Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2017/18

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines

Wiederholung. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^{|\alpha|}(U)$. Dann bezeichnet man mit $D^\alpha u$ die partielle Ableitung

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Bezeichnung 1.1. Häufig hat man es mit den drei Raumvariablen x, y, z und der Zeitvariable t zu tun. Dann drückt man partielle Ableitungen nach einer dieser Variablen dadurch aus, dass man die Variable als Index an die Funktion setzt.

Beispielsweise ist der *Laplace-Operator* in n Variablen definiert als

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

In drei Raumdimensionen schreibt man ihn

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Definition 1.2. Eine *partielle Differentialgleichung* der Ordnung k ist eine Gleichung der Form

$$F\Big(D^{\alpha^{(1)}} u(x), \ldots, D^{\alpha^{(N)}} u(x), x\Big) = 0,$$

wobei F eine Funktion in $N + 1$ Veränderlichen ist und $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(N)}$ Multiindices sind mit $\max_{j=1,\ldots,N} |\alpha^{(j)}| = k$. Die Funktion u ist die gesuchte Lösung, sie heißt *starke Lösung*, wenn u von der Klasse C^k ist. Vorerst sind wir nur an starken Lösungen interessiert. Je nach Situation werden später auch schwächere Regularitätsanforderungen gestellt.

Eine System von endlich vielen partiellen Differentialgleichungen bezeichnet man als partielles Differentialgleichungssystem.

Bezeichnung 1.3. Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)$$

heißt *linear*. Im Fall $f \equiv 0$ heißt sie *homogen linear,*, ansonsten bezeichnet man f als *Inhomogenität* der Differentialgleichung.

Wenn die $a_\alpha(x)$ nicht von x abhängen, dann sagt man, dass die lineare Differentialgleichung konstante Koeffizienten besitzt.

Bezeichnung 1.4. (a) Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0\left(D^{\beta^{(1)}}u(x), \dots, D^{\beta^{(N)}}u(x), x\right) = 0$$

heißt *semilinear*, vorausgesetzt $|\beta^{(j)}| < k$ for alle j.

(b) Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\left(D^{\beta_\alpha^{(1)}}u(x), \dots, D^{\beta_\alpha^{(N\alpha)}}u(x), x\right) D^\alpha u + a_0\left(D^{\gamma^{(1)}}u(x), \dots, D^{\gamma^{(N)}}u(x), x\right) = 0$$

heit *quasilinear*, vorausgesetzt alle $|\beta_\alpha^{(j)}| < k$ und alle $|\gamma^{(j)}| < k$.

(c) Alle anderen partiellen Differentialgleichungen bezeichnet man als *voll nichtlinear.*

Beispiel 1.5. (a) Die *Transportgleichung* lautet

$$u_t + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j} = 0,$$

wobei $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ (also konstant) sind.

(b) Die *Laplace-Gleichung* lautet

$$\Delta u = 0.$$

(c) Die *Wärmeleitungsgleichung* (engl. *heat equation*) lautet

$$u_t - \Delta u = 0.$$

Die Wärmeleitungsgleichung wird auch Diffusionsgleichung genannt.

(d) Die Wellengleichung lautet

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

Die Differentialgleichungen (a)–(d) sind linear mit konstanten Koeffizienten. (a) ist von erster Ordnung, (b)–(d) von zweiter.

(e) Die *Zakharov-Kuznetsov Gleichung* lautet

$$u_t + \alpha(t) u\, u_x + \beta(t) u_{xxx} + \gamma(t) u_{xyy} = 0.$$

Diese Gleichung ist semilinear von dritter Ordnung.

(f) Die *Eikonalgleichung* lautet

$$|\nabla u| = 1.$$

Sie ist voll nichtlinear von erster Ordnung.

(g) Die *Navier-Stokes Gleichungen* lauten

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t), \qquad i = 1,2,3,$$
$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

Es handelt sich um ein semilineares partielles Differentialgleichungssystem. Gesucht sind dabei u_1, u_2, u_3 und p. Ferner ist $\nu > 0$ eine vorgegebene Konstante und die f_i sind Funktionen. Eine offene Frage ist, ob es eine glatte Funktion f gibt, so dass keine Lösung der Navier-Stokes Gleichung für alle $t > 0$ erklärt ist.

Diese Frage ist ein Clay Millenium Problem

http://www.claymath.org/millennium-problems/navier%E2%80%93stokes-equation.

2 Die Transportgleichung

Bei der Transportgleichung in unserem Sinn handelt es sich um

$$u_t + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \tag{2.1}$$

wobei $b \in \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times]0, \infty[)$ gesucht wird.

Der Name Transportgleichung stammt aus dem Buch von Evans.

Satz 2.1. *Die C^1-Lösungen von (2.1) auf $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ sind genau die Funktionen der Form*

$$u(x,t) = w(x - tb),$$

wobei $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung 2.2. Eine Aufgabe der Form

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} &= f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

bezeichnet man als *Anfangswertproblem.* Dabei ist die zweite Zeile zu verstehen als

$$\lim_{t \searrow 0} u(x,t) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Im Fall der homogenen Gleichung, also für $f \equiv 0$, haben wir im Satz gesehen, dass $u(x,t) = g(x - bt)$ die einzige Lösung des Anfangswertproblems ist.

Satz 2.3. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Obermenge von $\mathbb{R}^n \times [0, \infty[$. Für gegebene Funktionen $f \in C^1(U)$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ besitzt das Anfangswertproblem (2.2) eine eindeutig bestimmte Lösung. Sie hat die Gestalt*

$$u(x,t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s-t)b, s)ds.$$

Die Vertauschbarkeit von Ableitung und Integral regelt Satz 9.7 der Analysis III im WS 16/17. Wir brauchen außerdem noch den folgenden Satz.

Satz 2.4. *Es sei $f \in C^1(]a,b[^2)$. Für beliebiges $c \in]a,b[$ setzt man $F(t) = \int_c^t f(t,s)ds$. Dann ist F differenzierbar und es gilt*

$$F'(t) = f(t,t) + \int_c^t \frac{\partial f}{\partial t}(t,s)ds.$$

3 Die Laplace-Gleichung

Motivation. u sei die Wärme in einem Gebiet U. Am Rand des Gebietes liegt eine unveränderliche Wärmeverteilung f vor. Es habe sich eine stationäre, also zeitunabhängige Lösung eingestellt. Dann löst u das folgende *Randwertproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad && \text{in } U, \\ u &= f && \text{in } \partial U. \end{aligned}$$

Definition 3.1. Die partielle Differentialgleichung $\Delta u = 0$ heißt *Laplace-Gleichung*, die zugehörige inhomogene Gleichung $-\Delta u = f$ heißt *Poisson-Gleichung.* Die Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ bezeichnet man als *harmonische Funktionen.*

Bemerkung. (a) Wir hatten in der Funktionentheorie gesehen, dass Real- und Imaginärteil von holomorphen Funktionen harmonisch sind.

(b) Das Vorzeichen bei der Poisson-Gleichung wird gewählt, weil der Operator $-\Delta$ positiv im Sinne der Funktionalanalysis ist. (D. h. alle seine Eigenwerte sind ≥ 0.)

Wir beginnen mit $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und suchen radialsymmetrische Lösungen der Laplace-Gleichung.

Bemerkung 3.2. Gesucht Lösung u von $\Delta u = 0$ der Form $u(x) = v(|x|)$. Beachte

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_j} = \frac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_j}{|x|}.$$

Also

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = v'(|x|)\frac{x_j}{|x|}$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = v''(|x|)\frac{x_j^2}{|x|^2} + v'(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_j^2}{|x|^3}\right).$$

Damit erhalten wir

$$\Delta u(x) = v''(|x|) + v'(|x|)\frac{n-1}{|x|}.$$

Daher ist u genau dann in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung, wenn

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

Das ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung in v''. Wir erhalten

$$v(r) = \begin{cases} C_1 \ln r + C_2, & n = 2, \\ \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2, & n \geq 3. \end{cases}$$

Definition 3.3. Die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln(|x|), & n = 2, \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

ist die *Fundamentallösung* der Laplace-Gleichung in n-Dimensionen. Hierbei ist $\alpha(n)$ das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Aus der Analysis III wissen wir $\alpha(3) = \frac{4}{3}\pi$.

