Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 13.11.2017

Blatt 5

Übungen zu Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

1. (a) (5P) Geben Sie alle Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ an, so dass für jede Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$ der Wärmeleitungsgleichung auch die Funktion $v(x,t) = u(ax,bt)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

   (b) (5P) Es sei eine Lösung u des folgenden Randwertproblems gegeben

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \qquad && \text{in }]0,1[\times]0,\infty[\\ u &= 0 && \text{in } \{0,1\}\times]0,\infty[\end{aligned}$$

   Bestimmen Sie damit für $A, B > 0$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0 \qquad && \text{in }]-A,A[\times]-B,\infty[\\ v &= 0 && \text{in } \{-A,A\}\times]-B,\infty[\end{aligned}$$

2. (10P) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

   Verwenden Sie diese Fourierreihe, um den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ zu bestimmen.

3. (*Duhamels Prinzip für den harmonischen Oszillator*) Es sei $\omega > 0$ und es sei $f \in C(\mathbb{R})$.

   (a) (5P) Bestimmen Sie für jedes $s \ge 0$ die Lösung v_s der Anfangswertaufgabe

$$v_s'' + \omega^2 v_s = 0, \quad v_s(s) = 0, \quad v_s'(s) = f(s).$$

   (b) (5P) Setzen Sie für $t > 0$

$$u(t) = \int_0^t v_s(t)\,ds.$$

   Zeigen Sie, dass u in $]0,\infty[$ die folgende Anfangswertaufgabe für den harmonischen Oszillator löst

$$u'' + \omega^2 u = f, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

4. (10P) (*Harnacksche Ungleichung*) Sei $n \ge 2$ und sei $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B}_R(0))$ harmonisch in $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit $u(x) \ge 0$ für alle $x \in \partial B_R(0)$. Zeigen Sie für alle $x \in B_R(0)$

$$R^{n-2}\frac{R - |x|}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \le u(x) \le R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}u(0).$$

   Hinweis: Verwenden Sie die Poisson-Formel für die Kugel zusammen mit der folgenden Ungleichung (welche sofort aus der Dreiecksungleichung für den Nenner folgt)

$$\frac{|y|^2 - |x|^2}{(R+|x|)^n} \le \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} \le \frac{|y|^2 - |x|^2}{(R-|x|)^n}, \qquad x \in B_R(0),\ y \in \partial B_R(0).$$

Abgabe: Mo, 20.11.2017, 12:20 **Besprechung:** 28.–30. November