

## Übungen zu Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

1. (10P) Sei  $\Phi(x) = -\frac{1}{2}|x|$  die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung in einer Raumdimension. Zeigen Sie  $-\Phi'' = \delta_0$  im Distributionssinn.
2. (10P) Für welche Zahlen  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $p \in [1, \infty[$  liegt

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & x > 0, \end{cases}$$

in  $W^{k,p}([-1, 1])$ ?

Begründen Sie Ihre Behauptung.

3. (10P) Sei  $1 \leq p < \infty$ , sei  $U \subset \mathbb{R}$  ein offenes, beschränktes Intervall, sei  $u \in W^{1,p}(U)$  und sei  $v \in C^1(\bar{U}) \cap C^\infty(U)$ . Zeigen Sie, dass  $uv \in W^{1,p}(U)$  und dass

$$(uv)' = u'v + uv'$$

im schwachen Sinn.

4. (10P) Für  $a > 1$  sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  gegeben durch

$$f(x) = \exp(-(\log(1+x^2))^a).$$

Zeigen Sie  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

*Hinweis:* Kenntnisse der Funktionentheorie sind hier hilfreich.