Die Wahl der Vorfaktoren wird später einsichtig. Die Fundamentallösung ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Man kann die Fundamentallösung nutzen, das Poisson-Problem im ganzen $\mathbb{R}^n$ zu lösen. Um das zu tun, benötigen wir die Greenschen Formeln.

4 Die Greenschen Formeln

Wir verwenden den Nabla-Operator $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Mit $\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n u_j \overline{v}_j$ wird das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$ bezeichnet.

Theorem 4.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit glattem Rand. Seien $f, g \in C^2(\overline{U})$. Dann*

(a)

$$\int_U f \, \Delta \overline{g} \, d\lambda_n = -\int_U \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d\lambda_n + \int_{\partial U} f \, \langle \nabla \overline{g}, \nu \rangle \, d\sigma.$$

(b)

$$\int_U (f \, \Delta g - g \, \Delta f) d\lambda_n = \int_{\partial U} (f \, \langle \nabla g, \nu \rangle - g \, \langle \nabla f, \nu \rangle) \, d\sigma.$$

Wir haben die Greenschen Formeln komplexwertig hingeschrieben, weil das später gelegentlich benötigt wird.

Wir werden die Greenschen Formeln auf den Satz von Stokes aus der Analysis III zurückführen. Zuerst müssen die auftretenden Begriffe wiederholt werden.

Bezeichnung. Mit $\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \leq 0\}$ bezeichnen wir den linken Halbraum. Sein Rand ist $\partial \mathbb{R}^k_- = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 = 0\}$.

Definition 4.2 (vgl. Analysis III, Def. 15.20). Eine beschränkte, offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist *glatt berandet,* wenn es zu jedem $a \in \partial U$ offene Mengen $V, W \subset \mathbb{R}^n$ sowie einen Diffeomorphismus $\varphi \colon W \to V$ gibt, so dass

(a) $a \in V$,

(b) $\varphi(\mathbb{R}^n_- \cap W) = \overline{U} \cap V$,

(c) $\varphi(\partial \mathbb{R}^n_- \cap W) = \partial U \cap V$.

Bemerkung 4.3. Unter den Voraussetzungen von Definition 4.2 ist ∂U eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Für $a \in \partial U$ wird eine lokale Parametrisierung von ∂U der Form $\psi \colon \widetilde{W} \to \widetilde{V}$ gegeben durch

$$\widetilde{W} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} \middle| (0, x) \in W \right\}, \quad \widetilde{V} = V \cap \partial U, \quad \psi(x) = \varphi(0, x).$$

Satz 4.4 (Analysis III, Lemma 20.5). *Es gibt ein Borelmaß* σ *auf* ∂U, *so dass*

$$\int f \, d\sigma = \int_{\widetilde{W}} (f \circ \psi) \sqrt{\det\left((D\psi)^T (D\psi)\right)} d\lambda^{n-1},$$

für alle Wahlen von Punkten $a \in \partial U$, *lokalen Parametrisierungen* $\psi \colon \widetilde{W} \to \widetilde{V}$ *wie in der Bemerkung und Borel-messbaren Funktionen* f *mit Träger in* $\widetilde{V}$.

Bezeichnung 4.5. Unter den Voraussetzungen von Definition 4.2 bezeichnen wir für ein $a \in \partial U$ mit $T_a(\partial U)$ den zugehörigen Tangentialraum und mit

$$N_a(\partial U) := \{v \in \mathbb{R}^n | \forall w \in T_a(\partial U) : v \perp w\}$$

den Normalenraum an ∂U im Punkt a.

Der Normalenraum ist eindimensional und besitzt daher genau zwei Elemente der Länge 1, nämlich die *innere* und die *äußere Einheitsnormale.* Wir bezeichnen die äußere Einheitsnormale mit ν.

Satz 4.6. *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *glatt berandet, offen und beschränkt, es sei* V *eine offene Obermenge von* $\overline{U}$ *und es sei*

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} F_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{4.1}$$

eine in V *definierte* $(n-1)$*-Form von der Klasse* C^1. *Dann gilt*

$$\int_{\partial U} \omega = \int_{\partial U} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma,$$

wobei $\langle F, \nu \rangle = \sum_{j=1}^{n} F_j \nu_j$.

Beweis. Zu jedem $a \in \partial U$ gibt es eine Umgebung V von der Form $V = V_1 \times I \times V_2$, wobei I ein Intervall ist, so dass

$$U \cap V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V | x_k < g(x_1, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_n)\}.$$

für eine glatte Funktion g. Da der Rand kompakt ist, wird er von endlich vielen solchen Mengen überdeckt. Indem wir ω mittels einer Zerlegung der Eins zerschneiden, können wir uns auf den Fall beschränken, dass der Träger von ω in V liegt.

In der Nähe von a haben wir also die folgende Karte

$$\varphi^{-1} \colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \big(x_k - g(x_1, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n\big).$$

Die zugehörige lokale Parametrisierung ist

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) = \big(y_2, \ldots, y_k, y_1 + g(y_2, \ldots, y_n), y_{k+1}, \ldots, y_n\big).$$

Sie impliziert die folgende lokale Parametrisierung des Randes

$$\psi(y_2, \dots, y_n) \mapsto \big(y_2, \dots, y_k, g(y_2, \dots, y_n), y_{k+1}, \dots, y_n\big).$$

Wenn wir jetzt die Form mit ψ zurückziehen, dann versehen wir den $\mathbb{R}^{n-1}$ mit den Koordinaten $(y_2, \dots, y_n)$. Damit gilt für $j = k$

$$d\psi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\psi_k} \wedge \dots d\psi_n = dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Das ist die Volumenform. Für $j < k$ gilt

$$\begin{aligned} &d\psi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\psi_j} \wedge \dots \wedge d\psi_n \\ &\quad = dy_2 \wedge \dots \wedge dy_j \wedge dy_{j+2} \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial y_{j+1}} dy_{j+1}\right) \wedge dy_{k+1} \wedge \dots \wedge y_n \\ &\qquad = (-1)^{1+j-k} \frac{\partial g}{\partial y_{j+1}}\, dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n. \end{aligned}$$

Für $j > k$ erhält man

$$d\psi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\psi_j} \wedge \dots \wedge d\psi_n = (-1)^{1+j-k} \frac{\partial g}{\partial y_j} dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$\psi^*(\omega) = (-1)^k \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial g}{\partial y_{j+1}} F_j \circ \psi - F_k \circ \psi + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j} f_j \circ \psi \right) dy_2 \wedge \dots \wedge y_n.$$

Als nächstes müssen wir prüfen, ob die lokale Parametrisierung φ positiv ist. Dazu benötigen wir $\det D_\varphi$, wobei

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{\partial g}{\partial y_2} & \frac{\partial g}{\partial y_3} & \frac{\partial g}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial g}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die herausgehobene Zeile die k-te ist. Bringt man diese Matrix auf Zeilenstufenform, so sieht man sofort, dass $\det D_\varphi = (-1)^{k-1}$. Per Definition (siehe §19 der Analysis III aus dem WS 16/17) ist dann $(-1)^{k-1}\psi$ eine positive lokale Parametrisierung und daher

$$\int_{\partial U} \omega = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial g}{\partial y_{j+1}} F_j \circ \psi - F_k \circ \psi + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j} f_j \circ \psi \right) d\lambda^{n-1}(y_2, \dots, y_n).$$

