Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 28.05.2018

Blatt 7

Übungen zu Einführung in die Funktionalanalysis

1. (10P) Es sei E ein normierter Raum, es sei $M \subseteq E$ und es sei C der Abschluss der konvexen Hülle von M.

   Zeigen Sie, dass C konvex ist.

2. (10P) Es sei E ein reflexiver Banachraum und es sei $\emptyset \neq C \subset E$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x_0 \in E$ ein $c \in C$ gibt, so dass
$$\|x_0 - c\| = \inf_{y \in C} \|x_0 - y\|.$$

3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \in \mathbb{R}$ gewählt. Ferner sei $v_n \in \ell^1$ bestimmt durch $v_n = (v_j^n)_{j \in \mathbb{N}}$ mit
$$v_j^n := \begin{cases} a_n, & j \leq n, \\ 0, & j > n. \end{cases}$$

   (a) (5P) Geben Sie eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, für welche die Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im ℓ^1 divergiert und im ℓ^2 gegen 0 konvergiert.

   (b) (5P) Nutzen Sie die Überlegungen aus Teil (a), um zu zeigen, dass die Inklusion $\ell^1 \hookrightarrow \ell^2$ nicht offen ist.

4. (10P) Es sei $P = \mathbb{R}[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome auf $\mathbb{R}$, versehen mit einer beliebigen Norm. Verwenden Sie den Baireschen Kategoriensatz, um zu zeigen, dass P kein Banachraum ist.

Abgabe: Mo, 04.06.2018, 12:20 **Besprechung:** 12. Juni