzen wir

$$D(x) = \overline{\operatorname{orb}(x,T)} \quad \text{und} \quad U(x) = \mathring{D}(x).$$

13.3 Lemma. *(a) Wenn* $y \in D(x)$, *dann* $D(y) \subseteq D(x)$.

(b) $U(x) = U(T^k x)$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$.

13.4 Lemma. *Wenn* $R\colon X \to X$ *eine stetige Abbildung ist, die mit* T *vertauscht, dann* $R(D(x)) \subseteq D(R(x))$.

13.5 Satz. *Wenn* T *einen Vektor mit irgendwo dichter Bahn besitzt und* p *ein von Null verschiedenes Polynom ist, dann hat* $p(T)$ *dichtes Bild.*

13.6 Lemma. *Wenn* $\operatorname{orb}(x,T)$ *irgendwo dicht ist, dann ist die Menge*

$$A := \{p(T)x \mid p \ \textit{Polynom},\ p \neq 0\}$$

eine zusammenhängende, dichte Teilmenge von X.

13.7 Theorem (Bourdon und Feldman (2003)). *Sei* $T\colon X \to X$ *ein Operator und sei* $x \in X$. *Falls die Bahn* $\operatorname{orb}(x,T)$ *irgendwo dicht in* X *ist, dann ist sie dicht in* X.

13.8 Theorem. *Costakis und Peris (2002)] Sei* $T\colon X \to X$ *ein Operator und seien* $x_1, \dots, x_n$ *Vektoren, so dass*

$$X = \overline{\bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{orb}(x_j, T)}.$$

Dann gibt es ein j, *so dass* x_j *hyperzyklisch ist.*

13.9 Bemerkung. Hieraus kann man einen anderen Beweis des Satzes von Ansari bekommen. Es gilt nämlich

$$\operatorname{orb}(x,T) = \bigcup_{j=0}^{p-1} \operatorname{orb}(T^j x, T^p).$$

Wenn x hyperzyklisch ist, dann ist nach Costakis und Peris eine dieser Bahnen dicht und damit $T^j x$ ein hyperzyklischer Vektor für T^p. Da T^{p-j} dichtes Bild besitzt und

$$T^{p-j}(\operatorname{orb}(T^j x, T^p)) \subseteq \operatorname{orb}(x, T^p),$$

ist dann auch x ein hyperzyklischer Vektor für T^p.

14 Der Satz von León und Müller

14.1 Definition. Es sei G eine Halbgruppe. Sie *operiert* auf X mittels der Abbildung

$$\Psi\colon G \to L(X),$$

wenn

(a) $\Psi(0) = \mathrm{id}_X$.

(b) $\Psi(g_1 + g_2) = \Psi(g_1)\Psi(g_2)$ für $g_1, g_2 \in G$.

(c) Die Abbildung
$$G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto \Psi(g)x,$$
ist stetig.

Für $x \in X$ ist $\operatorname{orb}(x, \Psi) = \{\Psi(g)x \mid g \in G\}$ die *Bahn* von x unter der Halbgruppenoperation.

14.2 Beispiel. Sei X ein Banachraum. Wir hatten eine C_0-Halbgruppe definiert als eine Familie $(T_t)_{t\geq 0}$ in $L(X)$, so dass

(a) $T_0 = \mathrm{id}_X$.

(b) $T_{t+s} = T_t T_s$ für alle $s, t \geq 0$.

(c) $\lim_{t\searrow 0} T_t x = x$ für alle $x \in X$.

Wir hatten als Lemma 19.3 gezeigt:

> *Sei* $(T_t)_{t\geq 0}$ *eine* C_0*-Halbgruppe auf einem Banachraum* X*. Dann existieren* $M \geq 1$ *und* $\omega \in \mathbb{R}$*, so dass* $\|T_t\| \leq Me^{\omega t}$ *für alle* $t \geq 0$*.*

Damit können wir zeigen: Wenn $(T_t)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe ist, dann operiert $\mathbb{R}^+$ mittels
$$\Psi\colon \mathbb{R}^+ \to L(x), \quad (t, x) \mapsto T_t x,$$
auf X.

14.3 Definition. Eine Halbgruppenoperation Ψ auf einem Fréchetraum X heißt *hyperzyklisch,* wenn es ein $x \in X$ gibt, dessen Bahn $\operatorname{orb}(x, \Psi)$ dicht in X ist. Dann ist x ein hyperzyklischer Vektor für Ψ. Die Menge aller für Ψ hyperzyklischen Vektoren bezeichnet man mit $HC(\Psi)$.

14.4 Bemerkung. In diesem Kapitel ist immer $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^+$.

(a) Setzt man
$$\Psi(n,t) = e(t)T^n,$$
dann $\operatorname{orb}(x,G) = S^1 \operatorname{orb}(x,T)$. Diese Bahnen sind Thema das Satzes von León und Müller.

(b) Setzt man
$$\Psi(n,t) = T_t$$
so kann man C_0-Halbgruppen untersuchen. Das machen wir im nächsten Kapitel.

14.5 Theorem (León und Müller (2004)). *Sei X ein komplexer Fréchetraum und sei $T\colon X \to X$ ein Operator. Falls für ein $x \in X$ die Menge*
$$\left\{\lambda T^n x \;\middle|\; \lambda \in S^1,\, n \in \mathbb{N}_0\right\}$$
dicht in X ist, so ist für jedes einzelne λ bereits die Bahn $\operatorname{orb}(x, \lambda T)$ dicht in X.
Insbesondere gilt $HC(T) = HC(\lambda T)$ für alle $\lambda \in S^1$.

