Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 04.06.2018

Blatt 8

Übungen zu Einführung in die Funktionalanalysis

1. Es seien H ein Hilbertraum und $T\colon H \to H$ eine lineare Abbildung, so dass $(Tx, y) = (x, Ty)$ für alle $x, y \in H$. Zeigen Sie:
   (a) (8P) Der Graph von T ist abgeschlossen.
   (b) (2P) T ist stetig.
2. (10P) Sei E ein Vektorraum. Auf E gebe es zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$, durch die E zu einem Banachraum wird. Es gebe $C > 0$, so dass $\|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$. Zeigen Sie, dass dann die beiden Normen bereits äquivalent sind.
3. (10P) Sei $E = C^1[0, 1]$, aber versehen mit der Supremumsnorm
   $$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|.$$
   Zeigen Sie, dass die Abbildung
   $$A\colon E \to C[0, 1], \quad f \mapsto f',$$
   abgeschlossenen Graphen hat, aber nicht stetig ist.
4. Zeigen Sie das "Prinzip der Verdichtung der Singularitäten": Es sei E ein Banachraum, und es seien $F_1, F_2, \ldots$ normierte Räume. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $G_n \subset L(E, F_n)$ eine unbeschränkte Teilmenge. Gegeben sei die Menge
   $$S = \left\{ x \in E \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N} : \sup_{T \in G_n} \|Tx\| = \infty \right\}.$$
   (a) (8P) Schreiben Sie das Komplement von S als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen.
   (b) (2P) Verwenden Sie Teil (a) und den Baireschen Kategoriensatz, um $S \neq \emptyset$ zu zeigen.

Abgabe: Mo, 11.06.2018, vor der Vorlesung **Besprechung:** 19. Juni