Einführung in die Funktionalanalysis

Rüdiger W. Braun

Sommersemester 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Normierte Räume und stetige lineare Abbildungen

Überall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Null ist keine natürliche Zahl.

1.1 Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Norm* auf E ist eine Funktion $\|\cdot\|\colon E \to [0, \infty[$ mit den folgenden Eigenschaften:

(N1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

(N2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in E$ (Dreiecksungleichung).

(N3) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Ein *normierter Raum* $(E, \|\cdot\|)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Norm.

1.2 Bemerkung. Auf einem normierten Raum wird durch

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

eine Metrik definiert. Daher sind alle Begriffe, die für metrische Räume erklärt sind, auch für normierte Räume definiert. Ich wiederhole die wichtigsten:

Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass $\|x_n - x\| < \epsilon$ für alle $n > N$.

Cauchy-Folge Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ für alle $n, m > N$.

ϵ-Umgebung Für $\epsilon > 0$ bezeichnet man die Menge

$$B_\epsilon(x) = \{y \in E \mid \|x - y\| < \epsilon\}$$

als *ϵ-Umgebung* von x.

Umgebung Eine Menge U heißt *Umgebung* eines Punktes $x \in E$, wenn U eine ϵ-Umgebung von x umfasst.

Ist $F \subset E$ ein linearer Unterraum eines normierten Raums $(E, \|\cdot\|)$ und ist $\|\cdot\|_F$ die Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf F, so ist $(F, \|\cdot\|_F)$ ebenfalls ein normierter Raum.

1.3 Beispiele. (a) Es sei M eine nicht-leere Menge. Dann ist

$$l^\infty(M) = \Big\{(x_n)_{n\in M} \;\Big|\; \sup_{n\in M}|x_n| < \infty\Big\},$$

versehen mit der Norm

$$\|(x_n)_{n\in M}\|_\infty = \sup_{n\in M}|x_n|,$$

ein normierter Raum. Wenn M endlich ist, erhält man den $\mathbb{K}^n$ mit der Supremumsnorm.

(b) Mit c bezeichnet man den Unterraum von $l^\infty(\mathbb{N})$, der aus den konvergenten Folgen besteht. Mit c_0 bezeichnet man den Unterraum von c, der aus den Nullfolgen besteht.

(c) Sei X ein kompakter topologischer Raum (also beispielsweise eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{K}^n$). Dann bezeichnet

$$C(X) = \Big\{f\colon X \to \mathbb{K} \;\Big|\; f \text{ stetig}\Big\}$$

den Raum der stetigen Funktionen auf X. Wegen der Kompaktheit von X ist $C(X)$ ein Unterraum von $l^\infty(X)$. Wir versehen ihn mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

1.4 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, sei $A = \overline{G}$, und sei $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ gleichmäßig stetig. Dann existiert eine eindeutig bestimmte, gleichmäßig stetige Abbildung $h\colon A \to \mathbb{R}^m$ mit $h|_G = f$.*

Ein solches h bezeichnet man als *stetige Fortsetzung von f*.

1.5 Bezeichnung. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Ferner gebe es eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\overline{G} = K$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$C^n(K) = \Big\{f \in C(G) \;\Big|\; \text{alle partiellen Ableitungen von } f \text{ bis einschließlich zur Ordnung } n \text{ existieren und sind gleichmäßig stetig}\Big\}.$$

Wegen Satz 1.4 besitzt für jedes α mit $|\alpha| \le n$ die Ableitung $f^{(\alpha)}$ eine stetige Fortsetzung $f_\alpha \in C(K)$. Wir versehen $C^n(K)$ mit der Norm

$$\|f\|_n = \max_{\alpha\le n}\max_{x\in K}|f_\alpha(x)| = \max_{\alpha\le n}\sup_{x\in G}|f^{(\alpha)}(x)|.$$

1.6 Satz. *Seien E und F normierte Räume, und sei $A\colon E \to F$ eine lineare Abbildung. Es sind äquivalent:*

(a) A ist stetig.

(b) A ist gleichmäßig stetig.

(c) *Zu jeder Nullumgebung* U *in* F *existiert eine Nullumgebung* V *in* E *mit* $A(V) \subset U$.

(d) *Es gibt* $C > 0$ *mit* $\|Ax\| \leq C\|x\|$ *für alle* $x \in E$.

1.7 Definition. Bei linearen Abbildungen zwischen normierten Räumen werden die Worte „stetig" und „beschränkt" synonym verwendet. Stetige lineare Abbildungen zwischen normierten Räumen werden auch als beschränkte *Operatoren* bezeichnet. Für einen beschränkten Operator $A \colon E \to F$ definieren wir

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}. \tag{1.1}$$

Wegen Satz 1.6 ist das Supremum endlich. Alle stetigen linearen Abbildungen von E nach F bilden einen Vektorraum, den wir mit $L(E, F)$ bezeichnen. Man sieht sofort, dass $\|\cdot\|$ aus (1.1) eine Norm auf $L(E, F)$ ist. Sie heißt *Operatornorm*.

Spezialfälle mit eigener Bezeichnung: $L(E) = L(E, E)$ und $E' = L(E, \mathbb{K})$. Die Elemente von E' heißen stetige *Linearformen* oder *Funktionale*.

1.8 Bemerkung. Für $A \in L(E, F)$ und $x \in E$ gilt $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$.

1.9 Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf E heißen *äquivalent*, wenn es $C > 0$ gibt mit

$$\frac{1}{C}\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1.$$

1.10 Satz. *Sei* E *ein endlich-dimensionaler normierter Raum, und sei* F *ein beliebiger normierter Raum. Dann ist jede lineare Abbildung* $A \colon E \to F$ *stetig.*

1.11 Bemerkung. (a) Wenn umgekehrt F endlich-dimensional und E beliebig ist, dann gibt es sehr wohl unstetige lineare Abbildungen von E nach F. Solche Abbildungen kann man mit Hilfe einer Vektorraumbasis von E konstruieren.

(b) Die Bestimmung der Operatornorm von A ist meist auch im endlich dimensionalen Fall trickreich.

1.12 Korollar. *Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.*

1.13 Definition. Eine lineare Abbildung zwischen normierten Räumen heißt *Isomorphismus*, wenn sie bijektiv und stetig ist und auch ihre Inverse stetig ist.

Bemerkung. Ein Isomorphismus normierter Räume ist also ein Isomorphismus der zu Grunde liegenden Vektorräume, der gleichzeitig ein Homöomorphismus der zugehörigen metrischen Räume ist.

Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem Vektorraum E sind genau dann äquivalent, wenn $\mathrm{id} \colon (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ ein Isomorphismus ist.

1.14 Beispiel. Es sei $K\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ stetig. Definiere

$$(Tf)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt, \quad f \in C[0,1], 0 \leq s \leq 1.$$

$T\colon C[0,1] \to C[0,1]$ ist ein stetiger Operator. Es ist ein *Fredholmscher Integraloperator* mit *Kern* K.

2 Banachräume

2.1 Definition. Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum, also einer, in dem jede Cauchyfolge konvergiert.

2.2 Bemerkung. (a) Eine Cauchyfolge in einem metrischen Raum konvergiert genau dann, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt.

(b) Wenn zwei normierte Räume E und F isomorph sind, dann ist der eine genau dann ein Banachraum, wenn der andere einer ist.

2.3 Beispiele. (a) Jeder endlich-dimensionale normierte Raum ist ein Banachraum.

(b) Für jede Menge M ist $\ell^\infty(M)$ ein Banachraum.

2.4 Satz. *(a) Ist E ein Banachraum und F ein abgeschlossener Untervektorraum von E, so ist F ein Banachraum.*

(b) Ist E ein normierter Raum und F ein Unterveektorraum von E, der ein Banachraum ist, so ist F abgeschlossen in E.

2.5 Bemerkung. Der Kern eines stetigen linearen Operators ist abgeschlossen.

Diese Bemerkung liefert gelegentlich einen einfachen Nachweis der Bedingung aus Teil (a) des Satzes.

2.6 Beispiele. (a) c und c_0 sind Banachräume.

(b) Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann ist $C(X)$ eine Banachraum.

Das ist klar, weil der gleichmäßige Limes einer Folge stetiger Funktionen wieder stetig ist.

(c) Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt von der Form $K = \overline{G}$ für eine offene Menge G. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $C^m(K)$ ein Banachraum.

2.7 Satz. *Sei E ein normierter Raum, sei F ein abgeschlossener Unterraum von E. Dann wird auf E/F wie folgt eine Norm erklärt*

$$\|x + F\| = \inf_{w \in F} \|x + w\|.$$

Falls E vollständig ist, so auch E/F.

2.8 Satz (Homomorphiesatz). E *und* G *seien normierte Räume, und* F *sei ein abgeschlossener Unterraum von* E*. Die Quotientenabbildung werde mit* $\pi\colon E \to E/F$ *bezeichnet. Für* $\varphi \in L(E, G)$ *gelte* $F \subset \ker \varphi$*. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes* $\psi \in L(E/F, G)$ *mit* $\varphi = \psi \circ \pi$*. Es gilt* $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$.

3 L^p-Räume

Das Lebesguemaß λ_n auf dem $\mathbb{R}^n$ ist vollständig, das heißt jede Teilmenge einer Nullmenge ist messbar.

Ich wiederhole im Skript die wichtigsten Grenzwertsätze der Analysis III. Sie werden in der Vorlesung aber nicht angeschrieben.

Theorem (Satz von Fubini). *Es sei* $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{K}$ *eine messbare Funktion.*

(a) Es gibt Lebesgue-Nullmengen $N_1 \subset \mathbb{R}^n$ *und* $N_2 \subset \mathbb{R}^m$, *so dass für jedes* $s \in \mathbb{R}^n \setminus N_1$ *die Funktion* $t \mapsto f(s,t)$ *messbar ist und für jedes* $t \in \mathbb{R}^m \setminus N_2$ *die Funktion* $s \mapsto f(s,t)$ *messbar ist. Ferner sind die Funktion*

$$s \mapsto \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^m} |f(s,t)| d\lambda_m(t), & s \in \mathbb{R}^n \setminus N_1, \\ 0, & s \in N_1, \end{cases}$$

und die Funktion

$$t \mapsto \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} |f(s,t)| d\lambda_n(s), & t \in \mathbb{R}^m \setminus N_2, \\ 0, & t \in N_2 \end{cases}$$

messbar (mit Werten in $[0,\infty]$*).*

(b) Falls

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} |f(s,t)| \, d\lambda_n(s) \, d\lambda_m(t) < \infty,$$

so ist f *integrierbar.*

(c) Ist f *integrierbar, so ist* $f_t\colon s \mapsto f(s,t)$ *für fast alle* t *integrierbar,*

$$h\colon t \mapsto \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f_t \, d\lambda_n, & \textit{falls } f_t \textit{ integrierbar}, \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \, d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m} h \, d\lambda_m.$$

Theorem (Lemma von Fatou). *Es sei* μ *ein Maß auf* T. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $f_n\colon T \to [0,\infty]$ *messbar. Der punktweise Grenzwert* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ *existiere. Dann ist* f *messbar, und es gilt*

$$\int_T f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_T f_n \, d\mu.$$

Beispiel. Setze

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - |t-n|, & \text{falls } n-1 \leq t \leq n+1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1$ für alle n, aber $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Theorem (Satz von Beppo Levi, Satz über monotone Konvergenz). *Es sei* μ *ein Maß auf* T. *Seien* $f_1, f_2, \ldots : T \to [0,\infty]$ *messbar mit* $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. *Es sei* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *punktweise. Dann ist* f *messbar mit*

$$\lim_{n\to\infty} \int_T f_n \, d\mu = \int_T f \, d\mu \in [0,\infty].$$

Theorem (Konvergenzsatz von Lebesgue, Satz von der majorisierten Konvergenz). *Es sei* μ *ein vollständiges Maß auf* T. *Seien* $f_1, f_2, \ldots : T \to \mathbb{K}$ *integrierbar mit* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *fast überall. Es existiere ferner eine integrierbare Funktion* g, *so dass für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *die Ungleichung* $|f_n| \leq g$ *fast überall gilt. Dann ist* f *integrierbar, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_T f_n \, d\mu = \int_T f \, d\mu.$$

3.1 Definition. Sei μ ein Maß auf T, sei $1 \leq p < \infty$. Dann

$$\mathscr{L}^p(\mu) = \left\{ f\colon T \to \mathbb{K} \text{ messbar} \;\middle|\; \int_T |f|^p < \infty \right\}, \quad \|f\|_p^* = \left(\int_T |f|^p \right)^{1/p}.$$

Dann ist $\mathscr{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum, und $\|f\|_p^*$ erfüllt (N1) und (N2). Falls das Maß nichtleere Nullmengen besitzt, so erfüllt $\|f\|_p^*$ aber nicht (N3), ist also nicht definit. Die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung werden in der Analysis III gezeigt.

Falls μ das Lebesguemaß auf einer messbaren Menge A ist, so schreiben wir $\mathscr{L}^p(A)$ anstellen von $\mathscr{L}^p(\mu)$.

3.2 Satz (Höldersche Ungleichung). *Sei* $1 < p < \infty$, *sei* q *bestimmt durch*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Für $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ *und* $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$ *gelten* $fg \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *und*

$$\|fg\|_1^* \leq \|f\|_p^* \|g\|_q^*.$$

Bemerkung. Für $p = 2$ gilt auch $q = 2$. In diesem Fall heißt die Höldersche Ungleichung üblicherweise Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

3.3 Satz (Minkowskische Ungleichung). *Für* $f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, *gilt*

$$\|f+g\|_p^* \leq \|f\|_p^* + \|g\|_p^*.$$

3.4 Definition. Sei μ ein Maß auf T, und sei $1 \le p < \infty$. Setze

$$N_p = \Big\{f\colon \mathsf{T} \to \mathbb{K} \;\Big|\; \int_{\mathsf{T}} |f|^p = 0\Big\} = \big\{f\colon \mathsf{T} \to \mathbb{K} \text{ messbar} \;\big|\; \mu(\{x \mid f(x) \neq 0\}) = 0\big\}.$$

Dann folgt für $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ und $g \in N_p$ aus der Minkowskischen Ungleichung

$$\|f+g\|_p^* \le \|f\|_p^* + \|g\|_p^* = \|f\|_p^* \le \|f+g\|_p^* + \|-g\|_p^* = \|f+g\|_p^*,$$

also $\|f+g\|_p^* = \|f\|_p^*$ für alle $g \in N$. Wir können daher definieren

$$L^p(\mu) = \mathscr{L}^p(\mu)/N_p \quad \|f\|_p = \|f\|_p^*.$$

3.5 Satz. *Es seien* $1 \le p_1 < p_2 < \infty$ *und es sei* μ *ein Maß auf einer Menge* A *mit* $\mu(A) < \infty$. *Dann existiert eine stetige Einbettung*

$$\iota : L^{p_2}(\mu) \hookrightarrow L^{p_1}(\mu).$$

Es gilt

$$\|\iota\| \le \mu(A)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}.$$

3.6 Satz (Riesz-Fischer). *Sei* μ *ein Maß auf* T. *Dann ist* $L^p(\mu)$ *ein Banachraum.*

Dieser Satz war in der Analysis III aus dem folgenden Ergebnis hergeleitet worden.

