Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 02.07.2018
Blatt 12

Übungen zu Einführung in die Funktionalanalysis

1. Gegeben sei der Operator

$$T\colon C[0,1] \to C[0,1],$$
$$Tf(x) = \int_0^x \int_0^t f(s)\, ds\, dt - x \int_0^1 \int_0^t f(s)\, ds\, dt.$$

   (a) (4P) Zeigen Sie, dass T kompakt ist.

   (b) (3P) Zeigen Sie $\operatorname{Bild} T \subset C^2(0,1)$.

   (c) (3P) Zeigen Sie $(Tf)'' = f$ für alle $f \in C[0,1]$.

   (d) (2P) Zeigen Sie $Tf(0) = Tf(1) = 0$ für alle $f \in C[0,1]$.

   (e) (6P) Bestimmen Sie $\sigma(T)$.
   Hinweis: Hier ist Aussage (c) nützlich.

   (f) (2P) Bestimmen Sie $\ker T$.

2. (10P) Bestimmen Sie eine Funktion $f \in H^1(\mathbb{R})$, so dass deren schwache Ableitung die Differentialgleichung

$$f' - 2f = g(x)$$

   erfüllt, wobei

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

   Hinweis: Lösen Sie mit den Mitteln der Analysis II, verheften Sie geeignet und zeigen Sie schließlich, dass die Gleichung im H^1-Sinn gilt.

3. (10P) $C^1[0,1]$ trage wie üblich die Norm $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung $(C^1[0,1], \|\cdot\|) \hookrightarrow (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ kompakt ist.

Abgabe: Mo, 09.07.2018, vor der Vorlesung **Besprechung:** 17. Juli