Übungen zu Einführung in die Funktionalanalysis

1. (8P) Sei $H = \mathbb{R}^4$ versehen mit der Skalarprodukt $(x,y) = \sum_{j=1}^4 x_j y_j$. Sei $F = \{x \in H \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$ und sei $P\colon H \to H$ die orthogonale Projektion mit Bild $P = F$. Bestimmen Sie $P(x)$ für $x = (1,-2,0,0)$.

   Hinweis: Gram-Schmidt Orthogonalisierung ist eine Möglichkeit.

2. (10P) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n \in (\ell^1)'$ gegeben durch

$$T_n((x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = x_n.$$

   Stellen Sie fest, ob die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\ell^1)'$ konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Beweisen Sie Ihre Aussage.

3. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $f_n(x) = \left(x^2-1\right)^n$. Dann ist das n-te Legendre-Polynom $P_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert als

$$P_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n} f_n.$$

   (a) (1P) Zeigen Sie für $j = 0,\dots,n$ die Existenz eines Polynoms q_j mit

$$f_n^{(j)}(x) = \left(x^2-1\right)^{n-j} q_j(x).$$

   (b) (2P) Zeigen Sie $f_n^{(2n)} \equiv (2n)!$
   Hinweis: Binomialsatz!

   (c) (1P) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq m$. Zeigen Sie induktiv für $j = 0,\dots,m$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\right)\left(\frac{d^m}{dx^m}\left(x^2-1\right)^m\right)dx$$
$$= (-1)^j \int_{-1}^1 \left(\frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}}\left(x^2-1\right)^n\right)\left(\frac{d^{m+j}}{dx^{m+j}}\left(x^2-1\right)^m\right)dx.$$

(d) (8P) Zeigen Sie nun, dass die Legendre-Polynome eine Orthonormalbasis des $L^2[-1,1]$ bilden.

Hinweis: Für die Rechnungen ist es nützlich, sich daran zu erinnern, dass wir in Satz 17.7 der Analysis I gezeigt hatten

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx = \prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1}.$$

4. Es sei $x = \left(\frac{1}{j}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $e_n \in \ell^2$ gegeben durch $e_n = (\delta_{j,n})_{j\in\mathbb{N}}$. Dann ist

$$H = \mathrm{LH}\big(\{x\} \cup \{e_n | n \geq 2\}\big),$$

versehen mit der Norm $\|\cdot\|_2$, ein Prähilbertraum. Ferner sei F der durch $F = \mathrm{LH}\big(\{e_n | n \geq 2\}\big)$ gegebene Unterraum von H. Zeigen Sie:

(a) (3P) $\overline{F} \neq H$.

(b) (7P) $F^{\perp} = \{0\}$.

Hinweis: Abschluss und Orthogonalraum sind in H gemeint.

Abgabe: Mo, 14.05.2018, 12:20 **Besprechung:** 22. Mai