Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 25.06.2018

Blatt 11

Übungen zu Einführung in die Funktionalanalysis

1. (10P) Der Operator $A \in L(\ell^2)$ sei gegeben durch $Ax = y$, wobei
$$y_{2k-1} = \frac{1}{k} x_{2k-1} + \frac{1}{\sqrt{k}} x_{2k}, \quad y_{2k} = \frac{1}{k} x_{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$
   (a) (2P) Zeigen Sie $A \in K(\ell^1)$.
   (b) (3P) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.
   (c) (2P) Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(A)$.
   (d) (3P) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert λ den Kern von $\lambda \operatorname{id} - A$.

2. Es sei A der Operator aus Aufgabe 1.
   (a) (3P) Ist A selbstadjungiert?
   (b) (7P) Bestimmen Sie A^*A.

3. (a) (5P) Sei E ein Banachraum und sei $A \in L(E)$ mit Eigenwert λ. Zeigen Sie $\lambda \in \sigma(A')$.
   Hinweis: Verwenden Sie Dualitätstheorie (also §10).
   (b) (2P) Für $1 < p < \infty$ sei q der konjugierte Exponent (also der mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Ferner sei S wie in Aufgabe 3 von Blatt 10 der Linksshift und
$$R\colon \ell^p \to \ell^p, \quad (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots),$$
   der Rechtsshift. Zeigen Sie $S' = R$.
   (c) (3P) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass Eigenwerte von A nicht notwendig Eigenwerte von A' sind.

4. Es sei E ein normierter Raum.
   (a) (4P) Für $x_0 \in E$ sei $A \in L(\mathbb{K}, E)$ definiert durch $A\lambda = \lambda x_0$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann $A' \in L(E', \mathbb{K}') = E''$. Drücken Sie A' durch die Einbettung $J_E\colon E \hookrightarrow E''$ aus.
   (b) (6P) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi\colon L(\mathbb{K}, E) \to L(E', \mathbb{K}')$, $A \mapsto A'$, genau dann surjektiv ist, wenn E reflexiv ist.

   Hinweis: Diese Aufgabe liefert das bei Satz 10.3 angekündigte Beispiel.

Abgabe: Mo, 02.07.2018, vor der Vorlesung **Besprechung:** 10. Juli