Mit der Gruppenoperation aus Teil (a) der Bemerkung bedeutet das, dass $\operatorname{orb}(x,\Psi)$ genau dann dicht ist, wenn alle $\operatorname{orb}(x,\Psi(1,t))$ dicht sind.

Der Satz von León und Müller ist ein Spezialfall von Theorem 14.7. Dessen Beweis benötigt aber noch Vorbereitungen.

14.6 Lemma. *Die Halbgruppe $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^+$ operiere via $\Psi\colon G \to L(X)$ auf X. Sei $W \subseteq X$ einen Nullumgebung. Dann gibt es eine Nullumgebung $V \subseteq X$, so dass $\Psi(0,t)(V) \subseteq W$ für alle $t \in [0,2]$.*

14.7 Theorem. *Sei X ein unendlich-dimensionaler komplexer Fréchetraum, auf dem $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^+$ operiert. Die Gruppenoperation werde durch Ψ induziert. Ferner sollen gelten*

(α) $\Psi(1,0) = \mathrm{id}_X$ oder $\Psi(0,1) = \mathrm{id}_X$ (d. h. Ψ ist periodisch in einer der Variablen.)

(β) Falls die Halbgruppenoperation hyperzyklisch ist, so hat jede Konvexkombination von $\Psi(0,s)$ und $\Psi(1,t)$ dichtes Bild.

Dann ist jeder hyperzyklische Vektor für Ψ auch hyperzyklisch für jeden Operator $\Psi(1,t)$, $t > 0$.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $t = 1$ zu zeigen.
Für $u, v \in X$ definieren wir
$$F_{u,v} = \left\{\lambda \in S^1 \;\middle|\; \exists ((n_k,t_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset G : \Psi(n_k,t_k)u \to v,\, e(t_k) \to \lambda\right\}.$$
Die ersten drei Schritte des Beweises werden zeigen, dass $F_{x,x}$ eine abgeschlossene Unterhalbgruppe der S^1 ist.

Schritt 1: *Wenn* $u \in HC(\Psi)$ *und* $v \in X$*, dann* $F_{u,v} \neq \emptyset$.

Schritt 2: *Wenn* $\lambda_k \in F_{u,v_k}$, $v_k \to v$ *und* $\lambda_k \to \lambda$*, dann* $\lambda \in F_{u,v}$. *Für* $u, v \in X$ *ist* $F_{u,v}$ *abgeschlossen.*

Schritt 3: *Wenn* $u, v, w \in X$, $\lambda \in F_{u,v}$ *und* $\mu \in F_{v,w}$*, dann* $\lambda\mu \in F_{u,w}$.

Bis jetzt ist gezeigt, dass $F_{x,x}$ eine abgeschlossene Unterhalbgruppe der S^1 ist.

Schritt 4: *Es gibt* $m \in \mathbb{N}_0$*, so dass es zu jedem* $y \in HC(\Psi)$ *ein* $\lambda \in S^1$ *gibt mit* $F_{x,y} = \{\lambda z \mid z^m = 1\}$.

Schritt 5: *Für* m *wie in Schritt 4 gibt es eine stetige Funktion* $f\colon HC(\Psi) \to S^1$ *derart, dass* $f(\Psi(0,t)x) = e(mt)$ *für jedes* $t > 0$.

Schritt 6: $m = 0$.

Wir machen dies vorerst nur für den Fall $\Psi(0,1) = \mathrm{id}_x$, den wir zum Beweis des Satzes von Müller und León benötigen.

Schritt 7: x *ist hyperzyklisch für* $\Psi(1,1)$.

□

14.8 Lemma. *Seien* $0 \le u \le 1$ *sowie* $\mu, \nu \in S^1$. *Wenn* $\left\{\lambda T^n x \;\middle|\; \lambda \in S^1, n \in \mathbb{N}_0\right\}$ *dicht in* X *ist, dann hat* $u\mu\,\mathrm{id}_X + (1-u)\nu T$ *dichtes Bild.*

14.9 Satz. *Es sei* X *ein Fréchetraum und es sei* W *eine Nullumgebung. Wenn* W *relativ kompakt ist, dann hat* X *endliche Dimension.*

14.10 Korollar. *Sei* Ψ *eine Halbgruppenoperation auf einem komplexen, unendlich-dimensionalen Fréchetraum* X*, welche die Vorbereitungen* (α) *und* (β) *aus Theorem 14.7 erfüllt. Wenn* $x \in X$ *hyperzyklisch für* Ψ *ist, dann ist* x *hyperzyklisch für jeden Operator* $\Psi(n,t)$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$.

15 Chaotische Operatorhalbgruppen

In diesem Kapitel ist X ein separabler Banachraum.

15.1 Definition. Es sei $(T_t)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe.

(a) Sie heißt *hyperzyklisch,* wenn es ein $x \in X$ gibt, dessen Bahn

$$\operatorname{orb}(x, (T_t)_t) = \{T_t x \mid t \geq 0\}$$

dicht ist.

(b) Sie heißt *topologisch transitiv,* wenn es für je zwei nicht-leere, offene Mengen $U, V \subseteq X$ ein t_0 gibt, so dass $T_t U \cap V \neq \emptyset$.

(c) Sie heißt *mischend,* wenn es für je zwei nicht-leere, offene Mengen $U, V \subseteq X$ ein t_0 gibt, so dass $T_t U \cap V \neq \emptyset$ für alle $t \geq t_0$.