Nun bestimmen wir die äußere Normale. Wir betrachten dazu in ∂U die Kurvein $\gamma_j(t) = te_j + g(te_j)e_k$, $j \neq k$. Für jede von ihnen ist $\gamma_j'(0) = e_j + \frac{\partial g}{\partial y_{j+1}} e_k$ ein Tangentialvektor. Ein äußerer Einheitsvektor wird gegeben durch

$$\widetilde{\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial y_2} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g}{\partial y_k} \\ 1 \\ -\frac{\partial g}{\partial y_{k+1}} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Den äußeren Einheitsnormalenvektor erhält man durch Division durch die Norm. Zum Schluss müssen wir noch das äußere Maß bestimmen. Dazu benötigen wir

$$D_\psi = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \frac{\partial g}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial y_k} & \frac{\partial g}{\partial y_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial y_n} \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Den Faktor $\det\big((D_\psi)^T(D_\psi)\big)$ bestimmen wir mit der Formel von Binet-Cauchy (siehe Satz 20.7 der Analysis III, aber ohne Beweis). Es gilt nämlich $\det\big((D_\psi)^T(D_\psi)\big) = \sum_{k=1}^n (\det A_j)^2$, wobei A_j alle $(n-1)\times(n-1)$-Unterdeterminanten von D_ψ durchläuft. Man bringt die A_j auf Zeilenstufenform und sieht dann, dass

$$\det\big((D_\psi)^T(D_\psi)\big) = 1 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_j}\right)^2.$$

Da diese Zahl gleich $\|\widetilde{\nu}\|^2$ ist, haben wir die Behauptung gezeigt. □

Definition 4.7. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Eine Funktion $f \in C(\overline{U})$ liegt in $C^k(\overline{U})$, wenn ihre Einschränkung $\widetilde{f} = f|_U$ in $C^k(U)$ liegt und alle Ableitungen $D^\alpha \widetilde{f}$ mit $|\alpha| \leq k$ eine stetige Fortsetzung nach $\overline{U}$ besitzen. Eine Abbildung liegt in $C^k(\overline{U}, \mathbb{R}^m)$, wenn alle Komponenten in $C^k(\overline{U})$ liegen.

Theorem 4.8 (Divergenzsatz). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine glatt berandete, beschränkte, offene Menge.*

(a) Es sei $f \in C^1(\overline{U})$. Dann gilt für $j = 1, \ldots, n$

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_j} d\lambda^n = \int_{\partial U} f \nu_j d\sigma,$$

wobei ν_j die j-te Komponente der äußeren Einheitsnormalen ist.

(b) Es sei $u \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$*. Dann gilt*

$$\int_U \operatorname{div} u \, d\lambda^n = \int_{\partial U} \langle u, \nu \rangle \, d\sigma.$$

Eine Variante des Divergenzsatzes für C^1-Polyeder findet man als Theorem 20.3 in der Analysis III von Kaballo.

Satz 4.9 (Partielle Integration). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine glatt berandete, beschränkte, offene Menge und seien* $f, g \in C^1(\overline{U})$*. Dann gilt für* $j = 1, \dots, n$

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_j} g \, d\lambda_n = -\int_U f \frac{\partial g}{\partial x_j} d\lambda_n + \int_{\partial U} f g \, \nu_j \, d\sigma.$$

Korollar 4.10. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine glatt berandete, beschränkte, offene Menge und sei* $f \in C^2(\overline{U})$*. Dann gilt*

$$\int_U \Delta f \, d\lambda_n = \int_{\partial U} \frac{\partial f}{\partial \nu} d\sigma.$$

Wir setzen $B_r^{(n)}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n | |x - y| < r\}$. In der Regel wird die Dimension nicht notiert.

Beispiel 4.11. Sei $F(x) = x$ für $x \in \ R^n$. Dann gilt $\operatorname{div} F(x) = n$ für alle x und daher

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(B_R(0)) = \frac{1}{n} \int_{B_R(0)} \operatorname{div} F \, d\lambda_n &= \frac{1}{n} \int_{\partial B_R(0)} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma \\ &= \frac{1}{n} \int_{\partial B_R(0)} \langle r\nu, \nu \rangle \, d\sigma = \frac{r}{n} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma. \end{aligned}$$

Also ist das Oberflächenmaß der $(n-1)$-Sphäre vom Radius r gleich

$$\int_{\partial B_R(0)} d\sigma = \frac{n}{R} \operatorname{vol} B_R(0) = n R^{n-1} \alpha(n).$$

5 Anwendung der Fundamentallösung

Satz 5.1 (Abstrakte Polarkoordinaten). *Für ein* $R > 0$ *sei* $f \in C(B_R(0) \setminus \{0\}) \cap L^1(B_R(0))$. *Dann gilt*

$$\int_{B_R(0)} f \, d\lambda_n = \int_0^R \int_{\partial B_r(0)} f \, d\sigma \, dr.$$

Satz 5.1 ist ein Spezialfall der Koflächenformel (siehe Evans, Appendix C, Theorem 5).

Die in §3 bestimmte Fundamentallösung bezeichnen wir nun mit Φ, also

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|), & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

Lemma 5.2. *Für jedes* $R > 0$ *gilt* $\Phi \in L^1(B_R(0)$.

Definition 5.3. Für $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bezeichnet man $\operatorname{Supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}}$ als *Träger* von f. Für offenes $U \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet man mit $C_c^k(U)$ den Raum aller Funktionen von der Klasse C^k deren Träger kompakt ist und in U liegt.

Theorem 5.4. *Sei* $n \geq 2$ *und sei* $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. *Für* $x \in \mathbb{R}^n$ *setze*

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y| f(y) d\lambda_2(y), & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} d\lambda_n(y), & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *und* u *löst die Poisson-Gleichung*

$$-\Delta u = f.$$

Bemerkung. (a) Man beachte, dass $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) * \Phi(y-x) d\lambda_n(y) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(y-x) * \Phi(x)$ und dass $\Delta\Phi(x) = 0$ für $x \neq 0$. Das zeigt, dass bei diesem Integral der Laplace-Operator nicht mit dem Integral vertauscht.

(b) Die Voraussetzung, dass f von der Klasse C^2 sein soll, kann abgeschwächt werden.

6 Die Mittelwertseigenschaft

Theorem 6.1 (Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $u\colon U \to \mathbb{R}$ *harmonisch. Ferner sei* $\overline{B}_r(x) \subset U$. *Dann*

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1} n\alpha(n)} \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma$$

und

$$u(x) = \frac{1}{r^n \alpha(n)} \int_{B_r(x)} u \, d\lambda_n.$$

Satz 6.2. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $u \in C^2(U)$. *Falls* u *die Mittelwerteigenschaft*

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1} n\alpha(n)} \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma$$

besitzt, so ist u *harmonisch.*

Wiederholung. Ein metrischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es in ihm höchstens zwei Mengen gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind (nämlich $\emptyset$ und X).

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $M \subset X$ ist genau dann offen in X, wenn es eine offene Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $M = G \cap X$, und M ist genau dann abgeschlossen in X, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $M = A \cap X$.

Theorem 6.3 (Starkes Maximumprinzip). *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und zusammenhängend. Es sei* $u \in C^2(U)$ *harmonisch in* U *(d. h.* $\Delta u(x) = 0$ *für alle* $x \in U$*). Falls es ein* $x_0 \in U$ *gibt, so dass* $u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$, *so ist* u *konstant.*

Korollar 6.4. *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt und es sei* $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ *harmonisch in* U. *Dann nimmt* u *ihr Maximum in* ∂U *an.*

Die beiden Formulierungen des Maximumprinzips gelten auch, wenn man Maximum durch Minimum erstetzt.