3.7 Satz. *Sei* μ *ein Maß auf* T *und sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* $L^p(\mu)$. *Dann besitzt sie eine Teilfolge, die sowohl in* $L^p(\mu)$ *als auch* μ*-fast überall punktweise konvergiert.*

4 Hilberträume

4.1 Definition. Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E ist eine Abbildung $(\cdot,\text{-})\colon E \times E \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(S1) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z)$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x, y, z \in E$,

(S2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ für alle $x, y \in E$,

(S3) $(x,x) \geq 0$ für alle $x \in E$ und $(x,x) = 0$ genau für $x = 0$.

Das Paar $(E, (\cdot,\text{-}))$ bezeichnet man als *Prähilbertraum.* Durch die Setzung $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ wird E zu einem normierten Raum. Ein *Hilbertraum* ist ein vollständiger Prähilbertraum.

4.2 Lemma. *(a)* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2$ *für alle* $x, y \in E$*,*

(b) $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$ *für alle* $x, y \in E$ *(*Cauchy-Schwarz Ungleichung*),*

(c) $\|\cdot\|$ *ist eine Norm auf* E*,*

(d) für jedes $y \in E$ *ist* $\Phi(y)\colon x \mapsto (x,y)$ *eine stetige Linearform auf* E *mit* $\|\Phi(y)\| = \|y\|$.

Bemerkung. Der Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung zeigt außerdem, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

4.3 Lemma. *In jedem Prähilbertraum gelten die folgenden Identitäten:*

(a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(*Parallelogrammgleichung*),*

*(b) (*Polarisationsgleichungen*)*

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2), \quad \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

4.4 Beispiele. (a) Es sei (X,μ) ein Maßraum. Dann ist $L^2(\mu)$ ein Hilbertraum. Insbesondere sind ℓ^2 und alle $\mathbb{K}^n$, versehen mit der euklidischen Norm $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$, Hilberträume.

(b) Jeder abgeschlossene Unterraum eines Hilbertraums ist ein Hilbertraum.

(c) Beispielsweise besitzt $C[0,1]$ das folgende Skalarprodukt

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Mit diesem Skalarprodukt wird $C[0,1]$ zu einem Prähilbertraum.

4.5 Lemma. *Sei $A \neq \emptyset$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines Hilbertraums E. Dann existiert zu jedem $x \in E$ ein eindeutig bestimmtes $y \in A$ mit $\|x-y\| = \operatorname{dist}(x,A)$.*

4.6 Definition. Es sei E ein Prähilbertraum.

(a) Zwei Elemente $x, y \in E$ heißen *orthogonal*, falls $(x,y) = 0$. Man schreibt dann $x \perp y$. Zwei Unterräume G und H von E heißen orthogonal, wenn $x \perp y$, falls $x \in G$ und $y \in H$.

(b) Falls F ein Unterraum von E ist, so bezeichnet man

$$F^\perp = \{x \in E \mid x \perp y \text{ für alle } y \in F\}$$

als das *orthogonale Komplement* von F in E.

4.7 Bemerkungen. (a) Das orthogonale Komplement ist offenbar abgeschlossen.

(b) Für orthogonale Elemente $x, y \in E$ gilt der Satz des Pythogoras

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

4.8 Lemma. *Sei F ein Unterraum eines Prähilbertraums E, und seien $x \in E$ und $y \in F$. Dann sind äquivalent*

(a) $\|x-y\| = \operatorname{dist}(x,F)$,

(b) $x - y \in F^\perp$.

4.9 Definition. (a) Es sei E ein k-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $P\colon E \to E$ heißt *Projektion,* wenn $P^2 = P$.

(b) Sei E ein Prähilbertraum. Eine Projektion $P\colon E \to E$ heißt *orthogonal,* wenn $\operatorname{Bild} P \perp \ker P$.

4.10 Beispiel. Auf $E = L^2[0,1]$ wird durch

$$P(f)(x) = \int_0^1 f\,d\lambda_1$$

eine orthogonale Projektion auf den Unterraum der konstanten Funktionen gegeben.

4.11 Bemerkung. Aus Lemma 4.8 folgt $\|x - Px\| = \mathrm{dist}(x, \mathrm{Bild}\, P)$ für jede orthogonale Projektion P in einem Prähilbertraum.

4.12 Satz. *Sei E ein Prähilbertraum.*

(a) Es sei $P\colon E \to E$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung mit $P^2 = P$ und $\mathrm{Bild}\, P \perp \ker P$. Dann ist P stetig.

(b) Es sei P eine orthogonale Projektion in einem Prähilbertraum, die nicht die Nullabbildung ist. Dann $\|P\| = 1$.

4.13 Definition. Sei E ein normierter Raum. Ein Unterraum $F \subset E$ heißt *komplementiert,* wenn es eine Projektion $P \in L(E)$ mit $\mathrm{Bild}\, P = F$ gibt.

4.14 Satz. *Seien E ein Hilbertraum und $F \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist F komplementiert.*

4.15 Bemerkung. Wenn E ein normierter Raum und X, Y zwei Unterräume mit $E = Y + Y$ sowie $X \cap Y = \{0\}$ sind, dann schreibt man $E = X \oplus Y$. Für einen abgeschlossenen Unterraum F eines Hilbertraums H haben wir gezeigt

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

Bemerkung. Wir haben soeben gesehen, dass jeder abgeschlossene Unterraum eines Hilbertraums komplementiert ist. Lindenstrauss und Tzafriri haben 1971 gezeigt, dass umgekehrt jeder Banachraum, dessen sämtliche abgeschlossenen Unterräume komplementiert sind, isomorph zu einem Hilbertraum ist.

4.16 Korollar. *Seien E ein Hilbertraum und $F \subset E$ ein Unterraum. Dann gelten $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$ und $\overline{F} = F^{\perp\perp}$.*

4.17 Theorem (Rieszscher Darstellungssatz für Linearformen auf Hilberträumen). *Seien E ein Hilbertraum und $y \in E'$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $\eta \in E$ mit*

$$y(x) = (x, \eta) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Für dieses η gilt $\|\eta\| = \|y\|$.

5 Orthonormalsysteme

5.1 Definition. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Banachraum heißt *(Schauder)-Basis*, wenn es zu jedem $x \in E$ eine eindeutig bestimmte Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gibt, so dass $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$.

Bemerkung. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ in einem k-Vektorraum E heißt *linear unabhängig,* wenn alle ihre endlichen Teilfamilien linear unabhängig sind. Eine endliche Familie $(v_1, \dots, v_n)$ heißt linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = 0$$

nur die triviale Lösung $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ besitzt.

Eine *Hamel-Basis* B eines Vektorraums E ist eine linear unabhängige Familie mit der Eigenschaft $LH(B) = E$; hier bezeichnet LH die lineare Hülle.

5.2 Definition. Sei E ein Prähilbertraum. Eine Teilmenge $(e_i)_{i\in I}$ heißt *Orthogonalsystem* in E, falls $e_i \neq 0$ für alle $i \in I$ und $e_i \perp e_j$ für $i \neq j$. Falls zusätzlich noch $\|e\|_i = 1$ für alle $i \in I$, so spricht man von einem *Orthonormalsystem.* Ein Orthonormalsystem heißt *vollständig*, wenn seine lineare Hülle dicht ist. Ein vollständiges Orthonormalsystem wird auch als *Orthonormalbasis* bezeichnet.

5.3 Bemerkung. Sei $(e_i)_{i\in M}$ ein endliches Orthonormalsystem in einem Prähilbertraum E. Dann wird durch $P\colon x \mapsto \sum_{i\in M}(x, e_i)e_i$ eine orthogonale Projektion mit $\operatorname{Bild} P = LH\{e_i \mid i \in M\}$ gegeben. Für jedes Tupel $(\lambda_i)_{i\in M}$ gilt

$$\Big\|\sum_{i\in M} \lambda_i e_i\Big\|^2 = \Big(\sum_{i\in M} \lambda_i e_i, \sum_{j\in M} \lambda_j e_j\Big) = \sum_{i,j\in M} \lambda_i \bar{\lambda}_j (e_i, e_j) = \sum_{i\in M} |\lambda|^2.$$

Damit ist gezeigt, dass jedes (nicht notwendig endliche) Orthonormalsystem linear unabhängig ist. Da die Projektion P orthogonal ist, folgt ferner für endliches M

$$\sum_{i\in M} |(x, e_i)|^2 = \|Px\|^2 \leq \|P\|^2 \|x\|^2 = \|x\|^2.$$

5.4 Satz (Besselsche Ungleichung). *Sei I endlich oder $I = \mathbb{N}$ und sei $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt*

$$\sum_{i\in I} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \textit{für alle } x \in E.$$

5.5 Satz. *Sei E ein Prähilbertraum, sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in E. Dann sind aquivalent*

(a) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist vollständig,*

(b) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine Schauderbasis,*

(c) für jedes $x \in E$ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2.$$

Wenn $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vollständig ist, dann gilt $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ für alle x.

5.6 Satz. *Sei I eine Indexmenge und $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H. Dann ist $(e_i)_{i\in I}$ genau dann vollständig, wenn es kein $x \in H\setminus\{0\}$ gibt mit $x \perp e_i$ für alle $i \in I$.*

5.7 Satz (Gram-Schmidt Orthogonalisierung). *Sei E ein Prähilbertraum, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge linear unabhängiger Elemente von E. Dann existiert ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$\mathrm{LH}\{x_1, \dots, x_n\} = \mathrm{LH}\{e_1, \dots, e_n\} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Die e_n werden rekursiv definiert. Setze $e_1 = \|x_1\|^{-1}x_1$. Seien nun $e_1, \dots, e_n$ bereits bestimmt, dann setze

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (x_{n+1}, e_j)e_j.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der x_j gilt $y_{n+1} \neq 0$. Außerdem ist klar, dass $y_{n+1} \perp e_j$ für $j \leq n$. Setze $e_{n+1} = \|y_{n+1}\|^{-1}y_{n+1}$. $\square$

5.8 Definition. Ein normierter Raum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

5.9 Beispiel. (a) Für $1 \leq p < \infty$ ist der ℓ^p sparabel. Der c_0 ist separabel. Der ℓ^∞ ist nicht separabel.

(b) Offenbar impliziert die Existenz einer Schauderbasis die Separabilität.

(c) Enflo konstruierte in einem 1973 veröffentlichten Artikel einen separablen Banachraum ohne Basis.

5.10 Satz. *Sei E ein separabler Prähilbertraum. Dann besitzt E ein höchstens abzählbares, vollständiges Orthonormalsystem.*

5.11 Korollar. *Jeder unendlich-dimensionale, separable Hilbertraum ist isometrisch isomorph zum ℓ^2.*

Bemerkung. Ein Unterraum E eines normierten Raums F heißt *Hyperebene*, wenn er der Kern eines stetigen, linearen, nicht-trivialen Funktionals ist. Aus dem Korollar ergibt sich sofort, dass jeder unendlich-dimensionale, separable Hilbertraum isomorph zu allen seinen Hyperebenen ist.

Andererseits erhielt Timothy Gowers 1998 die Fields-Medaille unter anderem für das folgende Ergebnis:

Es gibt einen unendlich-dimensionalen, separablen Banachraum, der zu keiner seiner Hyperebenen isomorph ist.

5.12 Definition. Es sei $(\mathcal{A}, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Eine *Kette* in $\mathcal{A}$ ist eine total geordnete Teilmenge, also eine Teilmenge, in der je zwei Elemente vergleichbar sind.

5.13 Satz (Zornsches Lemma). *Sei $(\mathcal{A}, \leq)$ eine partiell geordnete, nichtleere Menge, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt. Dann besitzt $\mathcal{A}$ ein maximales Element.*

Wir zeigen als Beispiel für die Anwendung des Zornschen Lemmas den Satz, dass jeder Vektorraum eine (Hamel-)Basis besitzt. Zur Vorbereitung benötigen wir das folgende Lemma.

5.14 Lemma. *Sei E ein $\mathbb{k}$-Vektorraum und sei $B \subset E$ eine linear unabhängige Teilmenge. Dann sind gleichwertig*

(a) B *ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von E, d. h. es gibt keine echte Obermenge von B, die ebenfalls linear unabhängig ist.*

(b) B *ist eine Basis von E.*

5.15 Satz (Basisergänzungssatz). *Es seien E ein $\mathbb{k}$-Vektorraum und $M \subset E$ eine linear unabhängige Teilmenge. Dann gibt es eine Basis B von E mit $M \subset B$.*

5.16 Satz. *Es sei H ein Hilbertraum. Jedes Orthonormalsystem in H lässt sich zu einer Orthonormalbasis ergänzen.*

5.17 Definition. Eine Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} v_j$ in einem normierten Raum konvergiert *unbedingt,* wenn für jede Permutation π von $\mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} v_{\pi(j)}$ konvergiert und dieser Wert immer derselbe ist.

Bemerkung. Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, \infty[$. Wenn die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert, dann konvergiert sie unbedingt. Man kann den Grenzwert ganz ohne Verwendung der Ordnung ausdrücken, es gilt nämlich

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sup \left\{ \sum_{j\in M} a_j \,\middle|\, M \subset \mathbb{N} \text{ endlich} \right\}.$$

5.18 Satz. *Es sei* $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *eine Orthonormalbasis in einem Hilbertraum* H. *Für jedes* $x \in \ell^2$ *konvergiert die Reihe* $\sum_{j=1}^\infty x_j e_j$ *unbedingt.*

Speziell konvergiert für jedes $v \in H$ *die Reihe* $\sum_{j=1}^\infty (v, e_j)e_j$ *unbedingt gegen* v.

