Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 27.11.2017

Blatt 7

Übungen zu Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

1. (10P) Seien $g \in C^2([0,\infty[)$ mit $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ und $h \in C^1([0,\infty[)$ mit $h(0) = h'(0) = 0$. Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangs- und Randwertproblems mit demselben Verfahren wie in der Vorlesung

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in }]0,\infty[\times]0,\infty[\\ u_x &= 0 && \text{in } \{0\} \times]0,\infty[\\ u &= g && \text{in }]0,\infty[\times \{0\} \\ u_t &= h && \text{in }]0,\infty[\times \{0\} \end{aligned}$$

2. (10P) Wir hatten die Poissonsche Formel für die Wellengleichung in zwei Raumdimensionen durch das Verfahren des Dimensionsabstiegs aus der Kirchhoffschen Formel hergeleitet. Zeigen Sie, dass der Dimensionsabstieg von der Poissonschen Formel zur Methode von d'Alembert führt.

   Dazu gehen Sie bitte wie folgt vor: Gegeben seien $g \in C^3(\mathbb{R})$ und $h \in C^2(\mathbb{R})$. Setzen Sie $\overline{g}(y_1, y_2) = g(y_1)$ und $\overline{h}(y_1, y_2) = h(y_1)$. Sei $\overline{u}$ die Lösung von

$$\begin{aligned} \overline{u}_{tt} - \Delta\overline{u} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^2 \times]0,\infty[\\ \overline{u} &= \overline{g} && \text{in } \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ \overline{u}_t &= \overline{h} && \text{in } \mathbb{R}^2 \times \{0\} \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $u(x,t) = \overline{u}(x,0,t)$ die d'Alembert Lösung ist von

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times]0,\infty[\\ u &= g && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\} \\ u_t &= h && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

   Hinweis: $\arcsin \frac{t}{r}$ ist eine Stammfunktion von $t \mapsto (r^2 - t^2)^{-1/2}$.

3. (10P) Sei $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty[)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x,0)$, differenzierbar ist mit $v'(x) = \lim_{t\to 0} u_x(x,t)$.

4. (10P) Sei $h \in C(\mathbb{R}^n)$ und sei $u \in C^3(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[) \cap C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty[)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[, \\ u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \\ u_t &= h && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $v := u_t$ das folgende Anfangswertproblem löst

$$\begin{aligned} v_{tt} - \Delta v &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[, \\ v &= h && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \\ v_t &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

   Hinweis: Es ist klar, dass die Aussage von Aufgabe 3 auch für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $n > 1$ gezeigt werden kann. Dieser Schritt braucht nicht ausgeführt zu werden.

Abgabe: Mo, 04.12.2017, 12:20 **Besprechung:** 12.–14. Dezember