Bezeichnung 6.5. Das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, && \text{in } U,\\ u &= g, && \text{in } \partial U. \end{aligned}$$

heißt *Randwertproblem.*

Satz 6.6. *Für beschränktes, offenes U gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ des Randwertproblems 6.5.*

Bemerkung 6.7. Wie in Bemerkung 15.8 der Analysis I zeigt man, dass die Funktion

$$\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

von der Klasse C^∞ ist. Dabei wird C so gewählt, dass $\int_{\mathbb{R}^n} = 1$. Für $\epsilon > 0$ setzt man

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Dann $\eta_\epsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{Supp}(\eta_\epsilon) = \overline{B}_\epsilon(0)$, $\eta_\epsilon(x) \geq 0$ für alle x und $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon d\lambda_n = 1$.

Satz 6.8. *Sei U offen im $\mathbb{R}^n$ und sei u harmonisch in U. Dann $u \in C^\infty(U)$.*

7 Greensche Funktion

Wir wollen das Randwertproblem 6.5 mittels der Fundamentallösung Φ lösen. Nach Theorem 5.4 wird für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung u der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ gegeben durch $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\Phi(y-x)d\lambda_n(y)$.

Lemma 7.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $u \in C^2(U)$. Dann gelten für alle $x \in U$*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y)\left\langle \nabla_y\Phi(y-x), \nu(y)\right\rangle d\sigma(y) = -u(x),$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B_\epsilon(x)} \Phi(y-x)\left\langle \nabla u(y), \nu(y)\right\rangle d\sigma(y) = 0.$$

Wir zeigen zuerst eine Variante von Theorem 5.4 mit Rand.

Satz 7.2. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Für $u \in C^2(\overline{U})$ gilt für alle $x \in U$*

$$u(x) = \int_{\partial U}\left(\Phi(y-x)\left\langle \nabla u, \nu\right\rangle - u(y)\left\langle \nabla_y\Phi(y-x), \nu\right\rangle\right) d\sigma(y) \\ - \int_U \Phi(y-x)\Delta u(y)d\lambda_n(y).$$

Beweis. Wähle $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B}_\epsilon(x) \subset U$ und setze $V_\epsilon = U \setminus \overline{B}_\epsilon(x)$. Dann

$$\int_U \Phi(y-x)\Delta u(y)d\lambda_n(y) = I_1 + I_2$$

mit

$$I_1 = \int_{V_\epsilon} \Phi(y-x)\Delta u(y)d\lambda_n(y)$$
$$I_2 = \int_{B_\epsilon(x)} \Phi(y-x)\Delta u(y)d\lambda_n(y).$$

Wegen $u \in C^2(U)$ und Lemma 5.2 ist der Integrand von I_2 integrierbar und aus dem Lebesgueschen Grenzwertsatz folgt die Konvergenz von I_2 gegen 0. Bei der Berechnung von I_1 verwenden wir die erste Greensche Formel, beachten, dass die äußere Einheitsnormale an $\partial B_\epsilon(x)$ die negative der äußeren Einheitsnormalen an V_ϵ ist, und erhalten $I_1 = I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7$ mit

$$I_3 = \int_{V_\epsilon} \Delta\Phi(x-y)u(y)d\lambda_n(y) = 0,$$
$$I_4 = \int_{\partial U} \Phi(y-x)\left\langle \nabla u(y), \nu\right\rangle d\sigma(y),$$

$$I_5 = -\int_{\partial B_\epsilon(x)} \Phi(y-x)\,\langle \nabla u(y), \nu\rangle \, d\sigma(y),$$
$$I_6 = -\int_{\partial U} u(y)\,\langle \nabla \Phi(y-x), \nu\rangle \, d\sigma(y),$$
$$I_7 = \int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y)\,\langle \nabla \Phi(y-x), \nu\rangle \, d\sigma(y).$$

I_4 und I_6 tauchen in der Behauptung auf. Nach Lemma 7.1 konvergiert I_5 gegen 0 und I_7 gegen $-u(x)$. □

Definition 7.3. Ein *Gebiet* ist eine offene, zusammenhängende Menge im $\mathbb{R}^n$.

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Falls für jedes $x \in U$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^x(y) &= 0 && \text{in } U \\ \varphi^x(y) &= \Phi(y-x) && \text{in } \partial U \end{aligned}$$

eine Lösung $\varphi^x \in C^2(\overline{U})$ besitzt, so bezeichnet man die Funktion

$$G\colon \{(x,y) \in U^2 \mid x \neq y\} \to \mathbb{R}, \qquad G(x,y) = \Phi(y-x) - \varphi^x(y)$$

als *Greensche Funktion* von U.

Bemerkung. Wir werden später die Forderung an die Randregularität der Greenschen Funktion etwas abschwächen müssen.

Satz 7.4. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, welches eine Greensche Funktion G besitzt. Ferner sei $u \in C^2(\overline{U})$ eine Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \textit{in } U \\ u &= g && \textit{in } \partial U. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in U$

$$u(x) = -\int_{\partial U} g(y)\,\langle \nabla_y G(x,y), \nu\rangle \, d\sigma(y) + \int_U G(x,y) f(y) d\lambda_n(y).$$

Satz 7.5 (Symmetrie der Greenschen Funktion). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, welches eine Greensche Funktion G besitzt. Dann gilt $G(x,y) = G(y,x)$ für alle $x, y \in U$ mit $x \neq y$.*

Beweis. Für $z \in U \setminus \{x,y\}$ setze $u(z) = G(x,z)$ und $w(z) = G(y,z)$. Für $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B}_\epsilon(x) \cap \overline{B}_\epsilon(y) = \emptyset$, setze $V_\epsilon = U \setminus (B_\epsilon(x) \cup B_\epsilon(y))$. Anwendung von Theorem 4.1(b) auf u und w ergibt

$$0 = \int_{V_\epsilon} (u\Delta w - w\Delta u) d\lambda_n = I_1 + I_2 + I_3$$

mit

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\partial U} (u \langle \nabla w, \nu \rangle - w \langle \nabla u, \nu \rangle) \, d\sigma, \\
I_2 &= \int_{\partial B_\epsilon(x)} (u \langle \nabla w, \nu \rangle - w \langle \nabla u, \nu \rangle) \, d\sigma, \\
I_3 &= \int_{\partial B_\epsilon(y)} (u \langle \nabla w, \nu \rangle - w \langle \nabla u, \nu \rangle) \, d\sigma.
\end{aligned}
$$

Wegen $u = w = 0$ in ∂U verschwindet I_1. Wir teilen I_2 weiter auf als $I_2 = I_4 + I_5$ mit

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int_{\partial B_\epsilon(x)} u \langle \nabla w, \nu \rangle \, d\sigma(y), \\
I_5 &= -\int_{\partial B_\epsilon(x)} w \langle \nabla u, \nu \rangle \, d\sigma(y).
\end{aligned}
$$

Wegen $w \in C^2(\overline{B}_\epsilon(x))$ existiert $C_1 > 0$, so dass $|\nabla w(z)| \leq C_1$ für alle $z \in \overline{B}_\epsilon(x)$. Da $\varphi^x \in C^2(\overline{U})$, existiert $C_2 > 0$, so dass $|\varphi^x(z)| \leq C_2$ für alle $z \in \overline{U}$. Wir erhalten im Fall $n \geq 3$

$$
\begin{aligned}
|I_4| &\leq C_1 \int_{\partial B_\epsilon(x)} |u| d\sigma \leq C_1 \int_{\partial B_\epsilon(x)} |\Phi(x-z)| d\sigma(z) + C_1 \int_{\partial B_\epsilon(x)} |\varphi^x(z)| d\sigma(z) \\
&\leq \frac{C_1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B_\epsilon(x)} \frac{1}{|y-x|^{n-2}} d\sigma + C_1 C_2 \int_{\partial B_\epsilon(x)} d\sigma = C_1 \epsilon + C_1 C_2 \epsilon^{n-1} \to 0.
\end{aligned}
$$