5.19 Definition. Sei X ein kompakter topologischer Raum. Ein Unterraum $A \subset C(X,\mathbb{R})$ ist eine *Unteralgebra* vin $C(X,\mathbb{R})$, wenn A die konstanten Funktionen und zu je zwei Funktionen $f, g \in A$ deren Produkt fg enthält.

5.20 Lemma. *Seien* X *ein kompakter topologischer Raum und* $A \subset C(X,\mathbb{R})$ *eine abgeschlossene Unteralgebra von* $C(X,\mathbb{R})$. *Falls* $f \in A$ *keine negativen Funktionswerte annimmt, so liegt* $\sqrt{f}$ *in* A.

5.21 Satz. *Sei* X *ein kompakter topologischer Raum, und sei* A *eine abgeschlossene Unteralgebra von* $C(X,\mathbb{R})$. *Falls* A *die Punkte von* X *trennt, d. h. falls es zu je zwei* $x, y \in X$ *mit* $x \neq y$ *ein* $f \in A$ *mit* $f(x) \neq f(y)$ *gibt, so gilt* $A = C(X,\mathbb{R})$.

5.22 Theorem (Satz von Stone-Weierstraß). *Seien* X *ein kompakter topologischer Raum und* A *eine abgeschlossene Unteralgebra von* $C(X,\mathbb{C})$ *mit den folgenden Eigenschaften*

(a) A *trennt die Punkte von* X,

(b) mit f *liegt auch* $\bar{f}$ *in* A.

Dann $A = C(X,\mathbb{C})$.

5.23 Theorem (Weierstraßscher Approximationssatz). *Sei* $X \neq \emptyset$ *eine kompakte Teilmenge des* $\mathbb{R}^n$. *Dann kann jede stetige Funktion auf* X *gleichmäßig durch Polynome approximiert werden.*

5.24 Definition. Für $m \in \mathbb{Z}$ sei $e_m \in C([0,1],\mathbb{C})$ definiert durch

$$e_m(x) = e^{2\pi i m x}.$$

Ein *trigonometrisches Polynom* ist eine endliche Linearkombination der e_m.

5.25 Satz. *Die trigonometrischen Polynome sind dicht in*

$$C_{per}([0,1],\mathbb{C}) := \{f \in C([0,1],\mathbb{C}) | f(0) = f(1)\}.$$

5.26 Definition. Der *Träger* $\operatorname{Supp} f$ einer stetigen Funktion $f\colon X \to \mathbb{K}$ ist gleich

$$\operatorname{Supp} f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Eine *Testfunktion* ist eine Funktion $\varphi \in C^\infty(X)$ mit kompaktem Träger. Der Raum aller Testfunktionen wird mit $\mathcal{D}(X)$ bezeichnet.

Eine Funktion f liegt in $L^1_{loc}(\Omega)$, wenn es zu jedem $x \in \Omega$ eine Umgebung U von x gibt, so dass die Einschränkung von f auf U in $L^1(U)$ liegt.

Ich erinnere an Lemma 15.21 aus der Einführung in die partiellen Differentialgleichungen im WS 2017/18:

5.27 Lemma. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $g \in L^1_{loc}(U)$ *mit* $\int_U \varphi\, g\, d\lambda_n = 0$ *für alle* $\varphi \in \mathcal{D}(U)$*. Dann* $g = 0$*.*

5.28 Satz. *Die Testfunktionen sind dicht in* $L^2[0,1]$*.*

5.29 Satz. *Die Funktionen* $(e_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ *bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in* $L^2[0,1]$*.*

5.30 Beispiel. Sei $E = L^2([0,1])$, versehen mit dem Lebesguemaß. Die Funktionen

$$\begin{aligned} e_0(t) &= 1, \\ e_k(t) &= \sqrt{2}\cos(kt), && k \in \mathbb{N}, \\ e_k(t) &= \sqrt{2}\sin(kt), && -k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2([0,1])$.

Die Orthonormalität rechnet man sofort nach. Die Vollständigkeit folgt aus dem vorstehenden Satz.

5.31 Bemerkung. Für ein $f \in L^2[0,1]$ und $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine der beiden zuletzt vorgestellten Orthonormalbasen bezeichnet man die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

als *Fourierreihe* von f. Es ist sofort klar, dass die Fourierreihe in $L^2[0,1]$ konvergiert. Eine ausführliche Behandlung der Fourierreihen bietet das gleichnamige Buch von Körner.

Ich gebe noch zwei vollständige Orthonormalsysteme ohne Beweis an.

5.32 Beispiel. Die *Legendre-Polynome* sind definiert als

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Sie bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2[-1,1]$.

5.33 Beispiel. Die *Hermite-Polynome* sind definiert als

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die *Hermite-Funktionen* sind definiert als

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^n n!}}e^{-x^2/2}h_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Hermite-Funktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$.

6 Dualräume

6.1 Satz. *Sei* E *ein normierter Raum. Dann ist sein Dualraum* E' *ein Banachraum.*

Dieser Satz ist ein Spezialfall des folgenden.

6.2 Satz. *Seien* E *ein normierter und* F *ein Banachraum. Dann ist* $L(E, F)$ *ein Banachraum.*

6.3 Satz. *Für* p *mit* $1 \leq p < \infty$ *wähle* q *mit* $1 < q \leq \infty$*, so dass* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Dann gilt* $(\ell^p)' = \ell^q$*.*

Genauer gilt folgendes: Die Abbildung

$$T\colon \ell^q \to (\ell^p)', \quad (Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

6.4 Satz. $c_0' = \ell^1$ *mit derselben Abbildung wie Satz 6.3.*

Beweis. Übung. □

Bemerkung. Man kann auch den Dualraum von ℓ^∞ angeben, er ist aber häßlich. Man findet diese Darstellung z.B. im ersten Band der Trilogie von Dunford und Schwartz.

Erinnerung: Ein Maßraum (Ω, Σ, μ) heißt *σ-endlich,* wenn es eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ messbarer Mengen gibt, so dass $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ und $\mu(E_n) < \infty$ für alle n.

6.5 Satz. *Sei* $1 < p < \infty$ *und sei* (Ω, Σ, μ) *ein σ-endlicher Maßraum. Es gelte* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Dann definiert*

$$T\colon L^q(\mu) \to (L^p(\mu))', \quad (Tg)(f) = \int_\Omega fg \, d\mu,$$

einen isometrischen Isomorphismus.

Einen Beweis findet man bei Meise und Vogt, Satz 13.13, oder Werner, Satz II.2.4. Der Beweis bei Werner benutzt den folgenden Satz von Radon-Nikodým.

6.6 Definition. Es sei (Ω, Σ) ein Messraum. Eine σ-additive Abbildung $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ bezeichnet man als *signiertes Maß,* eine σ-additive Abbildung $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{C}$ als *komplexes Maß.*

6.7 Theorem (Radon-Nikodým). *Es sei* (Ω, Σ, μ) *ein* σ*-endlicher Maßraum und es sei* ν *ein signiertes (bzw. komplexes) Maß auf* Σ*. Dann sind äquivalent:*

(a) Für jede μ*-Nullmenge* E *gilt auch* $\nu(E) = 0$*.*

(b) Es existiert eine μ*-integrierbare Funktion* $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *(bzw.* $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$*), so dass*

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu \quad \textit{für alle } E \in \Sigma.$$

Einen Beweis findet man beispielsweise in Simon, Real Analysis, Theorem 4.7.4.

7 Der Satz von Hahn-Banach

7.1 Definition. (a) Eine *Halbnorm* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E ist eine Funktion $p\colon E \to [0,\infty[$ mit den Eigenschaften

(N1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

(N2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in E$ (Dreiecksungleichung).

(b) Ein *sublineares Funktional* auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum E ist eine Funktion $p\colon E \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $\lambda \geq 0$, $x \in E$,

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in E$.

7.2 Beispiele. (a) Jede Norm ist eine Halbnorm und jede Halbnorm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist ein sublineares Funktional.

(b) Ein sublineares Funktional, das nicht von dieser Form ist, wird gegeben durch

$$p\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

7.3 Beispiel. Sei E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei p ein sublineares Funktional auf E. Sei F ein Unterraum von E und sei $y\colon F \to \mathbb{R}$ linear mit

$$y(x) \leq p(x) \text{ für alle } x \in F.$$

Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \big\{(G, Y) \;\big|\; & G \text{ Unterraum von } E \text{ mit } F \subset G, \\ & Y\colon G \to \mathbb{R} \text{ linear mit } Y|_F = y \text{ und } Y(x) \leq p(x) \text{ für alle } x \in G\big\}. \end{aligned}$$

Auf $\mathcal{Z}$ definieren wir wie folgt eine (partielle) Ordnung

$$(G_1, Y_1) \prec (G_2, Y_2) \Leftrightarrow G_1 \subset G_2 \text{ und } Y_2|_{G_1} = Y_1.$$

Wir zeigen, dass jede Kette $\mathcal{A} \subset \mathcal{Z}$ ein maximales Element besitzt. Dazu definieren wir $G_0 \subset E$ und $Y_0\colon G_0 \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} G_0 &= \{x \in E \mid \text{ es gibt } (G, Y) \in \mathcal{A} \text{ mit } x \in G\}, \\ Y_0(x) &= Y(x), \text{ falls } x \in G \text{ für ein } (G, Y) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{A}$ eine Kette ist, zeigt man leicht, dass G_0 ein Vektorraum und dass Y_0 wohldefiniert ist. Daher $(G_0, Y_0) \in \mathcal{Z}$. Es ist klar, dass (G_0, Y_0) eine obere Grenze für $\mathcal{A}$ ist. Aus dem Zornschen Lemma folgt, dass $(\mathcal{Z}, \prec)$ ein maximales Element (G_{max}, Y_{max}) besitzt.

7.4 Lemma. *Es seien* E *ein* $\mathbb{R}$-*Vektorraum,* p *ein sublineares Funktional auf* E, $G \subset E$ *ein Unterraum und* $Y\colon G \to \mathbb{R}$ *linear mit* $Y(x) \le p(x)$ *für alle* $x \in G$. *Dann existiert für jedes* $z \in E \setminus G$ *eine lineare Abbildung* $Y_1\colon H = \mathrm{LH}(G \cup \{z\}) \to \mathbb{R}$ *mit* $Y_1|_G = Y$ *und* $Y_1(x) \le p(x)$ *für alle* $x \in H$.

7.5 Theorem (Satz von Hahn-Banach). *Seien* E *ein* $\mathbb{R}$-*Vektorraum,* p *ein sublineares Funktional auf* E, $F \subset E$ *ein Unterraum und* $y\colon F \to \mathbb{R}$ *ein lineares Funktional mit* $y(x) \le p(x)$ *für alle* $x \in F$. *Dann existiert ein lineares Funktional* Y *auf* E *mit* $Y|_F = y$ *und* $Y(x) \le p(x)$ *für alle* $x \in E$.

7.6 Satz. *Sei* E *ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum, sei* p *eine Halbnorm auf* E, *sei* $F \subset E$ *ein Unterraum, und sei* $y\colon F \to \mathbb{K}$ *linear mit* $|y(x)| \le p(x)$ *für alle* $x \in F$. *Dann existiert* $Y\colon E \to \mathbb{K}$ *linear mit* $Y|_F = y$ *und* $|Y(x)| \le p(x)$ *für alle* $x \in E$.

7.7 Korollar. *Sei* E *ein normierter* $\mathbb{K}$-*Vektorraum, sei* $F \subset E$ *ein Unterraum, und sei* $y \in F'$. *Dann existiert* $Y \in E'$ *mit* $Y|_F = y$ *und* $\|Y\| = \|y\|$.

7.8 Korollar. *In jedem normierten Raum* E *existiert zu jedem* $x \in E$, $x \neq 0$, *ein* $y \in E'$ *mit*

$$\|y\| = 1 \text{ und } y(x) = \|x\|.$$

Speziell trennt E' *die Punkte von* E, *d. h. zu je zwei verschiedenen Punkten* $x_1, x_2 \in E$ *existiert* $y \in E'$ *mit* $y(x_1) \neq y(x_2)$.

7.9 Korollar. *In jedem normierten Raum gilt für jedes* $x \in E$

$$\|x\| = \max\bigl\{|y(x)| \bigm| y \in E',\ \|y\| = 1\bigr\}.$$

7.10 Definition. Sei E ein Vektorraum. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt *konvex*, wenn $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ für alle $x, y \in A$ und $\lambda \in [0, 1]$.

7.11 Definition. Sei E ein Vektorraum, sei $A \subset E$. Das *Minkowskifunktional* $p_A\colon E \to [0, \infty]$ wird definiert als

$$p_A(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \;\middle|\; \frac{x}{\lambda} \in A\right\}.$$

A heißt *absorbierend*, falls $p_A(x) < \infty$ für alle $x \in E$.

7.12 Bemerkung. (a) Es sei A konvex mit $0 \in A$. Falls $p_A(x) < 1$, so gilt $x = \lambda\frac{x}{\lambda} + (1 - \lambda)0 \in A$.

(b) Ist A die offene Einheitskugel eines normierten Raums E, so ist $p_A = \|\cdot\|$.

7.13 Lemma. *Sei E ein normierter Raum und sei $U \subset E$ konvex mit $B_\epsilon(0) \subset U$. Dann gelten*

(a) $p_U \leq \frac{1}{\epsilon}\|\cdot\|$*; speziell ist U absorbierend,*

(b) p_U ist sublinear,

(c) ist U offen, so gilt $U = p_U^{-1}([0,1[)$.

7.14 Lemma. *Sei E ein normierter Raum und sei $V \subset E$ konvex und offen mit $0 \notin V$. Dann existiert $y \in E'$ mit*

$$\operatorname{Re} y(x) < 0 \text{ für alle } x \in V.$$

7.15 Theorem (Hahn-Banach Trennungsatz (Mazur)). *Sei E ein normierter Raum. $V_1, V_2 \subset E$ seien konvex, außerdem sei V_1 offen. Es gelte $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann existiert $y \in E'$ mit*

$$\operatorname{Re} y(v_1) < \operatorname{Re} y(v_2), \quad v_1 \in V_1,\, v_2 \in V_2.$$

7.16 Theorem (strikter Hahn-Banach Trennungsatz (Mazur)). *Sei E ein normierter Raum. $V \subset E$ sei konvex und abgeschlossen, und sei $x \notin V$. Dann existieren $y \in E'$ und $\epsilon > 0$, so dass*

$$\operatorname{Re} y(x) < \operatorname{Re} y(v) - \epsilon \text{ für alle } v \in V.$$

7.17 Definition. Es seien E ein normierter Raum und $F \subset E$ ein Unterraum. Der Raum

$$F^\perp = \{y \in E' \mid y(x) = 0 \text{ für alle } x \in F\}$$

heißt *Annihilator* von F in E'.

