Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 13.04.2018
Präsenzübungsblatt 1

Präsenzübungen zu Einführung in die Funktionalanalysis

1. Betrachten Sie die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} A\colon c &\to c_0, \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto (x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

   (a) Zeigen Sie, dass A ein stetig linearer Operator ist.

   (b) Bestimmen Sie seine Operatornorm.

2. Der Raum $C^1[0,1]$ sei ausnahmsweise mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1} |f(x)|$$

   versehen. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} A\colon (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) &\to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty), \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

   unstetig ist.

3. Der Raum $C[0,2]$ der stetigen Funktionen auf $[0,2]$ sei ausnahmsweise mit der Norm

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^2 |f|^2}$$

   versehen. Betrachten Sie die durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1-\frac{1}{n}, \\ nx-n+1, & 1-\frac{1}{n} \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 2-\frac{1}{n}, \\ nx-2n+1, & 2-\frac{1}{n} \le x \le 2, \end{cases}$$

   gegebenen Folgen in $C[0,2]$.

   (a) Zeigen Sie, dass beide Folgen Cauchyfolgen in $(C[0,2], \|\cdot\|_2)$ sind.

(b) Besitzt eine der beiden Folgen einen Grenzwert in $(C[0,2], \|\cdot\|_2)$? Beweisen Sie Ihre Behauptung, und zwar auch in dem Fall, dass Sie denken, dass die Folge nicht konvergiert.

Die Präsenzübungen werden nicht korrigiert.

Besprechung: 17. April