Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 16.10.2017

Blatt 1

Übungen zu Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

1. Geben Sie für die folgenden partiellen Differentialgleichungen an, ob sie linear, semi-linear, quasi-linear oder voll nichtlinear sind:

   (a) (1P) $\Delta u = 1,$ (b) (1P) $u_t + u\, u_x = 0$

   (c) (1P) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,$ (d) (1P) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

   (e) (3P) $\det\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right)_{i,j=1,\ldots,n} = 0$ (f) (3P) $u_t - \Delta(u^2) = 0$

   Hinweis: Bei (e) müssen Sie argumentieren, bei (f) sogar ein bisschen rechnen.

2. (10P) Besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + u_{x_1} + u_{x_2} &= \frac{1}{t}, && \text{auf } \mathbb{R}^2 \times \,]0,\infty[, \\ u(x_1,x_2,0) &= 1, && \text{auf } \mathbb{R}^2 \times \{0\}\ , \end{aligned}$$

   eine Lösung? Beweisen Sie Ihre Antwort.

3. (10P) (*Laplace in ebenen Polarkoordinaten*) Für eine Funktion u von der Klasse C^2 setze

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

   Wie immer sei der Laplace-Operator definiert als $\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Zeigen Sie für $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\Delta u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} v_r.$$

4. (10P) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $u, v \in C^k(U)$. Beweisen Sie für beliebiges $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$ die Leibnizformel

$$\frac{\partial^\alpha (uv)}{\partial x^\alpha} = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} \frac{\partial^{\alpha-\beta} v}{\partial x^{\alpha-\beta}}$$

Hierbei bedeutet $\beta \leq \alpha$, dass $\beta_j \leq \alpha_j$ für $j = 1, \ldots, n$, und

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^{n} \binom{\alpha_j}{\beta_j}.$$

Hinweis: Aus der Analysis I wissen wir , dass $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$.

Die Prüfung zu Einführung in die partiellen Differentialgleichungen erfolgt schriftlich. Um zur Prüfung zugelassen zu werden, müssen mindesten 40% der möglichen Übungspunkte erreicht werden. Geplant sind 12 Übungsblätter à 40 Punkte. Daraus ergibt sich, dass 192 Punkte für die Teilnahme an der Prüfung benötigt werden.
Studierende der Mathematik, die bereits einen erfolgslosen Prüfungsversuch in Einführung in die partiellen Differentialgleichungen absolviert und die Prüfung noch nicht bestanden haben, sind ebenfalls zugelassen.
Studierende anderer Fächer sind auch dann zugelassen, wenn sie eine frühere Zulassung besitzen, egal ob sie bereits an der Prüfung teilgenommen haben oder nicht.
Es wird zwei Klausuren geben, eine im Februar und eine im März. Wer Mathematik studiert, bei mir die Zulassung erwirbt, aber an keiner dieser beiden Klausuren teilnimmt, muss die Zulassung neu erwerben, wenn er später einmal an einer Prüfung zu Einführung in die partiellen Differentialgleichungen teilnehmen will.

Abgabe: Mo, 23.10.2017, 12:20 **Besprechung:** 24.–26.10.2017