Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 22.05.2018

Blatt 6

Übungen zu Einführung in die Funktionalanalysis

1. Zeigen Sie in den folgenden beiden Fällen die Existenz einer Fortsetzung *ohne Verwendung des Satzes von Hahn-Banach.*
   (a) (3P) Seien E ein normierter Raum, $F \subset E$ ein dichter Unterraum und $y \in F'$. Zeigen Sie die Existenz einer Fortsetzung $Y \in E'$.
   (b) (7P) Seien H ein Hilbertraum, $F \subset H$ ein Unterraum und $y \in F'$. Zeigen Sie die Existenz einer Fortsetzung $Y \in H'$.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \coloneqq (f_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$ gegeben durch
$$f_{n,j} = \begin{cases} 1, & j \le n, \\ 0, & j > n. \end{cases}$$
   (a) (3P) Ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in c_0 beschränkt?
   (b) (7P) Besitzt Sie eine schwach konvergente Teilfolge?

   Beweisen Sie in beiden Fällen Ihre Aussage.
3. (a) (8P) Konstruieren Sie einen isometrischen Isomorphismus $\Phi\colon c_0 \to F$ von c_0 auf einen abgeschlossenen Unterraum F von $C[0,1]$.
   Hinweis: Beim Beweis der Abgeschlossenheit hilft Satz 2.4.
   (b) (2P) Zeigen Sie, dass $C[0,1]$ nicht reflexiv ist.
4. (10P) Sei E ein normierter Raum, und sei $F \subset E$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Mit $F^\perp \subset E'$ werde der Annihilator von F in E' bezeichnet. Zeigen Sie
$$(E/F)' \cong F^\perp,$$
$$F' \cong E'/F^\perp.$$

Abgabe: Mo, 28.05.2018, 12:20

Besprechung: 5. Juni