Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 23.10.2017

Blatt 2

Übungen zu Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

1. (a) (5P) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist das Integral $\displaystyle\int_{B_1^{(n)}(0)} |x|^s d\lambda_n(x)$ endlich?

   (b) (5P) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist das Integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1^{(n)}(0)} |x|^s d\lambda_n(x)$ endlich?

   Hinweis: Verwenden Sie abstrakte Polarkoordinaten. Die gesuchte Menge von Parametern s hängt in beiden Fällen von n ab.

2. (10P) Gibt es nicht-konstante Lösungen der Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die nur vom Winkel abhängen?

3. Betrachten Sie für $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ das Anfangswertproblem

$$u_t + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[$$
$$u = g \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}.$$

   (a) (5P) Bestimmen Sie eine Lösung.

   (b) (5P) Zeigen Sie deren Eindeutigkeit.

   Hinweis: Wenn u eine Lösung ist, dann betrachten Sie wie in der Vorlesung die Funktion $\varphi(s) = u(x + sb, t + s)$. Welche Differentialgleichung erfüllt φ?

4. (10P) Zeigen Sie den Divergenzsatz für den Quader

$$Q = \prod_{j=1}^{n}]a_j, b_j[\subset \mathbb{R}^n.$$

   Das Oberflächenmaß auf den Seiten ist jeweils das $(n-1)$-dimensionale Lebesguemaß.

Abgabe: Mo, 30.10.2017, 12:20 **Besprechung:** 7.–9. November