Im Fall $n = 2$ gilt dasselbe mit analogem Beweis. Wir schreiben $I_5 = I_6 + I_7$ mit

$$
\begin{aligned}
I_6 &= -\int_{\partial B_\epsilon(x)} w \langle \nabla \Phi(y-x), \nu \rangle \, d\sigma, \\
I_7 &= \int_{\partial B_\epsilon(x)} w \langle \nabla \varphi^x(z), \nu \rangle \, d\sigma.
\end{aligned}
$$

Aus Lemma 7.1 folgt die Konvergenz von I_6 gegen $w(x)$. Da der Integrand von I_7 stetig in $U \setminus \{y\}$ ist, existiert $C_3 > 0$, so dass

$$
|I_7| \leq C_3 \int_{\partial B_\epsilon(x)} d\sigma \to 0.
$$

Bisher haben wir gezeigt, dass $I_2 \to w(x)$. Da man analog sieht, dass $I_3 \to -u(y)$, folgt $G(x,y) = w(x) = u(y) = G(y,x)$. □

Bemerkung 7.6. Der *Halbraum* ist $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Die *Spiegelung* am Rand bildet $x \in \mathbb{R}^n_+$ ab auf $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$. Damit lässt sich leicht eine Funktion $\varphi^x \colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ finden mit

$$
\begin{aligned}
\Delta \varphi^x(y) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\
\varphi^x(y) &= \Phi(y-x) && \text{in } \partial \mathbb{R}^n_+
\end{aligned}
$$

nämlich $\varphi^x(y) = \Phi(y - \widetilde{x})$.

Die Funktion $\Phi(y - x) - \Phi(y - \widetilde{x})$ wird gelegentlich als Greensche Funktion des Halbraums bezeichnet, obwohl der Halbraum unbeschränkt ist und deswegen keine Greensche Funktion im engeren Sinn besitzt.

Bezeichnung 7.7. Die *Spiegelung an der Einheitssphäre* bildet $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ab auf

$$\widetilde{x} = \frac{x}{|x|^2}.$$

Satz 7.8. *Die Greensche Funktion der Einheitskugel ist*

$$G(x,y) = \begin{cases} \Phi(x-y) - \Phi\big(|x|(y - \widetilde{x})\big), & x \neq 0, \\ \Phi(y) - \Phi(1,0,\ldots,0), & x = 0. \end{cases}$$

Definition 7.9. Sei $n \geq 2$. Die Funktion

$$K(x,y) = \frac{r^2 - |x|^2}{rn\alpha(n)|x-y|^n}, \qquad x \in B_r^{(n)}(0),\ y \in \partial B_r^{(n)}(0),$$

heißt *Poisson-Kern* für $B_r^{(n)}(0)$.

Lemma 7.10. *Für* $n \geq 2$, $x \in B_1(0)$, $y \in \partial B_1(0)$ *und* ν *die äußere Einheitsnormale an* $B_1(0)$ *in* y *gilt*

$$\langle \nabla_y G(x,y), \nu \rangle = -K(x,y).$$

Der Poisson-Kern ist harmonisch in $B_1(0)$ *bezüglich der Variablen* x.

Satz 7.11. *Es seien* $n \geq 2$ *und es sei* K *der Poisson-Kern. Für* $g \in C(\partial B_1(0))$ *setze*

$$u(x) = \int_{\partial B_1(0)} g(y) K(x,y) d\sigma(y).$$

Dann löst u *das Randwertproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \textit{in } B_1(0) \\ u &= g && \textit{in } \partial B_1(0) \end{aligned}$$

Lemma 7.12. *Es sei* $u \in C^2(\overline{B}_1(0))$. *Dann gilt*

$$\int_{\partial B_r^{(n)}(0)} u\left(\frac{x}{r}\right) d\sigma = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_1^{(n)}(0)} u(x)\, d\sigma.$$

Theorem 7.13 (Poissonsche Formel für die Kugel). *Es seien* $n \geq 2$ *und* $r > 0$ *und es sei* K *der Poisson-Kern. Für* $g \in C(\partial B_r(0))$ *setze*

$$u(x) = \int_{\partial B_r(0)} g(y) K(x,y) d\sigma(y).$$

Dann löst u *das Randwertproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \textit{in } B_r(0) \\ u &= g && \textit{in } \partial B_r(0) \end{aligned}$$

Bemerkung. (a) Ein Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} \Delta u &= -f && \text{in } U \\ u &= g && \text{in } \partial U \end{aligned}$$

bezeichnet man als *Dirichlet-Problem* für die Poisson-Gleichung. Ein Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} \Delta u &= -f && \text{in } U \\ \langle \nabla u, \nu \rangle &= g && \text{in } \partial U \end{aligned}$$

ist ein *Neumann-Problem.*

(b) In Courant/Hilbert, "Methoden der Mathematischen Physik I" werden Greensche Funktionen für andere Gebiete konstruiert, nämlich für Rechteck, Quader und Kreisring.

8 Die Wärmeleitungsgleichung

Definition 8.1. Die partielle Differentialgleichung

$$u_t - \Delta u = 0$$

ist die *homogene Wärmeleitungsgleichung*, die Gleichung

$$u_t - \Delta u = f$$

ist die *inhomogene Wärmeleitungsgleichung*. Statt Wärmeleitungsgleichung sagt man auch *Diffusionsgleichung*.

Dabei gilt die Vereinbarung, dass t die Zeitvariable ist und Δ nur auf die Raumvariablen wirkt.

Definition 8.2. Die Funktion $\Phi\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

heißt *Fundamentallösung* für die Wärmeleitungsgleichung.

Lemma 8.3. $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\})$. *Ferner gilt* $\Phi_t - \Delta\Phi = 0$ *in* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$.

Lemma 8.4. *Für jedes* $t > 0$ *gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) d\lambda_n(x) = 1.$$

Definition 8.5. Eine *Anfangswertproblem* (*Cauchy-Problem*) für die Wärmeleitungsgleichung ist eine Aufgabe der Form

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[) \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

Dabei ist die letzte Zeile zu verstehen als

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(\xi,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u(x,t) = g(\xi) \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Theorem 8.6. *Für* $g \in C(\mathbb{R}^n)$ *beschränkt setze*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)\,d\lambda_n(y).$$

Dann $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$ *und* u *löst das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u &= g && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

Bemerkung. Man beachte, dass die Lösung des Anfangswertproblems unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit zeigt.

Theorem 8.7. *Sei* $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$, *so dass* $\sup\{|f(x,t)| \mid x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t \le T\} < \infty$ *für jedes* $T > 0$. *Für* $t > 0$ *sei*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)\,d\lambda_n(y)\,ds.$$

Dann liegt u *in* $C^2(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$ *und ist Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \textit{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

Korollar 8.8. *Sei* $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$, *so dass* $\sup\{|f(x,t)| \mid x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t \le T\} < \infty$ *für jedes* $T > 0$, *und sei* $g \in C(\mathbb{R}^n)$ *beschränkt. Dann löst*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)\,d\lambda_n(y) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)\,d\lambda_n(y)\,ds$$

das inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta v &= f && \textit{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u &= g && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

9 Etwas Fourieranalysis

In diesem Kapitel werden einige Ergebnisse über Fourierreihen ohne Beweis zusammengetragen. Theorem 9.3 wird in der Einführung in die Funktionalanalysis gezeigt.

Wie immer bezeichnet $\mathbb{K}$ einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 9.1. Es sei $1 \leq p < \infty$.

(a) Für $I \subseteq \mathbb{Z}$ setzen wir

$$\ell^p(I) = \left\{ (b_k)_{k \in I} \,\middle|\, b_k \in \mathbb{C}, \sum_{k \in I} |b_k|^p < \infty \right\}$$

Wir schreiben ℓ^p anstelle von $\ell^p(\mathbb{N})$.

