Übungen zu Einführung in die Funktionalanalysis

1. (10P) Zeigen Sie, dass durch

$$T\colon \ell^1 \to (c_0)', \qquad (Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

ein isometrischer Isomorphismus gegeben wird.

2. (10P) Auf dem Banachraum $F := \mathbb{R} \times \{0\} \subset E := \mathbb{R}^2$ sei ein lineares Funktional $y \in F'$ gegeben durch $y(x_1, 0) := x_1$. Es sei $1 < p < \infty$. Der Banachraum E sei versehen mit der ℓ^p-Norm. Zeigen Sie, dass es nur eine lineare Fortsetzung $Y \in E'$ von y gibt, die $\|y\| = \|Y\|$ erfüllt.

3. (*Cesaro-Konvergenz*)
   (a) (6P) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem Banachraum E. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
   (b) (2P) Gilt die Aussage von (a) auch noch, wenn E nicht vollständig ist?
   (c) (2P) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in c_0$ an, so dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in c_0 divergiert, aber die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in c_0 konvergiert.

4. Eine lineare Abbildung $\Phi\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ heißt *Banachlimes*, falls
   (i) $\Phi(x) = \Phi(x_2, x_3, x_4, \dots)$ für alle $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^\infty$.
   (ii) $\Phi(x) \geq 0$ falls alle $x_j \geq 0$.
   (iii) $\Phi(1, 1, 1, \dots) = 1$.

   Zeigen Sie
   (a) (2P) Durch $p(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$ wird ein sublineares Funktional auf ℓ^∞ gegeben.
   (b) (1P) Es gibt eine Fortsetzung Φ des linearen Funktionals

$$\varphi\colon c \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n,$$

   mit $\Phi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in \ell^\infty$.
   (c) (7P) Dieses Φ ist ein Banachlimes.

Abgabe: Di, 22.05.2018, 12:20 **Besprechung:** 29. Mai