Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 20.11.2017
Blatt 6

Übungen zu Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

1. (10P) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: Es gibt $a \in \mathbb{R}$, so dass für jede reellwertige Lösung $u \in C^3(U \times]0,\infty[)$ der Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$ auch die Funktion $v(x,t) := \langle x, \nabla u \rangle + atu_t$ die Wärmeleitungsgleichung löst.

   Hinweis: Man kommt nicht um die Bestimmung von a herum.

2. (10P) Bestimmen Sie alle Funktionen der Form $u(x,t) = v(x)w(t)$ mit $v \in C^2(]0,1[)$ und $w \in C^2(]0,\infty[)$, welche das folgende Randwertproblem lösen

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \qquad && \text{in }]0,1[\times]0,\infty[\\ u &= 0 && \text{in } \{0,1\} \times]0,\infty[\end{aligned}$$

3. (10P) Es sei $g \in C([0,1])$ mit $g(0) = g(1) = 0$. Ferner sei

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) h(y)dy,$$

   wobei h die 2-periodische Fortsetzung von

$$x \mapsto \begin{cases} g(x), & 0 \le x \le 1, \\ -g(-x), & -1 \le x < 0, \end{cases}$$

   ist. Zeigen Sie

   (a) (2P) $u(-x,t) = -u(x,t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

   (b) (2P) $u(x+2,t) = u(x,t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

   (c) (6P) u löst das Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \qquad && \text{in }]0,1[\times]0,\infty[\\ u &= 0 && \text{in } \{0,1\} \times]0,\infty[\\ u &= g && \text{in }]0,1[\times \{0\}. \end{aligned}$$

4. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xy} = 0$$

   (a) (1P) Bestimmen Sie ∇v für $v(x,y) = u(x,y) - u(x,0) - u(0,y)$.

   (b) (6P) Zeigen Sie $\nabla v = 0$.

   (c) (3P) Zeigen Sie: Es gibt Funktionen $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ mit $u(x,y) = F(x) + G(y)$.

Abgabe: Mo, 27.11.2017, 12:20

Besprechung: 5.–7. Dezember