Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 06.11.2017
Blatt 4

Übungen zu Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

1. (10P) In Aufgabe 3 von Blatt 3 hatten wir gesehen, dass durch $\Phi(y) = -\frac{1}{2}|y|$ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung in einer Veränderlichen gegeben wird.

   (a) (3P) Bestimmen Sie die Greensche Funktion G des Einheitsintervalls.

   (b) (1P) Überprüfen Sie, dass G symmetrisch ist.

   (c) (6P) Sei $f \in C([0,1])$ und sei
   $$u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)dy.$$
   Zeigen Sie direkt, dass u das folgende Randwertproblem löst
   $$\begin{aligned} -u'' &= f \qquad && \text{in }]0,1[, \\ u &= 0 && \text{in } \{0,1\}. \end{aligned}$$

2. (10P) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 \neq 0$ und es sei
   $$u(x,t) = e^{ct}\big(\sin(ax_1) + \sin(bx_2)\big)$$
   eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^2 \times]0,\infty[$. Zeigen Sie, dass $c < 0$.

3. (10P) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass für jede nullstellenfreie Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung $u_{xx} - u_t = 0$ die Funktion
   $$v = a\frac{u_x}{u}$$
   die Burgers-Gleichung $v_t + vv_x - v_{xx} = 0$ löst.

4. (10P) Sei $U = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ und sei $u \in C(\overline{U})$ harmonisch in U und von oben beschränkt. Zeigen Sie
   $$\sup_{x \in U} u(x) = \sup_{x \in \partial U} u(x).$$
   Hinweis: Verwenden Sie das Maximumprinzip für die Funktionen $v_\epsilon(x_1,x_2) = u(x_1,x_2) - \epsilon \ln\big(x_1^2 + (x_2+1)^2\big)$ auf Gebieten der Form $U_R = \{(x_1,x_2) \in U \mid x_1^2 + (x_2+1)^2 < R\}$.

Abgabe: Mo, 13.11.2017, 12:20 **Besprechung:** 21.–23. November