(d) Sie heißt *schwach mischend,* wenn $(T_t \oplus T_t)_{t\geq 0}$ topologisch transitiv ist.

15.2 Satz. $(T_t)_{t\geq 0}$ *ist genau dann hyperzyklisch, wenn sie topologisch transitiv ist.*

15.3 Lemma. *Die Summe aus einer mischenden und einer hyperzyklischen Halbgruppe ist hyperzyklisch.*

15.4 Satz. *Es sei* X *ein unendlich-dimensionaler Banachraum, es sei* $(T_t)_{t\geq 0}$ *eine* C_0*-Halbgruppe und es sei* $x \in X$*. Es sind äquivalent:*

(a) x *ist ein hyperzyklischer Vektor für* $(T_t)_{t\geq 0}$*.*

(b) Es gibt eine streng monoton wachsende, unbeschränkte Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}^+$*, so dass* x *ein hyperzyklischer Vektor der Folge* $(T_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *ist.*

15.5 Definition. Es sei $(T_t)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe.

(a) $x \in X$ ist ein *periodischer Punkt* von $(T_t)_{t\geq 0}$, wenn es $t > 0$ mit $T_t x = x$ gibt.

(b) $(T_t)_{t\geq 0}$ heißt *chaotisch,* wenn $(T_t)_{t\geq 0}$ hyperzyklisch ist und eine dichte Menge von periodischen Punkten besitzt.

15.6 Definition. Eine Familie $(T_t)_{t\geq 0}$ von Operatoren heißt *lokal gleichstetig,* wenn es zu jedem $b \geq 0$ ein $M \geq 0$ gibt, so dass

$$\|T_t x\| \leq M\|x\| \quad 0 \leq t \leq b, x \in X.$$

15.7 Satz. *Es sei* $(T_t)_{t\geq 0}$ *eine Familie von Operatoren. Es sind gleichwertig*

(a) $\lim_{s\to t} T_s x = T_t x$ *für alle* $x \in X$, $t \geq 0$.

(b) $(T_t)_{t\geq 0}$ *ist lokal gleichstetig und es gibt eine dichte Teilmenge* $X_0 \subseteq X$, *so dass* $\lim_{s\to t} T_s x = T_t x$ *für alle* $x \in X_0$, $t \geq 0$.

(c) Die Abbildung

$$R^+ \times X \to X, \quad (t, x) \mapsto T_t x,$$

ist stetig.

15.8 Beispiel (Translationshalbgruppe). Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $\nu\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine streng positive, lokal Lebesgue-integrierbare Funktion, d. h. für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^+$ mit $\lambda_1(K) > 0$ gilt

$$0 < \int_K \nu \, d\lambda_1 < \infty.$$

Dann ist $\mu(E) = \int_E \nu \, d\lambda_1$ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}^+$. Wir bezeichnen den $L^p(\mu)$ mit $L^p_\nu(\mathbb{R}^+)$. Die *Translationshalbgruppe* ist dann gegeben durch

$$T_t f(x) = f(x+t), \quad x, t \geq 0.$$

Wir behaupten, dass die Translationshalbgruppe genau dann eine C_0-Halbgruppe ist, wenn es $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $t \geq 0$

$$\nu(x) \leq M e^{\omega t} (x+t) \quad \text{f. ü.} \tag{15.1}$$

Ein Gewicht, für welches $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$\nu(x) \leq M e^{\omega(y-x)} \nu(y), \quad y \geq x \geq 0, \tag{15.2}$$

heißt *zulässig.* Hier ist die Ungleichung tatsächlich punktweise und nicht nur λ_1-f. ü. gemeint. Dann ist auch klar, dass $\nu(x) < \infty$ für alle x.

15.9 Satz. *Es sei* ν *ein zulässiges Gewicht und es sei* $(T_t)_{t\geq 0}$ *die Translationshalbgruppe auf* $L^p_\nu(\mathbb{R}^+)$. *Dann sind äquivalent:*

(a) Die Translationshalbgruppe ist hyperzyklisch.

(b) Die Translationshalbgruppe ist schwach mischend.

(c) $\liminf_{x\to\infty} \nu(x) = 0$.

15.10 Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass $(T_t)_{t\geq 0}$ sogar mischend ist, wenn $\lim_{t\to\infty} \nu(x) = 0$.

15.11 Satz. *Es sei* ν *ein zulässiges Gewicht und es sei* $(T_t)_{t\geq 0}$ *die Translationshalbgruppe auf* $L^p_\nu(\mathbb{R}^+)$. *Dann sind äquivalent:*

(a) $(T_t)_{t\geq 0}$ *ist mischend.*

(b) $\lim_{x\to\infty} \nu(x) = 0$.

15.12 Satz. *Für festes* $w > 0$ *definieren wir auf* $C_0(\mathbb{R}^+)$ *eine* C_0*-Halbgruppe durch*

$$T_t f(x) = e^{wt} f(x+t).$$

Diese Halbgruppe ist mischend und chaotisch.

15.13 Definition. Eine C_0-Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ auf X heißt *quasikonjugiert* zu einer C_0-Halbgruppe $(S_t)_{t\geq 0}$ auf Y, wenn es eine stetige Abbildung $\Phi\colon Y \to X$ mit dichtem Bild gibt, so dass $T_t \circ \Phi = \Phi S_t$ für alle t.

