Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 30.04.2018

Blatt 3

Übungen zu Einführung in die Funktionalanalysis

1. Seien E ein k-Vektorraum und $P\colon E \to E$ eine Projektion. Zeigen Sie
   (a) (2P) $\mathrm{id} - P$ ist ebenfalls eine Projektion.
   (b) (6P) $\mathrm{Bild}(\mathrm{id} - P) = \ker P$,
   (c) (2P) $\ker(\mathrm{id} - P) = \mathrm{Bild}\, P$.

2. (10P) Zeigen Sie, dass der ℓ^p für $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$ kein Hilbertraum ist.

   Hinweis: Verwenden Sie die Parallelogrammgleichung.

3. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei die Funktion f_λ definiert durch $f_\lambda(t) = e^{\lambda i t}$. Der $\mathbb{C}$-Vektorraum X bestehe aus allen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Form

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j f_{\lambda_j},$$

   wobei $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ beliebig variieren.

   (a) (4P) Zeigen Sie, dass durch

$$(f, g) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}dt$$

   ein Skalarprodukt auf X gegeben wird.
   (b) (2P) Zeigen Sie $f_\lambda \perp f_\mu$ für $\lambda \neq \mu$.
   (c) (2P) Bestimmen Sie $\|f_\lambda - f_\mu\|$ für $\lambda \neq \mu$, wobei $\|\cdot\|$ die durch das Skalarprodukt aus Teil (a) induzierte Norm bezeichnet.
   (d) (2P) Ist X separabel, wenn man den Raum mit der Norm aus (c) versieht?

4. Es sei $1 \leq p < q < \infty$. Zeigen Sie
   (a) (3P) $\ell^p \subset \ell^q$.
   (b) (2P) $\ell^p \neq \ell^q$.
   (c) (5P) Die Inklusion $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$ ist stetig.

   Hinweis: Die Hölder-Ungleichung nützt hier nichts.

Abgabe: Mo, 07.05.2018, 12:20

Besprechung: 15. Mai