7.18 Korollar. *Seien E ein normierter Raum und $F \subset E$ ein Unterraum. Dann sind äquivalent*

(a) F ist dicht in E,

(b) $F^\perp = \{0\}$.

7.19 Theorem. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei μ ein σ-endliches Maß auf Ω und es sei $1 < p < \infty$. Dann sind die Testfunktionen dicht in $L^p(\mu)$.*

Weil wir den Dualraum von $L^1(\mu)$ nicht bestimmt haben, hat die Version für den L^1 etwas stärkere Voraussetzungen.

7.20 Theorem. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei μ ein Borelmaß auf Ω mit $\mu(B) < \infty$ für alle kompakten Mengen B. Dann sind die Testfunktionen dicht in $L^1(\mu)$.*

7.21 Satz. *Sei E ein normierter Raum, dessen Dualraum E' separabel ist. Dann ist auch E separabel.*

8 Schwache Konvergenz und Reflexivität

8.1 Notation. Für $T \in E'$ und $x \in E$ schreiben wir $\langle T, x\rangle$ für $T(x)$.

8.2 Definition. Sei E ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* genau dann *schwach* gegen $x \in E$, wenn für jedes $T \in E'$ gilt $\lim_{n\to\infty} \langle T, x_n\rangle = \langle T, x\rangle$.

8.3 Bemerkung. (Für Teilnehmer der “Einführung in die Topologie”) Die *schwache Topologie* ist die kleinste Topologie, für die alle Mengen der Form $\{x \in E \mid |\langle T, x - y\rangle| < \epsilon\}$, $T \in E'$, $\epsilon > 0$, $y \in E$, offen sind.

Eine Folge konvergiert genau dann schwach im Sinne der Definition 8.2, wenn sie in der schwachen Topologie konvergiert.

Die schwache Topologie ist i. A. nicht metrisch.

8.4 Bemerkung. Jede konvergente Folge ist auch schwach konvergent. Die Umkehrung gilt aber nicht. Beispielsweise ist die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im ℓ^p, $1 < p < \infty$, eine schwache Nullfolge. Sie konvergiert aber nicht in der Norm.

Daher ist die Einheitssphäre im ℓ^p auch nicht schwach abgeschlossen.

8.5 Lemma. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im normierten Raum E. Sie konvergiere schwach gegen x und gegen y. Dann gilt $x = y$.*

8.6 Satz. *Es sei E ein normierter Raum, und sei $E'' = (E')'$ sein* Bidual. *Die Abbildung*

$$J \colon E \to E'', \quad J(x)(y) = y(x),$$

ist eine Isometrie auf ihr Bild, d. h. es gilt $\|J(x)\| = \|x\|$ für jedes $x \in E$.

8.7 Definition. Ein normierter Raum E, für den die Abbildung $J \colon E \to E''$ aus Satz 8.6 surjektiv (also ein Isomorphismus) ist, heißt *reflexiv*.

8.8 Bemerkungen. (a) Jeder reflexive normierte Raum ist vollständig.

(b) Wenn E reflexiv ist, so ist $E \cong E''$. Die Umkehrung gilt nicht, denn James hat 1951 einen Raum konstruiert, der isometrisch isomorph zu seinem Bidual, aber nicht reflexiv ist.

8.9 Bemerkung. Sei E ein normierter Raum, sei $J \colon E \to E''$ die isometrische Einbettung in seinen Bidual. Dann einerseits $E \cong J(E)$, andererseits ist $\overline{J(E)}$ ein Banachraum. Wir haben gesehen, dass jeder normierte Raum E dicht in einem Banachraum X liegt, derart, dass die Norm auf E die Einschränkung der Norm auf X ist. Man bezeichnet $\overline{J(E)}$ als *vollständige Hülle* von E.

8.10 Satz. *Sei* E *ein Banachraum.* E *ist genau dann reflexiv, wenn* E' *reflexiv ist.*

8.11 Satz. *Sei* μ *ein* σ*-endliches Maß. Für* $1 < p < \infty$ *sind* ℓ^p *und* $L^p(\mu)$ *reflexiv. Dagegen sind* c_0, ℓ^1 *und* ℓ^∞ *nicht reflexiv.*

8.12 Satz. *Hilberträume sind reflexiv.*

Um das Theorem 8.15 auch für nicht separable Räume zeigen zu können, benötige ich noch den folgenden Satz.

8.13 Satz. *Abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume sind reflexiv.*

8.14 Satz. *Es sei* E *ein normierter Raum mit separablem* E' *und es sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge in* E. *Dann besitzt sie eine Teilfolge* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *derart, dass für jedes* $y \in E'$ *die Folge* $(y(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

Das folgende Theorem stammt für den ℓ^2 von Hilbert. Der allgemeine Fall ist von Banach.

8.15 Theorem. *In einem reflexiven Raum* E *besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

8.16 Satz. *Es sei* E *ein normierter Raum, es sei* $C \subset E$ *eine konvexe, abgeschlossene Menge, und es sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* C. *Wenn* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *schwach gegen* x *konvergiert, so gilt* $x \in C$.

8.17 Bezeichnung. Die *konvexe Hülle* einer Teilmenge M eines $\mathbb{K}$-Vektorraums E ist die kleinste konvexe Teilmenge von E, die M umfasst. Sie besteht aus allen endlichen Summen der Form $\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j$ wobei $x_j \in M$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ mit $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$.

8.18 Satz (Mazur). *Es sei* E *ein normierter Raum und es sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* E, *die schwach gegen* x *konvergiert. Dann gibt es zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $m \in \mathbb{N}$ *und Zahlen* $s_k \geq 0$, *so dass* $\sum_{k=1}^m s_k = 1$ *und*

$$\left\| \sum_{k=1}^m s_k x_k - x \right\| < \epsilon.$$

8.19 Definition. (a) Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und es sei $C \subseteq E$ konvex. Eine Funktion $F\colon C \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $m \in \mathbb{N}$, alle $x_1, \dots, x_m \in C$ und alle $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ mit $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ gilt

$$F\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{k=1}^m \lambda_j F(x_j).$$

(b) Seien E ein normierter Raum und $\Omega \subseteq E$. Eine Funktion $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *unterhalbstetig* in $x_0 \in \Omega$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \Omega$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ bereits $F(x) > F(x_0) - \epsilon$ gilt. Sie heißt *oberhalbstetig*, wenn $-F$ unterhalbstetig ist.

Also ist eine Funktion $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann stetig, wenn sie unterhalb- und oberhalbstetig ist.

8.20 Satz. *Es sei* E *ein reflexiver Banachraum und es sei* $\emptyset \neq C \subseteq E$ *eine abgeschlossene, konvexe Menge. Ferner sei* $F\colon C \to \mathbb{R}$ *eine nach unten beschänkte, unterhalbstetige, konvexe Funktion, so dass für jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* C *mit* $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \infty$ *auch* $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \infty$ *gilt. Dann besitzt* F *ein Minimum in* C.

8.21 Definition. Für $1 \leq p \leq \infty$ und normierte Räume E, F versehen wir das Produkt $E \times F$ mit der Norm

$$\|(x,y)\| = \begin{cases} (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}, & p < \infty, \\ \max(\|x\|, \|y\|), & p = \infty. \end{cases}$$

Den Produktraum schreiben wir dann als $E \oplus_p F$.

Im Fall, dass E und F Hilberträume sind, wird das Skalarprodukt auf $E \oplus_2 F$ gegeben durch $((e_1, f_1), (e_2, f_2)) = (e_1, e_2) + (f_1, f_2)$.

8.22 Bezeichnung. Für $a < b$ betten wir $C^\infty[a,b]$ wie folgt nach $L^2[a,b] \oplus_2 L^2[a,b]$ ein:

$$\Phi\colon C^\infty[a,b] \to L^2[a,b] \oplus_2 L^2[a,b], \quad u \mapsto (u, u').$$

Dann ist der *Sobolewraum* $H^1[a,b]$ definiert als der Abschluss von Bild Φ. Anstelle von $(u_0, u_1) \in H^1[a,b]$ schreiben wir aber $u_0 \in H^1[a,b]$ mit $u_0' = u_1$.

In der Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen hatten wir die schwache Ableitung benutzt. Das wollen wir für den Augenblick vermeiden.

8.23 Satz. *Gegeben seien* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *sowie Funktionen* $p \in C^1[a,b]$, $q \in C[a,b]$ *und* $f \in L^2[a,b]$ *mit* $p > 0$ *und* $q \geq 0$. *Dann besitzt das quadratische Funktional*

$$F\colon v \mapsto \frac{1}{2}\int_{[a,b]} (pv'^2 + qv^2)\,d\lambda_1 - \int_{[a,b]} f\,v\,d\lambda_1$$

ein Minimum auf dem affinen Raum

$$R_{\alpha,\beta} := \left\{v \in H^1[a,b] \middle| v(a) = \alpha,\ v(b) = \beta\right\}.$$

In der Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen hatten wir uns überlegt, dass für $f \in H^1[a,b]$ die Randwerte $v(a)$ und $v(b)$ tatsächlich erklärt sind.

Bemerkung. In dem Buch von Kaballo wird gezeigt, dass jedes Minimum u von F schwache Lösung der Differentialgleichung

$$-(pu')' + qu = f$$

ist.

9 Der Bairesche Kategoriensatz

9.1 Satz. *Sei* X *ein vollständiger metrischer Raum, sei* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, *wobei alle* M_n *abgeschlossen sind. Dann besitzt mindestens eine der Mengen* M_n *einen inneren Punkt.*

9.2 Definition. Seien X ein metrischer Raum und M eine Teilmenge von X. M heißt *nirgends dicht* in X, falls $\overline{M}$ keinen inneren Punkt besitzt. M heißt von *erster Kategorie* in X, wenn M abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Andernfalls heißt M von *zweiter Kategorie* in X.

9.3 Theorem (Bairescher Kategoriensatz). *Ein vollständiger metrischer Raum ist von zweiter Kategorie in sich.*

9.4 Definition. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *offen*, wenn für jede offene Teilmenge U von X die Bildmenge $f(U)$ ebenfalls offen ist. Sie heißt *abgeschlossen*, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge U von X die Bildmenge $f(U)$ ebenfalls abgeschlossen ist.

Bemerkung. Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist nicht offen, denn $f(]-1,1[) = [0,1[$.
Die Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$, ist nicht abgeschlossen, denn

$$g(\{(x,y)|xy = 1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

9.5 Lemma. *Seien* X *und* Y *metrische Räume, sei* X *vollständig. Sei* $f\colon X \to Y$ *stetig mit der folgenden Eigenschaft*

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in X : \overline{f(B_\epsilon(x))} \supset B_\delta(f(x)). \tag{9.1}$$

Dann ist f *offen.*

9.6 Satz. *Seien* E *ein Banachraum und* F *ein normierter Raum. Die Abbildung* $A\colon E \to F$ *sei linear und stetig und erfülle*

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \overline{A(B_\epsilon(0))} \supset B_\delta(0).$$

Dann ist A *offen und surjektiv.*

9.7 Lemma. *Seien* E *und* F *normierte Räume und sei* $A \in L(E,F)$. *Falls* $A(E)$ *in* F *von zweiter Kategorie ist, so existiert zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *mit* $\overline{A(B_\epsilon(0))} \supset B_\delta(0)$.

9.8 Satz. *Seien* E *ein Banachraum und* F *ein normierter Raum. Sei* $A \in L(E, F)$ *so, dass* $A(E)$ *in* F *von zweiter Kategorie ist. Dann ist* A *offen und surjektiv.*

Der Bairesche Kategoriensatz besagt, dass die Bedingung an A automatisch erfüllt ist, falls A surjektiv und F vollständig ist.

9.9 Theorem (Satz von der offenen Abbildung). E *und* F *seien Banachräume.* $A \colon E \to F$ *sei linear, stetig und surjektiv. Dann ist* A *offen.*

9.10 Theorem (Banachscher Isomorphiesatz). E *und* F *seien Banachräume,* $A \in L(E, F)$ *sei bijektiv. Dann ist* A *ein Isomorphismus.*

9.11 Korollar. E *und* F *seien Banachräume. Für* $A \in L(E, F)$ *sind äquivalent:*

(a) A *ist injektiv und* $\operatorname{Bild} A$ *ist abgeschlossen in* F,

(b) es gibt $c > 0$, *so dass* $\|Ax\| \geq c\|x\|$ *für alle* $x \in E$.

9.12 Definition. Seien X und Y Mengen und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Der *Graph* von f ist die Menge

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y.$$

9.13 Bemerkungen. (a) Falls E und F Vektorräume sind, so ist $\mathcal{G}(f)$ genau dann ein Unterraum von $E \times F$, wenn f linear ist.

(b) Falls X und Y metrische Räume sind und f stetig ist, so ist $\mathcal{G}(f)$ abgeschlossen. Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

9.14 Lemma. *Seien* E *und* F *normierte Räume, und sei* $A \colon E \to F$ *linear. Dann ist* $\mathcal{G}(A)$ *genau dann abgeschlossen, wenn für jede Nullfolge* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *für die* $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *gegen ein Element* $y \in F$ *konvergiert, bereits* $y = 0$ *gilt.*

9.15 Theorem (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Es seien* E *und* F *Banachräume. Die Abbildung* $A \colon E \to F$ *sei linear, und ihr Graph sei abgeschlossen in* $E \times F$. *Dann ist* A *stetig.*

Als Anwendungsbeispiel zeigen wir den folgenden Satz.