Falls es sogar ein homöomorphes Φ gibt, so heißen die beiden Halbgruppe *konjugiert.*

15.14 Satz. $(T_t)_{t\geq 0}$ *sei quasikonjugiert zu* $(S_t)_{t\geq 0}$ *und* $(S_t)_{t\geq 0}$ *sei hyperzyklisch (bzw. schwach mischend, mischend oder chaotisch, dann ist auch* $(T_t)_{t\geq 0}$ *hyperzyklisch (bzw. schwach mischend, mischend oder chaotisch).*

Wie im diskreten Fall erklären wir die *Komplexifizierung* einer Halbgruppe.

15.15 Korollar. *Wenn die Komplexifizierung* $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$ *einer Halbgruppe hyperzyklisch (bzw. schwach mischend, mischend oder chaotisch) ist, dann gilt das auch für* $(T_t)_{t\geq 0}$.

16 Der Satz von Conejero, Müller und Peris

In diesem Kapitel ist X weiterhin ein separabler Banachraum.

16.1 Lemma. *Es sei $(T_t)_{t\geq 0}$ eine hyperzyklische C_0-Halbgruppe. Es gelten:*

(a) Für kein $t > 0$ besitzt T_t' einen Eigenwert.

(b) Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ und jedes $t > 0$ hat $T_t - \lambda \operatorname{id}_X$ dichtes Bild.

16.2 Korollar. *Auf einem endlich-dimensionalen Banachraum ist keine C_0-Halbgruppe hyperzyklisch.*

16.3 Lemma. *Es sei $(T_t)_{t\geq 0}$ eine hyperzyklische C_0-Halbgruppe auf einem rellen Banachraum X und es sei $(\widetilde{T})_{t\geq 0}$ ihre Komplexifizierung. Es gelten:*

(a) Für kein $t > 0$ besitzt $\widetilde{T}_t'$ einen Eigenwert.

(b) Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ und jedes $t > 0$ hat $\widetilde{T}_t - \lambda \operatorname{id}_{\widetilde{X}}$ dichtes Bild.

Aus Lemmata 16.1 und 16.3 folgt wie im diskreten Fall das folgende Analogon zum Satz von Bourdon:

16.4 Theorem. *Es $(T_t)_{t\geq 0}$ eine hyperzyklische C_0-Halbgruppe und es sei $p \neq 0$ ein Polynom. Dann hat für jedes $t > 0$ der Operator $p(T_t)$ dichtes Bild.*

Um den Satz von Conejero, Müller und Peris zeigen zu können, müssen wir den Beweis von Theorem 14.7 noch einmal anschauen. Statt des dort angegebenen (β) benötigt man nämlich im Fall $\Psi(1,0) = \operatorname{id}_X$ nur

(β) Alle $\Psi(0,t)$ und alle Konvexkombinationen von id_x und $\Psi(1,t)$, $t > 0$, haben dichtes Bild.

16.5 Theorem (Conejero, Müller und Peris (2007)). *Es sei $(T_t)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X. Falls $x \in X$ hyperzyklisch für $(T_t)_{t\geq 0}$ ist, so ist x hyperzyklisch für jedes T_t, $t > 0$.*

Damit kann man jetzt das Analogon zum Satz von Herrero und Bourdon zeigen.

16.6 Theorem. *Sei $(T_t)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe und sei x ein hyperzyklischer Vektor. Dann ist für jedes $t > 0$ die Menge*

$$\{p(T_t)x \mid p \ \textit{Polynom}\} \setminus \{0\}$$

eine dichte Menge von hyperzyklischen Vektoren.

17 Der Erzeuger einer hyperzyklischen Halbgruppe

In diesem Kapitel ist X weiterhin ein separabler Banachraum.

17.1 Bezeichnung. Es sei A ein unbeschränkter Operator auf X mit Definitionsbereich $D(A)$. Wir bezeichnen $\lambda \in \mathbb{K}$ als *Eigenwert* von A', wenn es ein $\varphi \in X'$ gibt mit $\varphi \neq 0$ und

$$\langle \varphi, Ax \rangle = \lambda \langle \varphi, x \rangle \quad \text{für alle } x \in D(A).$$

In §19 der Funktionalanalysis I hatten wir den *Erzeuger* eine Halbgruppe definiert durch

$$Ax = \lim_{h \searrow 0} \frac{T_h x - x}{h} \quad \text{und} \quad D(A) = \left\{ x \in X \,\middle|\, \lim_{h \searrow 0} \frac{T_h x - x}{h} \text{ existiert} \right\}.$$

Wir hatten gezeigt, dass

$$T_t(D(A)) \subseteq D(A).$$

Wir erinnern außerdem an Satz 19.11 der Funktionalanalysis I:

17.2 Satz. *Es sei A der Erzeuger der C_0-Halbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$ und es sei $x_0 \in D(A)$. Dann ist die Funktion $u\colon [0, \infty[\, \to X$, $u(t) = T_t x_0$, stetig differenzierbar mit Werten in $D(A)$ und eine Lösung des abstrakten Cauchyproblems*

$$u' = Au, \quad u(0) = x_0. \tag{17.1}$$

Ferner ist u die einzige stetig differenzierbare, $D(A)$-wertige Lösung von (17.1) und $u(t)$ hängt stetig vom Anfangswert x_0 ab.

17.3 Lemma. *Es sei $(T_t)_{t \geq 0}$ eine hyperzyklische C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A. Dann besitzt A' keinen Eigenwert.*

Der folgende Satz folgt direkt aus Satz 17.2.

17.4 Satz. *Es sei $(T_t)_{t \geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A. Es sei x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann $T_t x = e^{\lambda t} x$ für alle $t \geq 0$.*

Die Umkehrung entnehme ich dem Buch von Engel und Nagel [5], Chapter V, § 2.6.

