Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 04.12.2017
Blatt 8

Übungen zu Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

1. Bestimmen Sie für die folgenden partiellen Differentialgleichungen, für welche Punkte $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ sie hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch sind. Alle Differentialgleichungen beziehen sich auf Funktionen $u \in C^2(\mathbb{R}^4)$.

   (a) (2P) $u_{xx} + u_{yy} - 2u_{zw} = 0$

   (b) (2P) $2u_{xz} + u_{yw} = u,$

   (c) (2P) $u_{xx} + u_{yy} + 4u_{zz} + u_{ww} + 4u_{xz} - 2u_{yw} = 1,$

   (d) (6P) $u_{xx} + u_{yy} + x\, u_{zz} + y\, u_{ww} + 2u_{zw} = 0$

2. (10P) Es sei $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die charakteristischen Gleichungen für die homogene Transportgleichung und lösen Sie damit das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j} &= 0, && \text{in } \mathbb{R}^n \times \left]0, \infty\right[, \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

3. Für $\gamma > 1$ ist $u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$ die poröse-Medien-Gleichung.

   (a) (3P) Ist die poröse-Medien-Gleichung quasi-linear, semilinear oder voll nichtlinear?

   (b) (7P) Beim Separationsansatz in 13.2 der Vorlesung hatten wir für den x-abhängigen Teil den Ansatz $w(x) = |x|^\alpha$ gemacht. Bekommt man zusätzliche Lösungen, wenn man stattdessen den Ansatz $w(x) = b|x|^\alpha$, $b > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ macht?

4. Für $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger sei u die in Theorem 11.2 bestimmte Lösung des folgenden Anfangswertproblems für die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \left]0, \infty\right[\\ u &= g && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\} \\ u_t &= h && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

   Ferner seien

$$k(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)^2 dx$$
$$p(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t)^2 dx.$$

   (a) (5P) Zeigen Sie, dass $k(t) + p(t)$ konstant ist.

   (b) (5P) Zeigen Sie, dass es ein $T > 0$ gibt, so dass $k(t) = p(t)$ für alle $t \geq T$.

Abgabe: Mo, 11.12.2018, 12:20 **Besprechung:** 19.–21. Dezember