9.16 Satz. *Seien* $\|\cdot\|_1$ *und* $\|\cdot\|_2$ *zwei Normen auf einem* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* E. *Betrachte die Dualräume* $(E, \|\cdot\|_1)'$ *und* $(E, \|\cdot\|_2)'$ *als Unterräume des algebraischen Dualraums* E^*. *Falls* $(E, \|\cdot\|_1)' = (E, \|\cdot\|_2)'$, *so sind die Normen* $\|\cdot\|_1$ *und* $\|\cdot\|_2$ *äquivalent.*

9.17 Theorem (Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit). *Seien* E *ein Banachraum und* F *ein normierter Raum. Sei* $\mathcal{A} \subset L(E, F)$ *so, dass* $\sup_{A\in\mathcal{A}}\|Ax\| < \infty$ *für jedes* $x \in E$*. Dann* $\sup_{A\in\mathcal{A}}\|A\| < \infty$*.*

9.18 Satz. *Seien* E *ein normierter Raum und* M *eine Teilmenge von* E*, so dass* $\sup_{x\in M}|y(x)| < \infty$ *für jedes* $y \in E'$*. Dann* $\sup_{x\in M}\|x\| < \infty$*.*

9.19 Definition. Seien E und F normierte Räume.

(a) $M \subset E$ heißt *beschränkt*, wenn $\sup_{x\in M}\|x\| < \infty$.

(b) $M \subset E$ heißt *schwach beschränkt*, wenn $\sup_{x\in M}|y(x)| < \infty$ für alle $y \in E'$.

(c) $\mathcal{A} \subset L(E, F)$ heißt *punktweise beschränkt*, wenn $\{Ax \mid A \in \mathcal{A}\}$ für jedes $x \in E$ beschränkt ist.

9.20 Korollar. *(a) In einem normierten Raum ist jede schwach beschränkte Menge beschränkt.*

(b) Jede punktweise beschränkte Menge in $L(E, F)$ *ist beschränkt, falls* E *ein Banachraum ist.*

Der folgende Satz ist aus dem Buch von Banach (p. 200 der französischen Ausgabe).

9.21 Satz. *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine schwache Nullfolge im* ℓ^p*,* $1 \le p < \infty$*. Dann gibt es eine Teilfolge mit*

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} x_{n_j}\Big\|_p = O\big(k^{1/p}\big)\,.$$

9.22 Lemma. *Für einen Banachraum* E *sei* $\Phi(E)$ *das Supremum aller* $p \ge 1$*, so dass jede schwache Nullfolge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* E *eine Teilfolge besitzt mit*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m} x_{n_k}\Big\| = O\big(m^{1/p}\big)\,.$$

Dann ist Φ *eine Isomorphieinvariante.*

9.23 Beispiel. Für $1 \le p < \infty$ gilt $\Phi(\ell^p) = p$.

9.24 Korollar. *(a) Für* $1 \le p < q \le \infty$ *sind* ℓ^p *und* ℓ^q *nicht isomorph.*

(b) Für $1 \le p \le \infty$ *und* $p \ne 2$ *ist der* ℓ^p *nicht isomorph zu einem Hilbertraum.*

9.25 Satz. *Sei* E *ein Banachraum, sei* F *ein normierter Raum, und sei* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $L(E, F)$*. Falls* $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $x \in E$ *konvergiert, so wird durch*

$$A\colon x \mapsto \lim_{n\to\infty} A_n x$$

ein $A \in L(E, F)$ *gegeben.*

9.26 Lemma. *Seien* E *ein normierter Raum,* F *ein Banachraum und* M *eine dichte Teilmenge von* E. *Gegeben sei eine Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $L(E,F)$ *mit den folgenden Eigenschaften*

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|A_n\| < \infty$,

(b) für jedes $x \in M$ *ist* $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* F.

Dann konvergiert $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $x \in E$, *und durch* $A\colon x \mapsto \lim_{n\to\infty} A_n x$ *wird ein* $A \in L(E,F)$ *definiert mit* $\|A\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\|A_n\|$.

9.27 Theorem (Satz von Banach-Steinhaus). *Seien* E *und* F *Banachräume, und sei* M *eine dichte Teilmenge von* E. *Gegeben sei eine Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit den folgenden Eigenschaften*

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}}|y(A_n x)| < \infty$ *für alle* $x \in E$, $y \in F'$,

(b) $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist für jedes* $x \in M$ *eine Cauchyfolge.*

Dann konvergiert $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $x \in E$, *und durch* $A\colon x \mapsto \lim_{n\to\infty} A_n x$ *wird ein* $A \in L(E,F)$ *definiert.*

Als Anwendung zeige ich die Existenz einer stetigen, 2π-periodischen Funktion mit divergenter Fourierreihe.

9.28 Definition. Mit $C_{2\pi}$ werde der Unterraum von $\ell^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ bezeichnet, der aus allen stetigen, 2π-periodischen Funktionen besteht. Für $f \in C_{2\pi}$ und $k \in \mathbb{Z}$ definiere den k-ten *Fourierkoeffizienten* durch

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Die Reihe

$$t \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}$$

heißt *Fourierreihe* von f. Sie konvergiert in $L^2[0,2\pi]$.

9.29 Satz. *Es gibt eine Funktion* f *in* $C_{2\pi}$, *deren Fourierreihe im Punkt* $t = 0$ *divergiert.*

10 Transponierte Operatoren

10.1 Definition. Seien X und Y normierte Räume, und sei $T \in L(X, Y)$. Der *transponierte Operator* $T' \in L(Y', X')$ wird definiert durch

$$(T'y)(x) = y(Tx), \quad y \in Y', x \in X.$$

Es ist klar, dass in der Tat $T' \in L(Y', X')$. In der Schreibweise mit spitzen Klammern ist T' erklärt durch $\langle T'y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$.

10.2 Beispiele. (a) Sei $\iota\colon X \hookrightarrow Y$ die Einbettung des Unterraums X nach Y. Dann $\iota'(y)(x) = y(\iota x)$ für $y \in Y'$ und $x \in X$. Also $\iota'(y) = y|_X$.

(b) Sei $1 \le p < \infty$, und sei $T \in L(\ell^p)$ der *Linksshift*

$$T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Wir identifizieren $(\ell^p)'$ mit ℓ^q, wobei q der zu p konjugierte Exponent ist. Wir schreiben die Identifikationsabbildungen nicht mehr explizit hin. Dann gilt für $y \in (\ell^p)' = \ell^q$ und $x \in \ell^p$

$$(T'y)(x) = y(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} y_{n-1} x_n = w(x)$$

für

$$w_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ y_{n-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist T' der *Rechtsshift*

$$T'(y_1, y_2, \dots) = (0, y_1, y_2, \dots).$$

(c) Sei $k \in L^2([0,1]^2)$. Sie werden in den Übungen zeigen, dass dann ein Operator $T_k \in L(L^2([0,1]))$ gegeben wird durch

$$T_k(f)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt.$$

Dann gilt $T_k' = T_{\widetilde{k}}$ für $\widetilde{k}(s,t) = k(t,s)$. Auch das wird in den Übungen gezeigt.

10.3 Satz. *(a) Die Abbildung* $T \mapsto T'$ *von* $L(X,Y)$ *nach* $L(Y',X')$ *ist linear und isometrisch (aber, wie später gezeigt werden wird, i. a. nicht surjektiv).*

(b) $(ST)' = T'S'$ *für* $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$.

10.4 Definition. Es seien E ein normierter Raum und F ein Unterraum vom E'. Der Raum

$$F_\perp = \left\{ x \in E \;\middle|\; y(x) = 0 \text{ für alle } y \in F \right\}$$

heißt *Annihilator* von F in E.

Wenn man sich auf reflexive Räume beschränkt, kommt man mit $F^\perp$ aus.

10.5 Lemma. *Wenn* H *ein Unterraum von* E' *ist, dann gilt* $H \subseteq (H_\perp)^\perp$.

10.6 Satz. *Seien* E *und* F *normierte Räume, und sei* $T \in L(E,F)$. *Dann*

$$\overline{\operatorname{Bild} T} = (\ker T')_\perp.$$

10.7 Korollar. *Seien* E, F *normierte Räume, sei* $T \in L(E,F)$ *ein Operator mit abgeschlossenem Bild. Sei* $y \in F$. *Die Gleichung* $Tx = y$ *besitzt genau dann eine Lösung* x, *wenn die folgende Implikation gilt:*

$$T'z = 0 \Rightarrow z(y) = 0, \quad z \in F'.$$

Ob ein Operator abgeschlossenes Bild besitzt, hatten wir — zumindest für injektive Operatoren — in Korollar 9.11 untersucht.

10.8 Satz. *Seien* E *und* F *Banachräume, sei* $A \in L(E,F)$. *Falls* $\operatorname{Bild} A$ *abgeschlossen ist, so gelten*

(a) $\operatorname{Bild} A = (\ker A')_\perp$,

(b) $(\operatorname{Bild} A)^\perp = \ker A'$,

(c) $\operatorname{Bild} A' = (\ker A)^\perp$,

(d) $(\operatorname{Bild} A')_\perp = \ker A$.

11 Kompakte Operatoren

11.1 Definition. (a) Eine Teilmenge A eines metrischen Raums heißt *relativ kompakt*, wenn ihr Abschluss kompakt ist.

(b) Seien E und F normierte Räume. Eine lineare Abbildung $A\colon E \to F$ heißt *kompakt*, wenn $A(B_1(0))$ relativ kompakt ist. Wir definieren $K(E, F) = \{A\colon E \to F \mid A \text{ kompakt}\}$ und $K(E) = K(E, E)$.

(c) Eine lineare Abbildung $A\colon E \to F$ besitzt *endlichen Rang,* wenn ihr Bild endliche Dimension hat.

Wegen des Satzes von Heine-Borel sind stetige lineare Abbildungen von endlichem Rang kompakt.

Wir zeigen nun, dass die Identität $\mathrm{id}\colon E \to E$ nicht kompakt ist, wenn E unendliche Dimension hat. Dazu benötigen wir etwas Vorbereitung.

11.2 Lemma (Rieszsches Lemma). *Sei F ein abgeschlossener Unterraum des normierten Raums E mit $F \neq E$. Für jedes δ mit $0 < \delta < 1$ existiert $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ und*

$$\|x - u\| \geq 1 - \delta \quad \text{für alle } u \in F.$$

11.3 Satz. *Für einen normierten Raum E sind äquivalent:*

(a) $\dim E < \infty$,

(b) $\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ *ist kompakt,*

(c) jede beschränkte Folge in E besitzt eine konvergente Teilfolge.

Speziell ist $\mathrm{id}\colon E \to E$ *genau dann kompakt, wenn* $\dim E < \infty$.

Bemerkung. Pitt hat gezeigt, dass für $1 \leq p < q < \infty$ jedes $A \in L(\ell^q, \ell^p)$ kompakt ist. Man findet den Satz als Proposition 2.c.3 in Lindenstrauss und Tzafriri, *Classical Banach Spaces I.*

Aus Satz 11.3 und dem Satz von Pitt folgt ebenfalls das Korollar 9.24.

11.4 Satz. *Seien E ein normierter und F ein Banachraum. Dann ist $K(E, F)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(E, F)$.*

11.5 Korollar. *Seien* E *ein normierter und* F *ein Banachraum, und sei* $T \in L(E, F)$. *Falls es eine Folge stetiger linearer Operatoren von endlichem Rang gibt, die gegen* T *konvergiert, so ist* T *kompakt.*

Bemerkung. Eine schwierige Frage, die die Funktionalanalysis lange beschäftigt hat, ist, ob die Umkehrung von Korollar 11.5 gilt. Sie wurde 1973 von Enflo mit „nein" beantwortet. Sein Gegenbeispiel ist außerordentlich kompliziert.

11.6 Beispiel. In den Übungen wurde gezeigt, dass für $k \in L^2([0,1]^2)$ der zugehörige Fredholmsche Integraloperator gegeben wird durch

$$T_k \colon L^2[0,1] \to L^2[0,1], \quad T_k(f)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t) dt.$$

Für jedes k ist T_k kompakt. Das sieht man wie folgt: Für gegebenes $\epsilon > 0$ approximiere k durch eine elementare Treppenfunktion τ mit $\|k - \tau\|_2 < \epsilon$. Es gilt $\|T_k - T_\tau\| = \|T_{k-\tau}\| \leq \|k - \tau\|_2 \leq \epsilon$. Wir zeigen, dass T_τ endliche Bilddimension besitzt. Dazu schreiben wir τ aus

$$\tau = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j \times F_j}.$$

Also wegen $\chi_{E_j \times F_j}(s,t) = \chi_{E_j}(s) \chi_{F_j}(t)$

$$T_\tau(f)(s) = \sum_{j=1}^{N} a_j \int_0^1 \chi_{E_j}(s)\, \chi_{F_j}(t)\, f(t)\, dt = \sum_{j=1}^{N} \Big(a_j \int_{F_j} f(t)\, dt \Big) \chi_{E_j}(s)$$

Also Bild $T_\tau \in LH(\chi_{E_1}, \ldots, \chi_{E_N})$.

11.7 Satz. *Seien* E, F, G *normierte Räume, seien* $T \in L(E, F)$ *und* $S \in L(F, G)$. *Falls eine der beiden Abbildungen* S *oder* T *kompakt ist, so auch die Hintereinanderausführung* $S \circ T$.

11.8 Definition. Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge $M \subset C(X)$ heißt *gleichgradig stetig*, wenn

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall f \in M\, \forall x, y \in X : d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

11.9 Theorem (Arzelà-Ascoli). *Sei* X *ein kompakter metrischer Raum, sei* $C(X)$ *mit der Supremumsnorm* $\|\cdot\|_\infty$ *versehen, und sei* M *eine Teilmenge von* $C(X)$, *welche beschränkt und gleichgradig stetig ist. Dann ist* M *relativ kompakt.*

11.10 Theorem (Satz von Schauder). E *und* F *seien Banachräume, und sei* $A \in L(E, F)$. *Dann ist* A *genau dann kompakt, wenn* A' *kompakt ist.*

12 Spektraltheorie für kompakte Operatoren

12.1 Definition. Seien E ein Banachraum und $A \in L(E)$.

(a) Das *Spektrum* von A ist definiert als

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \operatorname{id} - A \text{ ist kein Isomorphismus}\}.$$

$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ ist die *Resolventenmenge* von A.

(b) $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A, wenn es ein $x \in E \setminus \{0\}$ gibt mit $Ax = \lambda x$. Die Menge

$$E_\lambda = \{x \in E \mid Ax = \lambda x\} = \ker(\lambda \operatorname{id} - A)$$

heißt *Eigenraum* von A zum Eigenwert λ. Die von Null verschiedenen Elemente von E_λ heißen *Eigenvektoren* von A zum Eigenwert λ.