(b) Für eine Borelmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$L^p(U) = \left\{ f\colon U \to \mathbb{K} \,\middle|\, \int_U |f|^p d\lambda_n < \infty \right\}$$

.

Definition 9.2. (a) Man versieht $\ell^p(I)$ mit der Norm

$$\|(b_k)_{k \in I}\|_p = \left(\sum_{k \in I} |b_k|^p \right)^{1/p}$$

und $L^p(U)$ mit der Norm

$$\|f\|_p = \left(\int_U |f|^p d\lambda_n \right)^{1/p}.$$

Der Satz von Riesz-Fischer (siehe Satz 12.10 der Analysis III) sagt aus, dass $\ell^p(I)$ und $L^p(U)$ Banachräume sind.

(b) Wenn man $\ell^2(I)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle (b_k)_{k \in I}, (c_k)_{k \in I} \rangle = \sum_{k \in I} b_k \overline{c}_k$$

versieht, dann ist $\ell^2(I)$ ein Hilbertraum.

(c) Analog wird $L^2(U)$ durch das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_U f\,\overline{g}\,d\lambda_n$$

zu einem Hilbertraum.

Theorem 9.3. *Für* $f \in L^2([0,1])$ *setze*

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i k x}\,d\lambda_1(x), && k \in \mathbb{Z}, \\ a_k &= \int_0^1 f(x)\cos(2\pi k x)\,d\lambda_1(x), && k \in \mathbb{N}_0, \\ b_k &= \int_0^1 f(x)\sin(2\pi k x)\,d\lambda_1(x), && k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann gelten

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}, \\ f(x) &= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi k x) \end{aligned}$$

im L^2*-Sinn. Insbesondere sind linke und rechte Seite nur* λ_1*-fast überall gleich.*

Theorem 9.4 (Satz von Fejér). *Sei* $f \in L^1([0,1])$. *Die* 1*-periodische Fortsetzung von* f *sei stetig in* x. *Dann gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n e^{2\pi i n x} = f(x).$$

Beispiel 9.5. Für $x \in [0,1]$ setze

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$$

Dann $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_{2j} = 0$ für $j \neq 0$ und $c_{2j+1} = \frac{-2}{\pi^2(2j+1)^2}$ für $j \in \mathbb{N}_0$. Wegen Theorem 9.3 gilt

$$f(x) = \frac{1}{2} - 4\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(2j+1)^2}\cos(2\pi(2j+1)x) \tag{9.1}$$

im L^2-Sinn. Für jedes x sagt der Satz 9.4 von Fejér erstmal folgendes aus

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{N} \left(1 - \frac{2j+1}{2N+1}\right) \frac{-4}{\pi^2(2j+1)^2}\cos(2\pi(2j+1)x) \right).$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (9.1) ist der zusätzliche Term in der Fejér-Reihe nicht erforderlich. Setzt man beispielsweise $x = \frac{1}{2}$ ein, so bekommt man

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

10 Die Wärmeleitungsgleichung, Teil II

Bemerkung 10.1. Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Randbedingungen. Es sei $U =]0,1[$. Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in }]0,1[\times]0,\infty[\\ u &= 0 && \text{in } \{0,1\} \times]0,\infty[\end{aligned}$$

Ansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ führt zu

$$v''(x)w(t) = v(x)w'(t)$$

also gibt es eine Konstante C mit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)} = C$$

Die Randbedingung führt zu $v(0) = v(1) = 0$.

Fall $C = 0$: Dann $v(x) = ax + b$. Das ist nur für $a = b = 0$ mit den Randbedingungen vereinbar.

Fall $C > 0$: Dann $v(x) = ae^{\sqrt{C}x} + be^{-\sqrt{C}x}$. Die Randbedingungen führen zu $a + b = 0$ und $ae^{\sqrt{C}} + be^{-\sqrt{C}} = 0$, also $a = b = 0$.

Fall $C < 0$. Sei $\omega = \sqrt{-C} > 0$. Dann $v(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$. Die Randbedingungen führen zu $a = 0$ und $b\sin(\omega) = 0$. Für $\omega \in \pi\mathbb{N}$ erhalten wir nicht-triviale Lösungen der Randwertaufgabe

$$u(x,t) = \sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}.$$

In der Funktionalanalysis werden wir den folgenden Satz zeigen:

Satz 10.2. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und es sei $m \in \mathbb{N}$. Dann wird durch*

$$\|f\|_{C^m(\overline{U})} = \sup_{x \in U} \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x) \right|$$

eine Norm auf $C^m(\overline{U})$ gegeben, durch die $C^m(\overline{U})$ zu einem Banachraum wird.

Für $|\alpha| \leq m$ ist der Differentialoperator D^α stetig von $C^m(\overline{U})$ nach $C^{m-|\alpha|}(\overline{U})$.

Lemma 10.3. *Für $a \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} \right) e^{iay} dy = 2\sqrt{\pi t} e^{iax - a^2 t}.$$

Satz 10.4. *Für* $g \in C([0,1])$ *mit* $g(0) = g(1) = 1$ *gebe es eine Folge* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, *so dass* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) = g(x)$. *Dann konvergiert die Reihe*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}$$

für jede Wahl von $0 < t_1 < t_2$ *in* $C^2([0,1] \times [t_1, t_2])$ *und löst das Anfangs- und Randwertproblem*

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in }]0,1[\times]0,\infty[&& \\ u &= 0 && \text{in } \{0,1\}\times]0,\infty[&& \textit{Randbedingung} \\ u &= g && \text{in }]0,1[\times\{0\} && \textit{Anfangsbedingung} \end{aligned}$$

Die *Spur* $\operatorname{tr} M$ einer quadratischen Matrix M ist gleich der Summe ihrer Diagonaleinträge. Die Spur ist invariant unter Basiswechseln. Daher ist sie gleich der Summe der Eigenwerte.

Wenn $w\colon U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 ist, so bezeichnen wir mit H_w ihre Hessematrix. Offenbar gilt $\Delta w = \operatorname{tr} H_w$.

Lemma 10.5. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $w \in C^2(U)$. *Für* $x_0 \in U$ *gelte* $\nabla w(x_0) = 0$ *und* $\Delta w(x_0) > 0$. *Dann existiert* $v \in \mathbb{R}^n$, *so dass die Funktion* $t \mapsto w(x_0 + tv)$ *in* 0 *ein striktes lokales Minimum besitzt.*

Theorem 10.6 (Maximumprinzip). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt, sei* $u \in C^2(U \times]0,\infty[) \cap C(\overline{U} \times [0,\infty[)$ *eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung* $u_t - \Delta u = 0$. *Dann gilt für jedes* $T > 0$

$$\max\{u(x,t) \mid x \in \overline{U} \text{ und } 0 \le t \le T\} = \max\{u(x,t) \mid (x \in \partial U \text{ und } t \le T) \text{ oder } t = 0\}.$$

Korollar 10.7 (Eindeutigkeit). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt, seien* $u, v \in C^2(U \times]0,\infty[) \cap C(\overline{U} \times [0,\infty[)$ *Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung. Es sei* $u(x,0) = v(x,0)$ *für alle* $x \in \overline{U}$, *und für ein* $T > 0$ *gelte* $u(x,t) = v(x,t)$ *für alle* $x \in \partial U$, $t \in [0,T]$. *Dann stimmen* u *und* v *in* $\overline{U} \times [0,T]$ *überein.*

Die Aussage, dass Randwerte für Zeiten $t > T$ die Lösung zu Zeiten $t < T$ nicht beeinflussen, entspricht der Kausalität in der physikalischen Welt.