17.5 Satz. *Seien $\lambda \neq 0$ und $t_0 > 0$.*

(a) *λ ist genau dann ein Eigenwert von T_{t_0}, wenn es einen Eigenwert μ von A gibt, so dass $e^{\mu t_0} = \lambda$.*

(b)
$$\ker(\mathrm{id} - T_{t_0}) = \overline{\mathrm{LH}\left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \ker\left(\frac{2\pi i k}{t_0} \mathrm{id}_X - A\right)\right)}.$$

17.6 Theorem. *Sei X ein komplexer Banachraum und sei A der Erzeuger einer chaotischen Halbgruppe auf X. Dann besitzt A unendlich viele rein imaginäre Eigenwerte und es gilt*

$$X = \overline{\mathrm{LH}\left(\bigcup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \ker(\lambda\, \mathrm{id}_X - A)\right)}. \tag{17.2}$$

17.7 Satz. *Sei ν ein zulässiges Gewicht, sei $1 \leq p < \infty$ und sei $(T_t)_{t \geq 0}$ die Translationshalbgruppe auf $L^p_\nu(\mathbb{R}^+)$. Es sind äquivalent*

(a) *$(T_t)_{t \geq 0}$ ist chaotisch.*

(b) *$\int \nu \, d\lambda_1 < \infty$.*

Nachtrag zum Beweis des Satzes von Conejero, Müller und Peris:

17.8 Korollar. *Sei $(T_t)_{t \geq 0}$ eine hyperzyklische Halbgruppe, sei $0 \leq r \leq 1$ und seien $s, t > 0$. Dann hat $rT_s + (1-r)T_t$ dichtes Bild.*

Antwort auf eine Frage aus der Übung:

17.9 Theorem (Grivaux [6]). *Sei X ein separabler Banachraum. Dann besitzt X einen mischenden Operator.*

18 Kriterien für die Hyperzyklizität von Halbgruppen

In diesem Kapitel ist X weiterhin ein separabler Banachraum.

18.1 Definition. Eine *Diskretisierung* einer C_0-Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ ist eine Folge $(T_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Eine *autonome Diskretisierung* ist eine Folge $(T_{nt})_{n\in\mathbb{N}}$ mit einem $t > 0$.

18.2 Satz. *Es sei $(T_t)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X und es sei $x \in X$. Es sind äquivalent:*

(a) x ist hyperzyklisch für $(T_t)_{t\geq 0}$.

(b) Es gibt eine Diskretisierung, für die x hyperzyklisch ist.

(c) Es gibt eine autonome Diskretisierung, für die x hyperzyklisch ist.

(d) x ist hyperzyklisch für jede autonome Diskretisierung.

18.3 Korollar. *Es sei $(T_t)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X und es sei $x \in X$. Es sind äquivalent:*

(a) $(T_t)_{t\geq 0}$ ist schwach mischend.

(b) Es gibt eine schwach mischende Diskretisierung.

(c) Es gibt eine autonome Diskretisierung, die schwach mischend ist.

(d) Jede autonome Diskretisierung ist schwach mischend.

Bemerkung. Man kann sogar zeigen, dass es in diesem Fall eine mischende Diskretisierung gibt.

18.4 Satz. *Es sei $(T_t)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X und es sei $x \in X$. Es sind äquivalent:*

(a) $(T_t)_{t\geq 0}$ ist mischend.

(b) Jede Diskretisierung ist mischend.

(c) Jede Diskretisierung ist schwach mischend.

(d) *Jede Diskretisierung ist hyperzyklisch.*

(e) *Jede autonome Diskretisierung ist mischend.*

(f) *Es gibt eine autonome Diskretisierung, die mischend ist.*

18.5 Theorem (Hyperzyklizitätskriterium für Folgen von Operatoren). *Es sei* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Operatoren. Es gebe dichte Teilmengen* $X_0, Y_0 \subseteq X$*, eine streng monotone Folge* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{N}$ *und Abbildungen* $S_{n_k}\colon Y_0 \to X$*, so dass für alle* $x \in X_0$ *und* $y \in Y_0$

(a) $T_{n_k}x \to 0$,

(b) $S_{n_k}y \to 0$,

(c) $T_{n_k}S_{n_k}y \to y$.

Dann ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *schwach mischend, insbesondere hyperzyklisch.*

18.6 Theorem (Hyperzyklizitätskriterium für Halbgruppen). *Es sei* $(T_t)_{t\geq 0}$ *eine* C_0*-Halbgruppe. Es gebe dichte Teilmengen* $X_0, Y_0 \subseteq X$*, eine Folge* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}^+$ *mit* $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ *und Abbildungen* $S_n\colon Y_0 \to X$*, so dass für alle* $x \in X_0$ *und* $y \in Y_0$

(a) $T_{t_n}x \to 0$,

(b) $S_{t_n}y \to 0$,

(c) $T_{t_n}S_{t_n}y \to y$.

Dann ist $(T_t)_{t\geq 0}$ *schwach mischend, insbesondere hyperzyklisch.*

18.7 Theorem. *Sei* $(T_t)_{t\geq 0}$ *eine* C_0*-Halbgruppe. Es gebe dichte Teilmengen* $X_0, Y_0 \subseteq X$ *und Abbildungen* $S_t\colon Y_0 \to X$*, so dass für alle* $x \in X_0$ *und* $y \in Y_0$

(a) $T_t x \to 0$,

(b) $S_t y \to 0$,

(c) $T_t S_t y \to y$.