12.2 Bemerkung. Die Eigenwerte von A gehören offenbar zu $\sigma(A)$. Falls $\dim E < \infty$, so gilt $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$. Falls $\dim E = \infty$, so enthält das Spektrum im allgemeinen Zahlen, die keine Eigenwerte sind. Betrachte z. B. den Operator

$$A\colon \ell^2 \to \ell^2, \quad x \mapsto \left(\frac{1}{n} x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Er ist injektiv, aber nicht surjektiv. Daher gehört 0 zu $\sigma(A)$, obwohl 0 kein Eigenwert von A ist.

12.3 Lemma. *Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Dann* $\dim \ker(\operatorname{id} - A) < \infty$.

12.4 Satz (Neumannsche Reihe). *Es seien E ein Banachraum und $A \in L(E)$ ein invertierbarer Operator. Falls für $B \in L(E)$ gilt*

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

so ist B invertierbar.

12.5 Korollar. $\rho(A)$ *ist offen und* $\sigma(A)$ *ist abgeschlossen.*

12.6 Lemma. *Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Dann ist* $\operatorname{Bild}(\operatorname{id} - A)$ *abgeschlossen.*

12.7 Definition. (a) Sei E ein Vektorraum und $F \subset E$ ein Unterraum. Die *Kodimension* von F in E ist definiert als $\operatorname{codim} F = \dim E/F$.

(b) Seien E ein Banachraum und $S \in L(E)$. Der Operator S heißt *Fredholm-Operator*, wenn sein Kern endliche Dimension besitzt und sein Bild abgeschlossen ist und endliche Kodimension besitzt.

(c) Für einen Fredholm-Operator S auf E bezeichnet man die Zahl

$$\operatorname{ind}(S) = \dim \ker S - \operatorname{codim} \operatorname{Bild} S$$

als *Index* von S.

12.8 Bemerkung. Sei $E = \mathbb{C}^n$. Dann ist offenbar jeder Operator in $A \in L(E)$ ein Fredholm-Operator. Aus dem Rangsatz folgt sogar $\operatorname{ind}(A) = 0$.

12.9 Satz. *Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Dann ist $\mathrm{id} - A$ ein Fredholm-Operator.*

12.10 Bemerkung. Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Setze $S = \mathrm{id} - A$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$S^n = (\mathrm{id} - A)^n = \mathrm{id} - \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j-1} A^j.$$

Also ist S^n ebenfalls ein Fredholm-Operator. Ferner sind klar

$$\ker(S^{n+1}) \supset \ker(S^n), \quad \operatorname{Bild}(S^{n+1}) \subset \operatorname{Bild}(S^n).$$

12.11 Lemma. *Seien E ein Banachraum, $A \in K(E)$ und $S = \mathrm{id} - A$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\ker(S^m) = \ker(S^n)$ für alle $m \geq n$.*

12.12 Lemma. *Seien E ein Banachraum, $A \in K(E)$ und $S = \mathrm{id} - A$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für $N = \ker S^n$ und $R = \operatorname{Bild} S^n$ folgendes gilt:*

(a) die Kodimension von R in E ist endlich,

(b) $N \cap R = \{0\}$,

(c) $N + R = E$,

(d) $SN \subset N$,

(e) $SR \subset R$,

(f) $S_R \colon R \to R$, $x \mapsto S(x)$, *ist invertierbar,*

(g) $(S|_N)^n = 0$,

(h) $\operatorname{ind} S^n = 0$.

12.13 Lemma. *Sei* E *ein Banachraum. Ein abgeschlossener Unterraum* F_1 *von* E *ist komplementiert, wenn es einen weiteren abgeschlossenen Unterraum* F_2 *von* E *gibt, so dass* $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ *und* $F_1 + F_2 = E$.

Man schreibt dann $E = F_1 \oplus F_2$.

Beweis als Übung. Man sagt dann auch, F_1 sei komplementär zu F_2. Das Komplement ist im allgemeinen nicht eindeutig.

12.14 Lemma. *Seien* E *ein unendlich-dimensionaler Banachraum und* $A \in K(E)$. *Für jedes* $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *gibt es komplementäre Unterräume* R_λ *und* N_λ *von* E, *welche von* $\lambda \operatorname{id} - A$ *in sich selbst abgebildet werden und für die gelten*

(a) $(\lambda \operatorname{id} - A)|_{R_\lambda} \colon R_\lambda \to R_\lambda$ *ist ein Isomorphismus,*

(b) es gibt ein (von λ *abhängiges)* $n \in \mathbb{N}$, *so dass* $(\lambda \operatorname{id} - A)|_{N_\lambda}^n \equiv 0$,

(c) $\{0\} \neq \ker(\lambda \operatorname{id} - A) \subset N_\lambda$ *und* $\dim N_\lambda < \infty$*; speziell ist* λ *ein Eigenwert von* A.

Ferner gelten $0 \in \sigma(A)$ *und* $|\lambda| \leq \|A\|$ *für alle* $\lambda \in \sigma(A)$.

12.15 Satz. *Sei* E *ein unendlich-dimensionaler Banachraum, und sei* $A \in K(E)$. *Dann gelten*

(a) $0 \in \sigma(A)$,

(b) jedes $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *ist ein Eigenwert von* A, *und der zugehörige Eigenraum* E_λ *ist endlich-dimensional,*

(c) $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *ist höchstens abzählbar; wenn* $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *unendlich ist, dann ist* 0 *der einzige Häufungspunkt von* $\sigma(A)$,

(d) für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *gilt* $\operatorname{ind}(\lambda \operatorname{id} - A) = 0$*; speziell gilt für* $\lambda \neq 0$ *die* Fredholmsche Alternative:
$$\lambda \operatorname{id} - A \textit{ injektiv } \Leftrightarrow \lambda \operatorname{id} - A \textit{ surjektiv.}$$

Das Kapitel wird abgeschlossen durch ein Beispiel zur Fredholmschen Alternative.

12.16 Beispiel. Für $k \in C([0,1]^2)$ betrachten wir den *Volterraschen Integraloperator*
$$T \colon C[0,1] \to C[0,1], \quad Tf(s) = \int_0^s k(s,t) f(t)\, dt.$$
In Beispiel 11.6 wurde die Kompaktheit von T gezeigt, denn man kann den Kern durch Null in das Dreieck $t > s$ fortsetzen. Für $\lambda \neq 0$ wollen wir die Lösbarkeit der Integralgleichung
$$Tf - \lambda f = g$$

für beliebiges $g \in C[0,1]$ zeigen. Wegen der Fredholmschen Alternative brauchen wir dazu nur die Injektivität von $T - \lambda\,\mathrm{id}$ nachzuweisen. Da wir k durch k/λ ersetzen können, dürfen wir o. E. $\lambda = 1$ annehmen. Sei nun $f \in \ker(T - \mathrm{id})$. Dann gilt

$$|f(s)| = |Tf(s)| \leq \int_0^s |k(s,t)||f(t)|dt \leq s\|k\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Wir setzen diese Abschätzung wieder in die Formel für Tf ein

$$|f(s)| = |Tf(s)| \leq \int_0^s |k(s,t)|t\|k\|_\infty \|f\|_\infty dt \leq \frac{s^2}{2}\|k\|_\infty^2 \|f\|_\infty.$$

Durch wiederholtes Einsetzen erhält man schließlich

$$|f(s)| \leq \frac{s^n}{n!}\|k\|_\infty^n \|f\|_\infty \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty.$$

Daher $f = 0$. Folglich ist $T - \lambda\,\mathrm{id}$ injektiv und wegen der Fredholmschen Alternative auch surjektiv.

Wir haben außerdem gezeigt, dass $\sigma(T) = \{0\}$, denn 0 ist immer im Spektrum.

12.17 Lemma. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge, die höchstens einen Häufungspunkt besitzt. Dann ist M höchstens abzählbar.*

13 Beschränkte selbstadjungierte Operatoren

13.1 Definition. Seien E und F Hilberträume, und sei $A \in L(E,F)$. Für jedes $y \in F$ ist $x \mapsto (Ax,y)$ stetig. Aus dem Rieszschen Darstellungsatz folgt daher die Existenz eines eindeutig bestimmten Elements $A^*y \in E$ mit $(Ax,y) = (x, A^*y)$ für alle $x \in E$. Die Abbildung $A^*\colon F \to E$ ist die *Adjungierte* von A.

13.2 Bemerkung. $A^* \in L(F,E)$. Die Linearität ist klar. Aus dem Rieszschen Darstellungsatz wissen wir, dass $\|A^*y\|$ gleich der Norm des Funktionals $x \mapsto (Ax,y)$ ist. Diese ist wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung höchstens gleich $\|A\|\|y\|$. Also $\|A^*\| \leq \|A\|$.

13.3 Satz. E, F *und* G *seien Hilberträume.*

(a) *Die Abbildung* $A \mapsto A^*$ *ist ein isometrischer, konjugiert-linearer Isomorphismus von* $L(E,F)$ *auf* $L(F,E)$,

(b) $A^{**} = A$ *für jedes* $A \in L(E,F)$,

(c) $\|A^*A\| = \|A\|^2$ *für jedes* $A \in L(E,F)$,

(d) $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$ *für* $A \in L(E,F)$, $B \in L(F,G)$.

13.4 Definition. E sei ein Hilbertraum. Ein Operator $A \in L(E)$ heißt *selbstadjungiert*, wenn $A = A^*$. Ein Operator $A \in L(E,F)$ heißt *unitär*, wenn $A^* = A^{-1}$.

Bemerkung. Man spricht auch von beschränkten selbstadjungierten Operatoren, um den Unterschied zu den unbeschränkten, d. h. unstetigen selbstadjungierten Operatoren hervorzuheben, mit denen wir uns in der Funktionalanalysis I beschäftigen werden.

13.5 Lemma. A *sei ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum* E. *Dann gelten*

(a) $(Ax,x) \in \mathbb{R}$ *für alle* $x \in E$,

(b) $\|A\| = \sup\{|(Ax,x)| \mid \|x\| = 1\}$.

13.6 Satz. A *sei ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum* E. *Je zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.*

13.7 Satz. *Seien* E *ein Hilbertraum und* $\mathrm{P} \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ *eine Projektion.* P *ist genau dann orthogonal, wenn* P *selbstadjungiert ist.*

14 Spektraltheorie für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

14.1 Lemma. *Seien* H *ein Hilbertraum und* $A \in L(H)$ *kompakt und selbstadjungiert. Dann ist mindestens eine der beiden Zahlen* $\|A\|$ *oder* $-\|A\|$ *ein Eigenwert von* A.

14.2 Lemma. *Seien* H *ein Hilbertraum und* $A \in L(H)$ *selbstadjungiert. Sei* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ein Eigenwert von* A. *Dann*

(a) $\lambda \in \mathbb{R}$,

(b) $\ker(\lambda \operatorname{id} - A) = \ker((\lambda \operatorname{id} - A)^n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

14.3 Definition. Seien H ein Hilbertraum und $A \in K(H)$ selbstadjungiert. Eine *Eigenwertfolge* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von A ist eine Folge aller Eigenwerte von A, derart, dass $(|\lambda_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt. Dabei wird jeder einzelne Eigenwert λ so oft aufgezählt, wie $\dim\ker(\lambda \operatorname{id} - A)$ angibt. Falls es nur endlich viele Eigenwerte gibt, wird die Folge durch Nullen aufgefüllt.

14.4 Theorem. *Seien* H *ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und* $A \in L(H)$ *kompakt und selbstadjungiert. Sei ferner* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Eigenwertfolge von* A. *Dann* $\lambda_n \in \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Ferner existiert ein Orthonormalsystem* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* H, *so dass* $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\cdot, e_n)e_n$, *wobei die Folge in der Operatornorm konvergiert.*

14.5 Satz. *Seien* H *und* G *unendlich-dimensionale Hilberträume, und sei* $A \in K(H, G)$. *Es existieren eine Nullfolge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $[0, \infty[$ *und Orthonormalsysteme* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* H *und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* G, *so dass*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, e_n)f_n,$$

wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert.

14.6 Korollar. *Seien* H *und* G *Hilberträume. Dann ist jeder Operator in* $K(H, G)$ *Grenzwert eine Folge von Operatoren mit endlichem Rang (also endlichdimensionalem Bild) in der Operatornorm.*

14.7 Bemerkung. Die Darstellung aus Satz 14.5 heißt *Schmidt-Darstellung* von A. Man kann zeigen, dass die Zahlen s_n, $n \in \mathbb{N}_0$, von der Wahl der Orthonormalsysteme unabhängig sind. Sie heißen *singuläre Zahlen* des Operators A.

Die kompakten Operatoren werden danach unterteilt, ob die singulären Zahlen in einem ℓ^p liegen. Diejenigen, für die $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in ℓ^2 liegt, heißen *Hilbert-Schmidt-Operatoren*, diejenigen, für die diese Folge sogar in ℓ^1 liegt, heißen *nuklear*.

15 Soboleweräume

15.1 Definition. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen definieren wir

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{Supp} f \text{ ist eine kompakte Teilmenge von } \Omega\}.$$

Dabei ist $\operatorname{Supp} f$ der *Träger* von f

$$\operatorname{Supp} f = \overline{\{x \in \Omega | f(x) \neq 0\}},$$

wobei der Abschluss im $\mathbb{R}^n$ genommen wird.

15.2 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex und sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann heißt $g \in L^2(\Omega)$ *schwache Ableitung* von f, wenn

$$(g, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \varphi^{(\alpha)}) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Wir schreiben dann $D^\alpha f$ oder $f^{(\alpha)}$ für g.

Beispiel. Sei $\Omega =]-1, 1[$, sei $f(x) = |x|$. Dann ist g mit $g(x) = \operatorname{signum}(x)$ die schwache Ableitung von f. Das rechnet man sofort nach, indem man die Integrale $\int_{-1}^0$ und $\int_0^1$ einzeln partiell integriert.

15.3 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) $H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid$ für alle α mit $|\alpha| \leq m$ existiert die schwache Ableitung $D^\alpha f$ in $L^2(\Omega)\}$.

(b) $(f, g)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m}(D^\alpha f, D^\alpha g)$ für $f, g \in H^m(\Omega)$.

(c) $H_0^m(\Omega)$ ist der Abschluß von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^m(\Omega)$.

Die Räume $H^m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$ heißen *Sobolewräume*.