Korollar 10.8 (Stabilität). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt, seien* $h^{(1)}, h^{(2)} \in C(\partial U \times [0,\infty[)$ *und* $g^{(1)}, g^{(2)} \in C(\overline{U} \times \{0\})$. *Für alle* $(x,t) \in \partial U \times [0,\infty[$ *gelte* $|h^{(1)}(x,t) - h^{(2)}(x,t)| \le \epsilon$ *und für alle* $x \in \overline{U}$ *gelte* $|g^{(1)}(x,0) - g^{(2)}(x,0)| \le \epsilon$. *Falls es für* $j = 1,2$ *jeweils eine Lösung* $u^{(j)} \in C^2(U \times (0,\infty)) \cap C(\overline{U} \times [0,\infty))$ *von*

$$\begin{aligned} u_t^{(j)} + \Delta u^{(j)} &= 0 && \text{in } U \times]0,\infty[\\ u^{(j)} &= h^{(j)} && \text{in } \partial U \times]0,\infty[\\ u^{(j)} &= g^{(j)} && \text{in } U \times \{0\}, \end{aligned}$$

gibt, so gilt $|u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)| \le \epsilon$ *für alle* $(x,t) \in \overline{U} \times [0,\infty[$.

Definition 10.9. (a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und es sei $T > 0$. Dann ist $U_T = U \times]0, T]$ der *parabolische Zylinder* über U und $\Gamma_T = \overline{U}_T \setminus U_T$ der *parabolische Rand* von U_T.

(b) Eine Funktion $u\colon U_T \to \mathbb{R}$ liegt in $C^2_1(U_T)$, wenn u, u_t und die Raumableitungen erster und zweiter Ordnung in $C(U_T)$ liegen.

Theorem 10.10 (Maximumprinzip für das Cauchyproblem). *Es sei* $u \in C^2_1(\mathbb{R}^n \times]0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ *eine Lösung von*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, && \textit{in } \mathbb{R}^n \times]0, T], \\ u &= g, && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{aligned}$$

für eine beschränkte, stetige Funktion $g \in C(\mathbb{R}^n)$. *Ferner gebe es* $a, A > 0$, *so dass*

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T].$$

Dann gilt

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Korollar 10.11 (Eindeutigkeitssatz für das Cauchyproblem). *Seien* $g \in C(\mathbb{R}^n)$ *und* $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ *gegeben. Dann existiert höchstens eine Lösung* $u \in C^2_1(\mathbb{R}^n \times]0, T]]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ *des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f, && \textit{in } \mathbb{R}^n \times]0, T], \\ u &= g. && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{aligned}$$

welche für irgendwelche $a, A > 0$ *die Wachstumsbedingung*

$$|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2}$$

erfüllt.

Im Buch von John wird in §7.1 ein Beispiel angegeben (von Tychonoff), welches zeigt, dass man auf die Wachstumsbedingung nicht verzichten kann.

Definition 10.12. Die Differentialgleichung $u_t + \Delta u = 0$ heißt *Rückwartsdiffusionsgleichung.*

Bemerkung 10.13. (a) Sei $T > 0$. Wenn u eine Lösung des folgenden Anfangs- und Randwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung ist

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \text{in } U \times]0, T[\\ u &= 0 && \text{in } \partial U \times]0, T[\\ u &= g && \text{in } U \times \{0\}, \end{aligned}$$

dann ist $v(x,t) = u(x, T-t)$ eine Lösung des folgenden Anfangs- und Randwertproblems für die Rückwartsdiffusionsgleichung

$$\begin{aligned} v_t + \Delta v &= 0 && \text{in } U \times]0,T[\\ v &= 0 && \text{in } \partial U \times]0,T[\\ v(x,0) &= u(x,T) && \text{in } U \times \{0\}, \end{aligned}$$

(b) Eine Lösung von

$$\begin{aligned} v_t + \Delta v &= 0 && \text{in }]0,1) \times (0,T[\\ v &= 0 && \text{in } \{0,1\} \times]0,T[\\ v(x,0) &= \sin(k\pi x) && \text{in }]0,1[\times \{0\}, \end{aligned}$$

ist $v(x,t) = \sin(k\pi x)e^{k^2\pi^2 t}$.

Definition 10.14. Eine partielle Differentialgleichung zusammen mit Anfangs- und/oder Randbedingungen bezeichnet man als *korrekt gestellt*, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind

(a) Lösbarkeit: Es gibt mindestens eine Lösung

(b) Eindeutigkeit: Es gibt höchstens eine Lösung

(c) Stabilität: Die Lösung hängt stetig von den Anfangs- bzw. Randbedingungen ab

Ein Problem, welches mindestens eine der drei Bedingungen verletzt, heißt *schlecht gestellt*.

Bemerkung 10.15. (a) Alles drei hat natürlich nur einen Sinn, wenn man sich für Anfangs- und Randbedingungen sowie Lösungen auf Funktionenräune festlegt.

(b) Teil (b) der vorigen Bmerkung zeigt, dass das Anfangs- und Randwertproblem für die Rückwärtsdiffusionsgleichung schlecht gestellt ist.

11 Die Wellengleichung

Definition 11.1. Die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

heißt *Wellengleichung.*

Bemerkung. (a) In einigen Büchern findet man das Zeichen $\Box u = u_{tt} - \Delta u$.

(b) Die Wellengleichung ist von der Ordnung 2 in der Zeit. Man setzt Anfangsbedingungen für u und u_t.

Im Fall $n = 1$ lösen wir nun das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times]0, \infty) \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\} \\ u_t &= h && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

mit der Methode von d'Alembert. Dazu beachtet man

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - u_{xx}.$$

Setzt man also $v = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u$, so gilt

$$v_t + v_x = 0.$$

Das ist eine Transportgleichung. Nach Satz 2.1 gibt es also eine Funktion a, so dass $v(x,t) = a(x-t)$ für alle x, t. Daraus ergibt sich

$$u_t(x,t) - u_x(x,t) = a(x-t).$$

Dies ist eine inhomogene Transportgleichung. Mit Satz 2.3 ergibt sich für eine vorerst unbekannte Funktion b

$$u(x,t) = b(x+t) + \int_0^t a(x-(s-t)-s)ds = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + b(x+t).$$

Das müssen wir an die Anfangsbedingungen anpassen. Sofort klar ist $b = g$. Für a erhalten wir

$$a(x) = v(x,0) = u_t(x,0) - u_x(x,0) = h(x) - g'(x).$$

Das setzen wir wieder ein und erhalten

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}(h(y)-g'(y))dy + g(x+t) \\ &= \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Theorem 11.2. *Für $g \in C^2(\mathbb{R})$ und $h \in C^1(\mathbb{R})$ löst die Funktion u aus (11.1) die Anfangswertaufgabe*

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R}\times\{0\} \\ u_t &= h && \text{in } \mathbb{R}\times\{0\} \end{aligned}$$

Beispiel 11.3. Die Lösung für $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ und $h = 0$ besteht aus zwei auseinander laufenden Spitzen.

Die Lösung für $g = 0$ und $h = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ besteht aus einem Plateau, welches immer größer wird. Es gilt nämlich

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x-t}^{x+t} e^{-y^2}dy = \frac{1}{4}(\operatorname{erf}(x+t) - \operatorname{erf}(x-t))$$

wobei $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}dy$.