Dann ist $(T_t)_{t\geq 0}$ *mischend.*

18.8 Theorem. *Sei* $(T_t)_{t\geq 0}$ *eine* C_0*-Halbgruppe. Es gebe dichte Teilmengen* $X_0, Y_0 \subseteq X$*, so dass*

(a) $\lim_{t\to\infty} T_t x = 0$ *für alle* $x \in X_0$.

(b) *Für jedes* $y \in Y_0$ *gibt es eine Familie* $(u_t)_{t\geq 0}$*, so dass* $\lim_{t\to\infty} u_t = 0$ *und* $\lim_{t\to\infty} T_t u_t = y$.

Dann ist $(T_t)_{t\geq 0}$ *mischend.*

18.9 Theorem (Desch, Schappacher und Webb (1997)). *Sei* X *ein komplexer Banachraum und sei* $(T_t)_{t\geq 0}$ *eine* C_0*-Halbgruppe mit Erzeuger* A*. Es gebe ein Gebiet* $U \subseteq \mathbb{C}$*, eine Menge* J *und für jedes* $j \in J$ *eine schwach holomorphe Funktion* $f_j \colon U \to X$*, so dass*

(a) $U \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$*;*

(b) $f_j(\lambda) \in \ker(\lambda \operatorname{id}_x - A)$ *für jedes* $\lambda \in U$ *und* $j \in J$*;*

(c) wenn $\langle \varphi, f_j(\lambda)\rangle = 0$ *für alle* $\lambda \in U$ *und* $j \in J$*, dann* $\varphi = 0$*.*

Dann ist $(T_t)_{t\geq 0}$ *mischend und chaotisch.*

18.10 Beispiel. Sei $\nu(x) = e^{-x}$. Wir zeigen noch einmal, dass $L^p_\nu(\mathbb{R}^+)$ chaotisch ist. Der Dualraum ist $L^q_w(\mathbb{R}^+)$ mit $w = \nu^{-q/p}$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $w = \nu^{-1}$ für $p = 1$.

Wir definieren $f \colon \mathbb{D} \to L^p_\nu(\mathbb{R}^+)$ durch $f(\lambda)(x) = e^{\lambda x}$. Diese Funktion ist offenbar schwach holomorph. Außerdem gilt $Af(\lambda) = \lambda f(\lambda)$. Sei $g \in L^q_w(\mathbb{R}^+)$. Falls $\langle g, f(\lambda)\rangle = 0$ für alle λ, so gilt

$$\int_0^\infty g(x)e^{\lambda x}\,dx = 0.$$

Wir differenzieren n-mal nach λ. Das führt zu

$$\int_0^\infty x^n g(x)e^{\lambda x}\,dx = 0$$

und daher auch für alle Polynome p

$$\int_0^\infty p(x)g(x)e^{\lambda x}\,dx = 0.$$

Da die Polynome dicht in $L^p_\nu(\mathbb{R}^+)$ sind, haben wir $g = 0$ gezeigt und können das Theorem anwenden.

19 Halbgruppenlösungen von Differentialoperatoren

19.1 Beispiel. Wir betrachten auf $X = L^1(\mathbb{R}^+)$ das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2x}{1+x^2}u, \\ u(0,x) &= \varphi(x), \end{aligned} \tag{19.1}$$

mit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

19.2 Lemma. *Sei*

$$u(x,t) = \frac{1+(x+t)^2}{1+x^2}\varphi(x+t).$$

Dann $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ *und* u *ist eine Distributionslösung von* (19.1).

19.3 Lemma. *Durch*

$$T_t \colon L^1(\mathbb{R}^+) \to L^1(\mathbb{R}^+), \quad T_t\varphi(x) = \frac{1+(x+t)^2}{1+x^2}\varphi(x+t),$$

wird eine C_0*-Halbgruppe gegeben.*

19.4 Satz. *Die Halbgruppe aus Lemma 19.3 ist mischend und chaotisch.*

19.5 Beispiel. Wir untersuchen die folgende hyperbolische Differentialgleichung zweiter Ordnung. Dabei sind $\tau, \alpha > 0$ Konstanten.

$$\begin{aligned} \tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,x) &= \varphi_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= \varphi_1(x). \end{aligned} \tag{19.2}$$

Zuerst reduzieren wir sie zu einem Syteme erster Ordnung, indem wir $u_0 = u$ und $u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$ einführen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ \frac{\alpha}{\tau}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{1}{\tau}\,\mathrm{id} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u_0(0,x) \\ u_1(0,x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{19.3}$$

Wir untersuchen das Problem auf einem Raum reell analytischer Funktionen. Für $\rho > 0$ beliebig setzen wir

$$X_\rho = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in c_0 : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \rho^n}{n!} x^n \right\}$$

und versehen ihn mit der Norm $\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\rho^n}{n!} x^n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n|$.

19.6 Lemma. *Durch*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X_\rho} \\ \frac{\alpha}{\tau}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{1}{\tau}\,\mathrm{id}_{X_\rho} \end{pmatrix}$$

wird ein stetig linearer Endomorphismus von $X := X_\rho \oplus X_\rho$ *gegeben.*

19.7 Satz. A *ist der Erzeuger einer normstetigen Halbgruppe. Nach Satz 17.2 löst diese Halbgruppe das Cauchy-Problem* (19.3)*.*

19.8 Satz (Conejero, Peris und Trujillo (2010))*. Wenn* $\alpha\tau\rho^2 > 2$*, dann ist die Halbgruppe* $(T_t)_{t\geq 0}$ *mischend und chaotisch.*

Bemerkung. Emamirad, Goldstein und Goldstein haben gezeigt, dass die Black-Scholes Gleichung chaotische Lösungshalbgruppen besitzt.