In der "Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen" hatten wir als Satz 16.7 gezeigt:

15.4 Satz. $H^m(\Omega)$ *und* $H_0^m(\Omega)$ *sind Hilberträume.*

15.5 Beispiel. Sei $I =]-1, 1[$, sei $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. Dann $f \in H^1(I) \setminus H^2(I)$.

16 Die Fouriertransformation

16.1 Definition. $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$ ist der Raum der *im Unendlichen verschwindenden* stetigen Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$. Er wird mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

16.2 Lemma. $C_0(\mathbb{R}^n)$ *ist ein abgeschlossener Unterraum des* $\ell^\infty(\mathbb{R}^n)$*, insbesondere ein Banachraum.*

16.3 Bezeichnung. Für $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$x\xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j, \quad x^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2, \quad |x| = \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{1/2}.$$

16.4 Definition. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ setze

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Die Funktion $\mathcal{F}f$ heißt *Fouriertransformierte* von f, und die Abbildung $\mathcal{F}$ heißt *Fouriertransformation.*

16.5 Satz. *Für* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ist* $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. *Ferner ist* $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ *stetig und linear mit* $\|\mathcal{F}\| \leq (2\pi)^{-n/2}$.

16.6 Definition. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, wenn

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha f(x) = 0$$

für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Der Raum

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid D^\beta f \text{ schnell fallend für jedes } \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

heißt *Schwartzraum.* Die Elemente von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ heißen *Schwartzfunktionen.*

16.7 Bemerkungen. (a) Der Schwartzraum heißt nach Laurent Schwartz (1915–2002).

(b) Ein Beispiel für eine Schwartzfunktion ist $x \mapsto e^{-x^2}$.

(c) Offenbar $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für jedes $p \geq 1$.

(d) Eine C^∞-Funktion f ist genau dann eine Schwartzfunktion, wenn

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^m)|D^\alpha f(x)| < \infty \quad \forall\, m \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

(e) Der Schwartzraum ist kein Banachraum, sondern ein Fréchetraum, also ein vollständiger metrischer Vektorraum mit einem konvexen System von Nullumgebungen. Statt mit der metrischen Topologie wird er auch gerne mit der schwachen Topologie versehen. Dann ist er allerdings nicht vollständig.

16.8 Lemma. *Für* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *und* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *gelten*

(a) $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $D^\alpha(\mathcal{F}f) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha f)$,

(b) $\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}f$.

16.9 Lemma. *Wenn* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, *dann auch* $\mathcal{F}f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

16.10 Notation. Mit $\gamma(x) = e^{-x^2/2}$ bezeichnen wir den *Gauß-Kern*. Für $a > 0$ setzen wir ferner $\gamma_a(x) = \gamma(ax)$.

Der Gaußkern ist fast die einzige Funktion, deren Fouriertransformierte wir tatsächlich berechnen müssen. Aus der Analysis wissen wir

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\gamma(x)\,dx = 1.$$

16.11 Lemma.

$$\mathcal{F}\gamma = \gamma, \quad (F\gamma_a)(\xi) = \frac{1}{a^n}(\mathcal{F}\gamma)\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

16.12 Lemma. *Für* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

16.13 Theorem. *Die Fouriertransformation ist eine Bijektion von* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *auf sich. Ihre Inverse wird gegeben durch*

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ferner gilt

$$(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)_{L^2} = (f, g)_{L^2} \qquad \textit{(Plancherel-Gleichung).}$$

16.14 Bemerkung. Wir haben gezeigt, dass $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ für alle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, läßt sich $\mathcal{F}$ stetig zu einer Isometrie $\mathcal{F}_2\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung heißt *Fourier-Plancherel-Transformation*. Man beachte, dass $\mathcal{F}_2$ nicht durch die Integralformel gegeben ist. Den Zusammenhang erläutert das nächste Lemma.

16.15 Lemma. *(a) Für* $R > 0$ *setze* $g_R(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x| \le R} f(x) e^{-ix\xi} d\xi$*. Dann gilt für jedes* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}_2 f = \lim_{R \to \infty} g_R,$$

wobei Konvergenz im Sinne von $L^2(\mathbb{R}^n)$ *vorliegt.*

(b) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$(\mathcal{F}_2 f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad \textit{fast überall.}$$

Wir werden ab sofort darauf verzichten, die Operatoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_2$ zu unterscheiden.

16.16 Lemma. *Sei* $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$*. Dann gilt für* $|\alpha| \le m$

$$\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F} f.$$

16.17 Satz.

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |\xi|^2)^{m/2} \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Bemerkung. Diesen Satz kann man verwenden, um $H^s(\mathbb{R}^n)$ für $s \notin \mathbb{N}_0$ zu erklären. Für $s \notin \mathbb{N}_0$ und $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ wird die Definition von $H^s(\Omega)$ allerdings schwieriger. In diesem Fall verwendet man beispielsweise die Methode der komplexen Interpolation. Sie erlaubt es, zu je zwei Banachräumen $F \hookrightarrow E$ eine Schar von Zwischenräumen $[E, F]_\theta$, $0 \le \theta \le 1$, zu konstruieren.

Man braucht reelle positive Sobolew-Ordnungen s für die Untersuchung von Rändern. Für $s > 1/2$ und glatt berandetes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ setzt sich nämlich jedes $f \in H^s(\Omega)$ zu $g \in H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ fort.

Literatur zum Thema ist beispielsweise das Buch “Partial Differential Equations I” vom Micheal E. Taylor.

17 Die Einbettungssätze von Sobolew und Rellich

17.1 Theorem (Sobolew-Lemma). *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und seien* $m, k \in \mathbb{N}_0$ *mit* $m > k + \frac{n}{2}$*. Zu jedem* $f \in H^m(\Omega)$ *existiert ein Repräsentant in* $C^k(\Omega)$*.*

17.2 Lemma. *Sei* Ω *eine beschränkte, offene Menge im* $\mathbb{R}^n$*. Dann ist die Einbettung* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ *kompakt.*

17.3 Theorem (Rellichscher Einbettungssatz). *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt und offen und* $m \in \mathbb{N}$*. Dann ist die Einbettung* $H_0^m(\Omega) \hookrightarrow H_0^{m-1}(\Omega)$ *kompakt.*

17.4 Satz. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *ist dicht in* $H^m(\mathbb{R}^n)$*.*

17.5 Bezeichnung. Wir bezeichnen den offenen Halbraum

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 > 0, x_2, \dots, x_n \text{ beliebig}\}$$

mit $\mathbb{R}^n_+$.

17.6 Lemma. *Sei* $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$*. Definiere für* $\delta \geq 0$

$$\tau_\delta(f)(x) = \begin{cases} f(x_1 + \delta, x_2, \dots, x_n), & x_1 > -\delta, \\ 0, & x_1 \leq -\delta. \end{cases}$$

Dann $\tau_\delta|_{\mathbb{R}^n_+} \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ *und*

$$\lim_{\delta \searrow 0} \tau_\delta|_{\mathbb{R}^n_+}(f) = f \qquad \textit{in } L^2(\mathbb{R}^n_+).$$

17.7 Lemma. *Sei* $m \in \mathbb{N}$*, sei* $f \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$*. Wähle* $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *mit* $\operatorname{Supp}(\chi) \subset]0, \infty[$ *und* $\chi(t) = 1$ *für alle* $t > 1$*. Setze* $\chi_\epsilon(t) = \chi((t+\epsilon)/\epsilon)$*. Dann ist für jedes* $\epsilon > 0$ *die Funktion*

$$f_\epsilon(x) = \chi_\epsilon(x_1)\tau_\epsilon(f)(x)$$

in $H^m(\mathbb{R}^n)$*. Ferner gilt*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} f_\epsilon = f \qquad \textit{in } H^m(\mathbb{R}^n_+).$$

17.8 Definition.

$$\mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) = \{f|_{\mathbb{R}^n_+} \mid f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\}.$$

17.9 Satz. $\mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *ist dicht in* $H^m(\mathbb{R}^n_+)$.

17.10 Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetige lineare Abbildung $E\colon H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n)$, so dass $E(f)|_\Omega = f$ für alle $f \in H^m(\Omega)$, bezeichnet man als *Ausdehnungsoperator.*

17.11 Satz. $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ *besitzt einen Ausdehnungsoperator.*

17.12 Lemma (Verheftungslemma). *Es seien* $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ *offen, und es sei* $f\colon \Omega_1 \cup \Omega_2 \to \mathbb{K}$ *derart, dass die Einschränkungen* $f|_{\Omega_j}$ *jeweils in* $H^m(\Omega_j)$ *sind. Dann* $f \in H^m(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.

17.13 Theorem. *Wenn* Ω *eine beschränkte offene Menge mit* C^∞*-Rand ist, dann besitzt* $H^m(\Omega)$ *für jedes* m *einen Ausdehnungsoperator.*

Der Ausdehnungssatz kann sogar für beschränkte Gebiete mit Lipschitz-Rand wie z. B. Polytope gezeigt werden. Entsprechende Literaturhinweise findet man in Abschnitt 1.4.3 von Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.*

17.14 Satz. *Es sei* Ω *eine beschränkte, offene Menge, die einen Ausdehnungsoperator besitzt. Dann ist die Einbettung* $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}(\Omega)$ *kompakt.*

17.15 Korollar. *Wenn* Ω *eine beschränkte offene Menge mit* C^∞*-Rand ist, dann ist die Einbettung* $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}(\Omega)$ *kompakt.*

Auch dieses Ergebnis kann für den Fall beschränkter Gebiete mit Lipschitz-Rand gezeigt werden.

18 Unbeschränkte Operatoren zwischen Hilberträumen

Problem: Differentialoperatoren sind keine stetigen Endomorphismen.

Das Produkt zweier Hilberträume hatten wir in 8.21 erklärt.

18.1 Definition. Ein *Operator* A von H nach G ist eine lineare Abbildung A von einem Unterraum $D(A)$ von H mit Werten in G. $D(A)$ ist der *Definitionsbereich* von A, $R(A) = \{Ax \mid x \in D(A)\}$ ist sein *Bild*. Der Graph $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\}$ von A ist dann ein Prähilbertraum.

Der Operator A ist *dicht definiert*, wenn sein Definitionsbereich dicht ist.

Sind A und B zwei Operatoren von H nach G und gilt $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$, so bezeichnet man B als *Erweiterung* von A und A als *Einschränkung* von B.

18.2 Lemma. *Ein Unterraum L von $H \times G$ ist genau dann der Graph eines Operators von H nach G, wenn $\{(x,y) \in L \mid x = 0\} = \{(0,0)\}$.*

18.3 Lemma. *Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G. Dann definieren wir $D(A^*) = \{y \in G \mid x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ ist stetig auf $D(A)\}$. Es gelten*

(a) $D(A^*)$ ist ein linearer Unterraum von G.

(b) Für jedes $y \in D(A^*)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $A^*y \in H$ mit

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad \textit{für alle } x \in D(A).$$

(c) $A^*\colon D(A^*) \to H$ ist linear.

18.4 Definition. Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G. Den Operator A^* aus 18.3 bezeichnet man als den zu A *adjungierten* Operator.

18.5 Beispiel. Es werde ein Operator A im $L^2[0,1]$ gegeben durch $D(A) = \mathcal{D}(]0,1[)$ und $A\varphi = \varphi'$. Er ist dicht definiert. Wir behaupten $D(A^*) = H^1[0,1]$.

Sei zuerst $f \in H^1[0,1]$. Dann liegt auch $\overline{f}$ in $H^1[0,1]$ und die Definition der schwachen Ableitung ergibt

$$\int_0^1 \varphi'\overline{f}\, d\lambda_1 = -\int_0^1 \varphi\overline{f}'\, d\lambda_1.$$

Daraus folgt, die Stetigkeit des Funktionals $\varphi \mapsto \langle A\varphi, f\rangle$ und dann auch $A^*f = f'$.

Sei nun $f \in D(A^*)$. Daher ist das Funktional

$$T\colon \varphi \mapsto \int_0^1 \varphi' \overline{f} \, d\lambda_1 \tag{18.1}$$

stetig. Wegen des Rieszschen Darstellungssatzes existiert $g \in L^2[0,1]$, so dass

$$T\varphi = \langle \varphi, g \rangle = \int_0^1 \varphi \overline{g} \, d\lambda_1. \tag{18.2}$$

Zusammen zeigen die Gleichungen (18.1) und(18.2), dass f die schwache Ableitung $-g$ besitzt. Speziell $f \in H^1[0,1]$.

18.6 Bezeichnung. Definiere $U\colon H \times G \to G \times H$, $U(x,y) = (-y,x)$. Dann ist U offenbar ein unitärer Isomorphismus.

18.7 Lemma. *Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G. Dann*

$$\mathcal{G}(A^*) = U(\mathcal{G}(A)^\perp) = (U\mathcal{G}(A))^\perp. \tag{18.3}$$

18.8 Bemerkung. Falls A und B dicht definierte Operatoren mit $A \subset B$ sind, so folgt sofort aus dem vorangegangenen Lemma, dass $B^* \subset A^*$.

18.9 Definition. Ein Operator A von H nach G heißt *abgeschlossen*, wenn sein Graph abgeschlossen ist. Er heißt *abschließbar*, wenn $\overline{\mathcal{G}(A)}$ Graph eines Operators B ist. In diesem Fall ist B die *Abschließung* von A. Wir schreiben dann $\overline{A}$.

18.10 Bemerkungen. Sei A ein Operator von H nach G.

(a) Wenn A abgeschlossen mit $D(A) = H$ ist, dann ist A stetig. Das folgt aus dem Satz von abgeschlossenen Graphen.

(b) A ist genau dann abschließbar, wenn A eine abgeschlossene Erweiterung hat.

(c) A ist genau dann abschließbar, wenn für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für welche $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y \in G$ konvergiert, bereits $y = 0$ gilt.

   A ist nämlich genau dann abschließbar, wenn $\overline{\mathcal{G}(A)}$ ein Graph ist. Wir haben gezeigt, dass das genau dann der Fall ist, wenn das einzige Element der Form $(0,y)$ in $\overline{\mathcal{G}(A)}$ das Nullelement ist.

(d) Wenn A abschließbar und dicht definiert ist, dann gilt $\overline{A}^* = A^*$.

18.11 Satz. *Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G. Dann gelten*

(a) A^* ist abgeschlossen mit $\ker A^* = (\operatorname{Bild} A)^\perp$.

