Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 11.12.2017

Blatt 9

Übungen zu Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

1. Die *Eikonalgleichung* ist die voll nichtlineare partielle Differentialgleichung $|\nabla u|^2 = 1$.

   (a) (3P) Auf $U := \mathbb{R} \times]-1, \infty[$ soll die Eikonalgleichung zusammen mit der Randbedingung
   $$u(y_1, -1) = \frac{1}{1 + y_1^2}, \quad (y_1, -1) \in \Gamma := \partial U$$
   betrachtet werden. Bestimmen Sie alle zulässigen Tripel (q, z, y) mit $y \in \Gamma$. Welche davon sind nicht-charakteristisch?

   (b) (7P) Betrachten Sie nun die Eikonalgleichung auf $U := \{(x_1, x_2) | x_2 > x_1^2\}$ zusammen mit der Randbedingung
   $$u(y_1, y_2) = \frac{1}{1 + y_1^2}, \quad (y_1, y_2) \in \Gamma := \partial U.$$
   Bestimmen Sie alle zulässigen Tripel (q, z, y) mit $y \in \Gamma$. Welche davon sind nicht-charakteristisch?

2. (10P) Bestimmen Sie für $U := \mathbb{R} \times]-1, \infty[$ die Lösung der Randwertaufgabe
   $$|\nabla u|^2 = 1 \qquad \text{in } U,$$
   $$u(y, -1) = \frac{1}{1 + y^2} \qquad (y, -1) \in \partial U$$
   mit der Methode der Charakteristiken.

   Hinweis: Die Kompatibilitätsgleichungen haben zwei Lösungen. Bei beiden führt die Methode der Charakteristiken nur zu einer lokalen Lösung. Aber eine dieser lokalen Lösungen kann zu einer Lösung in U fortgesetzt werden.

3. (10P) Betrachten Sie für $U := \mathbb{R} \times]0, \infty[$ und $g \equiv 1$ die Randwertaufgabe
   $$u_{x_1} = x_2 \qquad \text{in } U,$$
   $$u = g \qquad \text{in } \Gamma := \partial U.$$
   Dann sind alle Tripel (q, z, x) mit $x \in \Gamma$ charakteristisch (also nicht nicht-charakteristisch). Lösen Sie trotzdem die charakteristischen Gleichungen für x und skizzieren Sie die gefundenen Wege. Warum führt die Methode der Charakteristiken in diesem Fall nicht zu einer Lösung der Differentialgleichung?

4. (10P) Es sei $d > 0$ und es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Ferner seien zwei Funktion $u, v \in C^2(U)$ gegeben, welche das partielle Differentialgleichungssystem
   $$u_t + u_x = d(v - u),$$
   $$v_t - v_x = d(u - v)$$
   erfüllen. Zeigen Sie, dass sowohl u als auch v die *Telegrafengleichung*
   $$w_{tt} + 2dw_t - w_{xx} = 0$$
   erfüllen.

Abgabe: Mo, 18.12.2017, 12:20 **Besprechung:** 9.–11. Januar