Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 30.10.2017

Blatt 3

Übungen zu Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

1. (10P) Sei $u(x,y) = \ln\big((x+1)^2 + y^2\big)$. Zeigen Sie, dass u harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$ ist.

2. (10P) Finden Sie eine radialsymmetrische Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ in $U = \mathbb{R}^2$, wobei
$$f(x) = \max(0,\, 1 - |x|)\,.$$
Hinweis: Ansatz $u(x) = v(|x|)$.

3. (10P) Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir
$$\Phi(x) = -\frac{1}{2}|x|.$$
Ferner sei $f \in C_c^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass durch
$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y) f(y)\,dy$$
eine C^2-Funktion mit $u'' = -f$ gegeben wird.

4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in C(U)$ heißt *subharmonisch*, wenn u die folgende Mittelwertungleichung erfüllt:

   Für jedes $x \in U$ und jedes $r > 0$ mit $\overline{B}_r(x) \subset U$ gilt
$$u(x) \leq \frac{1}{r^{n-1} n\alpha(n)} \int_{\partial B_r(x)} u\, d\sigma.$$

   (a) (10P) Es sei nun sogar $u \in C^2(U)$. Zeigen Sie, dass u genau dann subharmonisch ist, wenn $\Delta u(x) \geq 0$ für alle $x \in U$.

   (b) Sei nun $n = 2$ und $u(x_1, x_2) = |f(x_1 + ix_2)|$ für ein in $\widetilde{U} = \{x + iy \subset \mathbb{C} \mid (x,y) \in U\}$ holomorphe Funktion f. Zeigen Sie, dass u subharmonisch ist.
   Hinweis: Zur Bearbeitung von (b) wird die Cauchysche Integralformel aus der Funktionentheorie benötigt. Daher ist dieser Teil optional.

Abgabe: Mo, 06.11.2017, 12:20 **Besprechung:** 14.–16. November