20 Frequent hypercyclicty

In diesem Kapitel ist X ein Fréchetraum.

20.1 Definition. (a) Die *untere Dichte* einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}_0$ ist definiert als

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{|\{0 \le n \le N \mid n \in A\}|}{N+1}.$$

(b) Eine Operator $T\colon X \to X$ heißt *frequently hypercyclic,* wenn es zu jedem offenen, nicht-leeren $U \subseteq X$ ein $x \in X$ gibt, so dass die untere Dichte von $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid T^n x \in U\}$ positiv ist. In diesem Fall ist x ein frequently hypercyclic Vektor von T.

Die Menge aller dieser Vektoren bezeichnen wir mit $\mathrm{FHC}(T)$.

20.2 Bemerkung. (a) Ein messbare Abbildung $T\colon (X, \mathcal{A}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \nu)$ zwischen zwei Wahrscheinlichkeiträumen heißt *maßerhaltend,* wenn $\mu(T^{-1}(M)) = \nu(M)$ für jedes messbare M.

(b) Eine maßerhaltende Abbildung $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ heißt *ergodisch,* wenn für jedes $U \in \mathcal{B}$ mit $\mu(U) > 0$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)\right) = 1.$$

(c) Der Birkoffsche Ergodizitätssatz (s. [4], Theorem 2.30) sagt:

Wenn T ergodisch und $f \in L^1(\mu)$ ist, dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) = \int f \, d\mu \quad \mu\text{-f. ü.}$$

(d) Hieraus kann man schließen ([7], § 9.1), dass ergodische Operoren frequently hypercyclic sind.

20.3 Bemerkung. $x \in \mathrm{FHC}(T)$ genau dann, wenn es zu jeder nicht-leeren, offenen Teilmenge $U \subseteq X$ eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $T^{n_k} x \in U$ und $n_k = O(k)$.

20.4 Satz. *Wenn* T *quasikonjugiert zu* S *und* S *frequently hypercyclic ist, so gilt dies auch für* T.

20.5 Lemma (Bayart und Grivaux (2006)). *Es gibt paarweise disjunkte Teilmengen* $A(\ell,\nu) \subset \mathbb{N}_0$, $\ell,\nu \in \mathbb{N}$, *mit positiver unterer Dichte, so dass für alle* $n \in A(\ell,\nu)$, $m \in A(k,\mu)$ *gelten*

(a) $n \geq \nu$,

(b) $n = m$ *oder* $|n-m| \geq \nu + \mu$.

Das beweisen wir schrittweise. Der Beweis des Lemmas von Bayart und Grivaux aus dem Buch [7] stammt von Bonelli und Grosse-Erdmann.

20.6 Bezeichnung. (a) Wir identifizieren eine natürliche Zahl n mit ihrer dyadischen Darstellung $(a_0, a_1, \dots)$, wobei

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^j.$$

Dann besteht $I(\ell,\nu)$ aus denjenigen n, deren dyadische Darstellung mit genau $\ell-1$ Nullen, gefolgt von genau ν Einsen, gefolgt von einer Null, beginnt. Diese Mengen bilden eine Partition von $\mathbb{N}$.

(b) Für $k \in I(\ell,\nu)$ setzen wir $\delta_k = \nu$.

Beispiel: $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 2$, $\delta_4 = 1$, $\delta_5 = 1$, $\delta_6 = 2$.

(c) Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$n_k = 2\sum_{j=1}^{k-1} \delta_j + \delta_k.$$

Diese Folge ist streng monoton wachsend.

(d) Nun setzen wir

$$A(\ell,\nu) = \{n_k \mid k \in I(\ell,\nu)\}.$$

Dann sind die $A(\ell,\nu)$ paarweise disjunkt. Ferner $n_k \geq \delta_k = \nu$ für $n_k \in A(\ell,\nu)$.

(e) Seien nun $n_j \in A(\ell,\nu)$ und $n_m \in A(k,\mu)$ mit $n_j \neq n_m$. Ohne Einschränkung sei $m < j$. Dann

$$n_j - n_m = \delta_j + 2\sum_{i=m}^{j-1} \delta_i - \delta_m = \delta_j + 2\sum_{i=m+1}^{j-1} \delta_i + \delta_m \geq \delta_j + \delta_m = \nu + \mu.$$

20.7 Lemma. *Es gibt* M, *so dass* $n_k \leq Mk$ *für alle* k.

20.8 Definition. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in einem Fréchetraum heißt *unbedingt konvergent,* wenn es ein b gibt, so dass für jede Permutation π von $\mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ gegen b konvergiert.

20.9 Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ konvergiert unbedingt, aber nicht absolut in c_0.

20.10 Satz ([9], Proposition 1.c.1). *Sei* X *ein Fréchetraum mit F-Norm* $\|\cdot\|$ *und sei* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *eine Reihe in* X*. Es sind äquivalent:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konvergiert unbedingt.*

(b) Zu jedem $\epsilon > 0$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$*, so dass*

$$\left\| \sum_{j \in F} x_j \right\| < \epsilon$$

für jede endliche Teilmenge F *von* $\{j \mid j \geq n\}$*.*

20.11 Theorem (Frequent Hypercyclicity Criterion, Bayart und Grivaux (2006), Bonilla und Grosse-Erdmann (2007)). *Es sei* $T\colon X \to X$ *ein Operator. Es gebe eine dichte Teilmenge* $X_0 \subseteq X$ *und eine Abbildung* $S_0\colon X_0 \to X_0$*, so dass für jedes* $x \in X_0$

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} T^n x$ *konvergiert unbedingt,*

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} S^n x$ *konvergiert unbedingt,*

(c) $TSx = x$*.*

Dann ist T *frequently hypercyclic.*

20.12 Lemma. *Es sei* X *ein Fréchetraum, dessen Topologie durch das Halbnormensystem* $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *gegeben wird und es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *eine Reihe in* X*. Wenn* $\sum_{n=1}^{\infty} p_k(x_n) < \infty$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*, dann konvergiert die Reihe unbedingt.*

20.13 Beispiel. Der Operator von MacLane $T\colon \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $f \mapsto f'$, ist frequently hypercyclic.

