Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 22.04.2018
Präsenzübungsblatt 2

Präsenzübungen zu Einführung in die Funktionalanalysis

1. Betrachten Sie den Hilbertraum $E = \mathbb{R}^3$ und seinen abgeschlossenen Unterraum $F = \{(t, t, -t) | t \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Ist die Abbildung $(x, y, z) \mapsto (x, x, -x)$ eine Projektion?
   (b) Ist die Abbildung $(x, y, z) \mapsto (z, z, -z)$ eine Projektion?
   (c) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $P\colon E \to E$ mit $\operatorname{Bild} P = F$.
   (d) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $P\colon E \to E$ mit $\ker P = F$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ werde mit e^n der Vektor $e^n = (e^n_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$ bezeichnet, für den
$$e^n_j = \begin{cases} 1, & j = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
   Dann ist $\{e^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ offenbar eine linear unabhängige Teilmenge von c_0.
   (a) Zeigen Sie, dass für $f = (\frac{1}{j})_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$ auch $M = \{e^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von c_0 ist.
   (b) Aus dem Basisergänzungssatz der linearen Algebra folgt die Existenz einer Vektorraumbasis B des c_0 mit $M \subset B$. Die lineare Abbildung $T\colon c_0 \to \mathbb{K}$ sei durch die folgenden Werte auf den Basisvektoren definiert
$$T(b) = \begin{cases} 0, & b = e^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 1, & b = f, \\ 0, & b \notin M. \end{cases}$$
   Ist T stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Präsenzübungen werden nicht korrigiert.

Besprechung: 24. April