(b) A^* ist genau dann dicht definiert, wenn A abschließbar ist.

(c) *Wenn* A *abschließbar ist, dann* $\overline{A} = A^{**}$.

18.12 Korollar. *Wenn* A *ein dicht definierter, abgeschlossener Operator von* H *nach* G *ist, so ist* A^* *abgeschlossen und dicht definiert, und es gilt* $A = A^{**}$.

18.13 Definition. Es sei A ein injektiver Operator von H nach G. Dann wird durch

$$\mathcal{G}(A^{-1}) = \{(Ax, x) \mid x \in D(A)\}$$

ein Operator mit Definitionsbereich $D(A^{-1}) = \operatorname{Bild} A$ erklärt. A^{-1} ist der *Inverse* zu A.

Offenbar ist A^{-1} genau dann abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist.

18.14 Lemma. *Sei* A *ein injektiver, dicht definierter Operator von* H *nach* G, *dessen Bild dicht in* G *ist. Dann ist* A^* *injektiv,* A^{-1} *ist dicht definiert, und es gilt* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Falls außerdem A *abgeschlossen mit* $\operatorname{Bild} A = G$ *ist, so ist* A^{-1} *stetig.*

18.15 Definition. Für Operatoren A, B von H nach G definieren wir $A + B$ auf $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ durch $(A + B)(x) = Ax + Bx$.

Die Definition macht nur richtig Sinn, wenn einer der beiden Operatoren beschränkt ist.

18.16 Lemma. A *und* B *seien Operatoren von* H *nach* G. *Dann gelten:*

(a) *Falls* A *abgeschlossen und* B *beschränkt ist, so ist* $A + B$ *abgeschlossen.*

(b) *Falls* $A + B$ *dicht definiert ist, so gilt* $A^* + B^* \subset (A + B)^*$.

(c) *Falls* A *dicht definiert und* B *beschränkt ist, so gilt* $A^* + B^* = (A + B)^*$.

18.17 Definition. Sei A ein Operator von H nach G, und sei B ein Operator von G nach F. Mit BA wird der Operator bezeichnet, der auf $D(BA) = \{x \in D(A) \mid Ax \in D(B)\}$ definiert ist durch $(BA)x = B(Ax)$.

18.18 Definition. Sei A ein Operator in H. Die Menge

$$\rho(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid z\,\mathrm{id} - A \colon D(A) \to H \text{ ist bijektiv und die Inverse ist stetig}\}$$

heißt *Resolventenmenge* von A, und die Menge $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt *Spektrum* von A. Für $z \in \rho(A)$ bezeichnet man $R(z, A) = (\mathrm{id}\, z - A)^{-1}$ als *Resolvente* von A in z.

Bemerkung. Falls A abgeschlossen ist, so ist die Inverse automatisch stetig.

18.19 Satz (Resolventengleichung). *Sei* A *ein Operator in* H *und seien* $z, \zeta \in \rho(A)$. *Dann gilt*

$$R(z, A) - R(\zeta, A) = (\zeta - z) R(z, A) R(\zeta, A).$$

18.20 Satz. *Es sei* A *ein Operator in* H, *so dass für ein* $z \in \rho(A)$ *die Resolvente* $R(z, A)$ *kompakt ist. Dann ist für jedes* $\zeta \in \rho(A)$ *die Resolvente* $R(\zeta, A)$ *kompakt.*

18.21 Definition. Ein dicht definierter Operator A in einem Hilbertraum H heißt *symmetrisch*, wenn $A \subset A^*$. Er heißt *selbstadjungiert*, wenn $A = A^*$.

18.22 Bemerkung. Sei A ein dicht definierter, symmetrischer Operator. Dann gilt für $x, y \in D(A)$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

Insbesondere ist $\langle Ax, x \rangle$ reell für jedes $x \in D(A)$.

18.23 Lemma. *Sei* A *ein symmetrischer Operator in* H. *Dann ist* A *abschließbar, und* $\overline{A}$ *ist symmetrisch.*

18.24 Lemma. *Sei* A *ein symmetrischer, abgeschlossener Operator in* H. *Für jedes* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *ist* $z\,\mathrm{id} - A$ *injektiv und* $\mathrm{Bild}(z\,\mathrm{id} - A)$ *abgeschlossen.*

18.25 Satz. *Der Operator* A *sei selbstadjungiert in* H. *Dann ist sein Spektrum eine Teilmenge von* $\mathbb{R}$.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass $\sigma(A) \neq \emptyset$ für selbstadjungierte Operatoren A.

19 Die Friedrichssche Erweiterung

19.1 Beispiel. Sei $I =]0,1[$, und sei $D(A)$ ein Unterraum von $W^2(I)$. Wir betrachten den Operator in $H = L^2(I)$, der durch $Af = f''$ definiert ist. Man überlegt sich mit Stetigkeitsargumenten und dem Satz von Sobolev, dass die folgenden Anwendungen der partiellen Integration auch für schwache Ableitungen gerechtfertigt sind:

$$\begin{aligned}\langle Af, g\rangle = \int_0^1 f''g &= f'(1)g(1) - f'(0)g(0) - \int_0^1 f'g' \\ &= f'(1)g(1) - f'(0)g(0) - f(1)g'(1) + f(0)g'(0) + \int_0^1 fg'' \\ &= f'(1)g(1) - f'(0)g(0) - f(1)g'(1) + f(0)g'(0) + \langle f, Ag\rangle.\end{aligned}$$

Setzt man also beispielsweise $D(A) = W^2(I)$, so ist A nicht symmetrisch. Setzt man dagegen $D(A) = H_0^2(I)$, so ist A symmetrisch. In diesem Fall gilt $D(A^*) = W^2(I)$, also ist A nicht selbstadjungiert. Vom analytischen Standpunkt sind beide Definitionsbereiche unnatürlich, denn im ersten Fall haben wir keine Randbedingung gestellt, im zweiten dagegen vier, was klar zu viel ist.

19.2 Definition. Sei A ein symmetrischer Operator im Hilbertraum H. A heißt *akkretiv*, wenn es ein $c \geq 0$ gibt, so dass $\langle Au, u\rangle \geq c\|u\|^2$ für alle $u \in D(A)$, und *stark akkretiv,* wenn $c > 0$ gewählt werden kann.

Bemerkung. Einige Autoren (Zeidler) sagen "monoton" anstelle von "akkretiv". Einige Autoren verwenden den Begriff überhaupt nicht und bezeichnen stattdessen den Negativen eines akkretiven Operators als *dissipativ.*

19.3 Definition. A sei ein stark akkretiver Operator im Hilbertraum H. Durch

$$\langle u, v\rangle_E = \langle Au, v\rangle, \quad u, v \in D(A),$$

wird ein Skalarprodukt auf $D(A)$ erklärt. Die Vervollständigung von $(D(A), \|\cdot\|_E)$ ist ein Hilbertraum, der als *energetischer Raum* von A bezeichnet und H_E geschrieben wird.

19.4 Lemma. *Sei A ein stark akkretiver Operator im Hilbertraum H. Die Einbettung $D(A) \hookrightarrow H$ setzt sich zu einer stetigen Einbettung $H_E \hookrightarrow H$ fort.*

19.5 Bemerkung. Da H_E ein dichter Unterraum von H ist, ist H' ein Unterraum von H'_E. Wir wollen dabei H' mit H identifizieren. Das geht kanonisch, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tut man sich leichter, wenn man eine konjugiert lineare isometrische Involution $J\colon H \to H$ verwendet. In diesem Fall ist nämlich $\langle \cdot, J(-)\rangle$ eine Bilinearform. Falls H ein Funktionenraum ist, kann man $J(f) = \bar{f}$ wählen. Im allgemeinen Fall sei $(b_m)_{m\in M}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von H. Dann kann man setzen $J(\sum_{m\in M} x_m b_m) = \sum_{m\in M} \bar{x}_m b_m$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wählt man $J = \mathrm{id}$.

19.6 Lemma. *Sei A ein stark akkretiver Operator im Hilbertraum H, sei $J\colon H \to H$ eine konjugiert lineare isometrische Involution wie in Bemerkung 19.5. Dann wird durch*

$$A_E\colon H_E \to H'_E, \quad A_E(u)(v) = \langle u, J(v)\rangle_E,$$

ein isometrischer Isomorphismus definiert, der als Energieerweiterung *von A bezeichnet wird.*

Bemerkung. Da die Einbettung $H_E \hookrightarrow H$ dichtes Bild besitzt, ist H' in H'_E eingebettet. Wir identifizieren H' mit H linear isomorph via $T \mapsto u$ für dasjenige u mit $Tv = \langle v, J(u)\rangle$ für alle $v \in H$. Wir definieren die Friedrichssche Erweiterung durch dieselbe Vorschrift wie A_E, aber mit Definitionsbereich $A_E^{-1}(H)$. Die Details behandelt das folgende Lemma.

19.7 Lemma. *Sei A ein stark akkretiver Operator in H. Mit $A_E\colon H_E \to H'_E$ werde die Energieerweiterung von A bezeichnet. Definiere einen Operator A_F in H durch*

$$D(A_F) = \{u \in H_E \mid A_E u \in H'\}, \quad \langle A_F u, Jv\rangle = A_E(u)(v) \text{ für alle } v \in H_E.$$

Dann ist A_F eine Erweiterung von A, genannt Friedrichssche Erweiterung.

19.8 Theorem (Friedrichs (1934)). *Sei A ein stark akkretiver Operator in einem Hilbertraum H. Dann ist seine Friedrichssche Erweiterung selbstadjungiert.*

Ferner ist $0 \in \rho(A_F)$. Falls die Inklusion $H_E \hookrightarrow H$ kompakt ist, so ist die Resolvente $R(A_F, 0)$ kompakt.

Beweis. Da A_F eine Erweiterung von A ist, ist A_F dicht definiert. Weil $A_E\colon H_E \to H'_E$ surjektiv ist, gilt Bild $A_F = H$. Wegen der Monotonie von A ist $B = A_F^{-1}\colon H \to D(A_F)$ stetig. Wegen Lemma 18.14 genügt es zu zeigen, dass B selbstadjungiert ist. Wegen $D(B) = H$ reicht dazu bereits der Nachweis der Symmetrie. Dazu seien $f, g \in H$ gegeben. Setze $u = Bf$ und $v = Bg$. Das bedeutet $A_F(U) = f$ und somit

$$\langle f, Bg\rangle = \langle A_F u, v\rangle = A_E(u)(Jv) = \langle u, v\rangle_E = \langle Bf, Bg\rangle_E .$$

Dasselbe gilt, wenn man f und g vertauscht. Man erhält

$$\langle f, Bg\rangle = \langle Bf, Bg\rangle_E = \overline{\langle Bg, Bf\rangle_E} = \overline{\langle g, Bf\rangle} = \langle Bf, g\rangle .$$

Der letzte Teil der Behauptung ergibt sich aus der folgenden Faktorisierung von A_F^{-1}

$$A_F^{-1} \colon H \hookrightarrow H_E' \to H_E \hookrightarrow H_E$$

mit A_E^{-1} in der Mitte und einem kompakten Operator am Schluss. □

19.9 Beispiel. Wir nehmen das Beispiel von oben wieder auf. Betrachte den Operator $f \mapsto -f''$ Wir konstruieren die Friedrichssche Erweiterung für den Definitionsbereich $D(A) = \mathcal{D}(I)$. Dann gilt für $f, g \in D(A)$

$$\langle f, g \rangle_E = \langle f, g \rangle - \int_0^1 f''g = \langle f, g \rangle + \int_0^1 f'g'.$$

Also stimmt das energetische Skalarprodukt mit dem Skalarprodukt von $W^1(I)$ überein. Daraus folgt $H_E = H_0^1(I)$. Für $f, g \in H_E = H_0^1(I)$ gilt $A_E(f)(g) = \langle f, \overline{g} \rangle_E = \int_0^1 fg + \int_0^1 f'g'$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ gilt also $A_E(f)(\varphi) = \int_0^1 f\varphi - \int_0^1 f\varphi''$. Falls also $A_E(f) \in L^2(I)'$ liegt, so ist $f \in W^2(I)$ und erfüllt $A_E f = f - f''$. Wir haben gezeigt:

$$D(A_F) = H_0^1(I) \cap W^2(I) = \{f \in W^2(I) \mid f(0) = f(1) = 0\}.$$

Das ist ein anderer Raum als $H_0^2(I)$, weil keine Bedingungen an $f'(0)$ und $f'(1)$ gestellt werden. Man sollte in den meisten Fällen gar nicht erst versuchen, $D(A_F)$ auszurechnen.

19.10 Beispiele. Wir konstruieren jetzt Laplace-Operatoren. Dazu sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^∞-Rand. Setze $Af = f - \Delta f$.

(a) $D(A) = \mathcal{D}(\Omega)$. Dann folgt aus der Greenschen Identität für $f, g \in D(A)$

$$\langle f, g \rangle_E = \langle f, g \rangle + \langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Also ist das energetische Skalarprodukt äquivalent zum Skalarprodukt auf $W^1(\Omega)$. Daraus folgt $H_E = H_0^1(\Omega)$. Falls also f für ein $g \in L^2(\Omega)$ die Gleichung $A_F f = g$ löst, so gilt $f|_{\partial\Omega} = 0$. Dass $f \in W^2(\Omega)$ gilt, muss dagegen mit analytischen Mitteln gezeigt werden.

Aus dem Rellichschen Einbettungssatz folgt die Kompaktheit von $H_E \hookrightarrow H$. Wir haben also gezeigt, dass es eine unbeschränkt wachsende Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0, \infty]$ und ein vollständiges Orthonormalsystem $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega)$ mit $\Delta f_n = -\lambda_n f_n$ und $f_n \in H_0^1(\Omega)$ gibt.

(b) Das Neumannsche Randwertproblem bearbeitet man analog, indem man als Definitionsbereich die Menge $D(A) = \{f \in C^2(\Omega) \mid f'|_{\partial\Omega} = 0\}$ wählt. In diesem Fall erhält man $H_E = W^1(\Omega)$. Man benötigt daher den Rellichschen Einbettungssatz für W^1.

Man beweist so die Existenz einer unbeschränkt wachsenden Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0, \infty]$ und eines vollständigen Orthonormalsystems $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $W^2(\Omega)$ mit $\Delta f_n = -\lambda_n f_n$ und $f_n|_{\partial\Omega} = 0$.