20.14 Beispiel. Für $a \neq 0$ ist der Birkhoff-Operator $T_a\colon \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(c)$, $Tf(z) = f(z+a)$, frequently hypercyclic.

Das beweisen sowohl Bayart und Grivaux als auch Grosse-Erdmann und Peris direkt. Die letztere Gruppe nutzt den Satz von Runge, um rekursiv einen frequently hypercyclic vector zu konstruieren.

Einen — zumindest philosophischen — Grund, warum in der Theory der frequent hypercyclicty so viel Handarbeit angesagt ist, zeigt folgender Satz:

20.15 Satz (Bayart und Grivaux (2006)). *Der Operator* $T\colon X \to X$ *sei frequently hypercyclic. Ferner gebe es eine dichte Menge* $X_0 \subset X$*, so dass* $\lim_{n\to\infty} T^n x = 0$ *für alle* $x \in X_0$*. Dann ist* $\mathrm{FHC}(T)$ *von erster Kategorie.*

20.16 Definition. (a) Eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen heißt *syndetisch,* wenn $\sup_{k\in\mathbb{N}}(n_{k+1} - n_k) < \infty$.

(b) Für $A \subseteq \mathbb{N}_0$ setzen wir $A - A = \{m - n \mid n, m \in A\} \cap \mathbb{N}_0$.

20.17 Satz (Erdős-Sárközy). *$A \subseteq \mathbb{N}_0$ habe positive untere Dichte. Dann ist $A - A$ syndetisch.*

Ähnlich wie in § 3 zeigt man

20.18 Satz. *Ein Operator $T\colon X \to X$ ist genau dann schwach mischend, wenn für jede Nullumgebung W und jede Wahl von nicht-leeren, offenen Mengen $U, V \subset X$ gilt*

$$N(U, W) \cap N(W, V) \neq \emptyset.$$

20.19 Theorem (Bayart und Grivaux). *Wenn ein Operator frequently hypercyclic ist, dann ist er auch schwach mischend.*

Die Rückrichtung gilt nicht. Als Example 9.18 wird in [7] ein Operator angegeben, der mischend, aber nicht frequently hypercyclic ist.

Zumindest als das Buch erschienen ist war beispielsweise offen, ob für einen frequently hypercyclic Operator T dies auch für die Summe $T \oplus T$ gilt.

Literatur

[1] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. Third. International Series in Pure and Applied Mathematics. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, S. xi+331. ISBN: 0-07-000657-1.

[2] F. Bayart und É. Matheron. "Hypercyclic operators failing the hypercyclicity criterion on classical Banach spaces". In: *J. Funct. Anal.* 250.2 (2007), S. 426–441. ISSN: 0022-1236,1096-0783. DOI: 10.1016/j.jfa.2007.05.001. URL: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.05.001.

[3] Joseph Diestel. *Sequences and series in Banach spaces*. Bd. 92. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1984, S. xii+261. ISBN: 0-387-90859-5. DOI: 10.1007/978-1-4612-5200-9. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5200-9.

[4] Manfred Einsiedler und Thomas Ward. *Ergodic theory with a view towards number theory*. Bd. 259. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011, S. xviii+481. ISBN: 978-0-85729-020-5. DOI: 10.1007/978-0-85729-021-2. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-85729-021-2.

[5] Klaus-Jochen Engel und Rainer Nagel. *A short course on operator semigroups*. English. Universitext. New York, NY: Springer, 2006. ISBN: 0-387-31341-9.

[6] Sophie Grivaux. "Hypercyclic operators, mixing operators, and the bounded steps problem". In: *J. Operator Theory* 54.1 (2005), S. 147–168. ISSN: 0379-4024,1841-7744.

[7] Karl-G. Grosse-Erdmann und Alfredo Peris Manguillot. *Linear chaos*. Universitext. Springer, London, 2011, S. xii+386. ISBN: 978-1-4471-2169-5. DOI: 10.1007/978-1-4471-2170-1. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2170-1.

[8] G. H. Hardy, J. E. Littlewood und G. Pólya. *Inequalities*. 2d ed. Cambridge, at the University Press, 1952, S. xii+324.

[9] Joram Lindenstrauss und Lior Tzafriri. *Classical Banach spaces. I*. Bd. Band 92. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]. Sequence spaces. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, S. xiii+188. ISBN: 3-540-08072-4.

[10] Reinhold Remmert. *Funktionentheorie. I.* Bd. 5. Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, 1984, S. xiii+324. ISBN: 3-540-12782-8. DOI: 10.1007/978-3-642-96793-1. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-96793-1.

[11] Manuel de la Rosa und Charles Read. "A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic". In: *J. Operator Theory* 61.2 (2009), S. 369–380. ISSN: 0379-4024,1841-7744.

[12] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Third. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987, S. xiv+416. ISBN: 0-07-054234-1.