Beispiel 11.4. Seien nun $g \in C^2([0,\infty[)$ mit $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ und $h \in C^1([0,\infty[)$ mit $h(0) = h'(0) = 0$. Wir lösen das Anfangs- und Randwertproblem für die Halbgerade

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in }]0,\infty[\times]0,\infty[\\ u &= 0 && \text{in } \{0\}\times]0,\infty[\\ u &= g && \text{in }]0,\infty[\times\{0\} \\ u_t &= h && \text{in }]0,\infty[\times\{0\} \end{aligned}$$

Für $x \le 0$ definieren wir der Einfachhheit halber $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$. Dann $g \in C^2(\mathbb{R})$ und $h \in C^1(\mathbb{R})$. Wir vermuten, dass die nach links laufende Welle zurückgespiegelt wird, und machen den Ansatz

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy + k(x-t)\right),$$

wobei $k(x) = 0$ für $x \ge 0$. Für $t > 0$ muss gelten

$$0 = u(0,t) = \frac{1}{2}\left(g(t) + \int_0^t h(y)dy + k(-t)\right).$$

Das bedeutet $k(x) = -g(-x) - \int_0^{-x} h(y)dy$, $x < 0$. Dann stimmen alle anderen Bedingungen automatisch. Wir erhalten

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x) + \int_{t-x}^{t+x} h(y)dy\right), & x \le t, \\ \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy\right), & x > t. \end{cases}$$

Aus der Herleitung sieht man, dass $u \in C^2((0,\infty)^2)$.

Nun wollen wir eine Lösung für das Anfangswertproblem in $n = 2$ und $n = 3$ konstruieren. Der erste Schritt ist in allen Dimensionen möglich. Gesucht ist für $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty[)$ von

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u = 0 \quad & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u = g \quad & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \\ u_t = h \quad & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned} \tag{11.2}$$

Bezeichnung 11.5. Für $u \in C(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $r, t > 0$ setze

$$U(x,r,t) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y,t)d\sigma(y).$$

U heißt *sphärisches Mittel* von u.

Lemma 11.6. *Wenn u von der Klasse C^1 bzw. C^2 ist, dann auch U als Funktion von $(x,r,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\times]0,\infty[$. Für jedes $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[$ gilt ferner*

$$\lim_{r \searrow 0} U(x,r,t) = u(x,t),$$

$$U_r(x,r,t) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} \Delta u(y,t)d\sigma(y)ds.$$

Satz 11.7. *Wenn u das Anfangswertproblem (11.2) löst, dann ist für jedes x das sphärische Mittel U Lösung der folgenden* Poisson-Darboux-Gleichung

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0 \qquad & r \in]0,\infty[, t \in]0,\infty[, \\ U = G \qquad & r \in]0,\infty[, t = 0, \\ U_t = H \qquad & r \in]0,\infty[, t = 0, \end{aligned}$$

wobei G und H jeweils die sphärischen Mittel von g und h sind.

Lemma 11.8. *Wenn V dass sphärische Mittel von $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist, dann erfüllt V die* Darbouxsche Gleichung

$$V_{rr} + \frac{n-1}{r}V_r = \Delta V.$$

Um die Poisson-Darboux-Gleichung für $n = 3$ zu lösen, setzen wir $\widetilde{U} = rU$, $\widetilde{G} = rG$ und $\widetilde{H} = rH$. Dann $\widetilde{U}_r = U + rU_r$ und $\widetilde{U}_{rr} = 2U_r + rU_{rr}$ mit entsprechenden Formeln für G und H soweit sinnvoll. Die Poisson-Darboux-Gleichung transformiert sich zu

$$\widetilde{U}_{rr} = r\left(\frac{3-1}{r}U_r + U_{rr}\right) = rU_{tt} = \widetilde{U}_{tt}.$$

Somit ist $\widetilde{U}$ eine Lösung von

$$\begin{aligned}
\widetilde{U}_{tt} - \widetilde{U}_{rr} &= 0 && r \in]0,\infty[, t \in]0,\infty[,\\
\widetilde{U} &= 0 && r = 0, t \in]0,\infty[,\\
\widetilde{U} &= \widetilde{G} && r \in]0,\infty[, t = 0,\\
\widetilde{U}_t &= \widetilde{H} && r \in]0,\infty[, t = 0.
\end{aligned}$$

Diese Aufgabe haben wir in Beispiel 11.4 gelöst. Für $r < t$ gilt nämlich

$$\widetilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{G}(x,r+t) - \widetilde{G}(x,t-r) + \int_{t-r}^{t+r} \widetilde{H}(x,\rho)d\rho\right).$$

Mit Lemma 11.6 folgt

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x,r,t) = \lim_{r\to 0} \frac{\widetilde{U}(x,r,t)}{r} = \widetilde{G}_t(x,t) + \widetilde{H}(x,t). \tag{11.3}$$

Unter Verwendung der Definition des sphärischen Mittels erhält man, wenn man beim letzten Integral beachtet, dass die Substitution $y = \frac{\tilde{y}-x}{t}$ lautet,

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_t(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} g(x+ty)d\sigma(y)\right)\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} g(x+ty)d\sigma(y) + \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} \langle \nabla g(x+ty), y\rangle \, d\sigma(y)\\
&= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} g(y)d\sigma(y) + \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} \langle \nabla g(y), y-x\rangle \, d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\widetilde{H}(x,t) = \frac{t}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} h(y)d\sigma(y)$$

haben wir die Kirchhoffsche Formel hergeleitet.

Theorem 11.9 (Kirchhoffsche Formel). *Sei $n = 3$ und seien $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (11.2) genau eine Lösung. Diese ist gegeben durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} \left(th(y) + g(y) + \langle \nabla g(y), y-x\rangle\right) d\sigma(y).$$

Bemerkung. Wenn $h = 0$ und der Träger von g in der Nähe des Ursprungs konzentriert ist, dann ist für festes t der Träger von $u(x,t)$ in der Nähe von $|x| = t$ konzentriert.

Nun lösen wir das Ausgangsproblem (11.2) für $n = 2$ durch Dimensionsabstieg. Wir setzen dazu

$$\overline{u}(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t)$$

und entprechend für g und h. Wenn u eine Lösung der Wellengleichung in $n = 2$ ist, dann ist $\overline{u}$ eine in $n = 3$. Wegen (11.3) bedeutet das für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \overline{u}(x_1, x_2, 0, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1^{(3)}(0)} g(x_1 + ty_1, x_2 + ty_2)\,d\sigma(y)\right) \\ &\qquad + \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1^{(3)}(0)} h(x_1 + ty_1, x_2 + ty_2)\,d\sigma(y). \end{aligned}$$

Das Flächenelement hatten wir beim Beweis des Satzes 5.1 über die abstrakten Polarkoordinaten bestimmt. Damit erhalten wir durch Integration über beide Halbsphären

$$\int_{\partial B_1^{(3)}(0)} g(x_1 + ty_1, x_2 + ty_2)\,d\sigma(y) = 2\int_{B_1^{(2)}(0)} \frac{g(x + tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}}\,d\lambda_2(z).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1^{(3)}(0)} g(x_1 + ty_1, x_2 + ty_2)\,d\sigma(y)\right) \\ &\quad = \frac{1}{2\pi}\int_{B_1(0)} \frac{g(x + tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}}\,d\lambda_2(z) + \frac{t}{2\pi}\int_{B_1(0)} \frac{\langle \nabla g(x + tz), z\rangle}{\sqrt{1 - |z|^2}}\,d\lambda_2(z) \\ &\quad = \frac{1}{2\pi t}\int_{B_t(x)} \frac{g(y) + \langle \nabla g(y), y - x\rangle}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}\,d\lambda_2(y). \end{aligned}$$

Theorem 11.10 (Poissonsche Formel für das Anfangswertproblem der ebenen Wellengleichung). *Sei $n = 2$ und seien $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (11.2) genau eine Lösung. Diese ist gegeben durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi t}\int_{B_t(x)} \frac{g(y) + th(y) + \langle \nabla g(y), y - x\rangle}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}\,d\lambda_2(y).$$

Bemerkung. (a) Sowohl die Kirchhoffsche als auch die Poissonsche Formel zeigen, dass Wellen sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten.

(b) Wenn $h = 0$ und der Träger von g in der Nähe des Ursprungs konzentriert ist, dann ist i. a. für festes t der Träger von $u(x.t)$ ungefähr gleich der Scheibe $B_t(0)$.

(c) In Evans wird für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Anfangswertproblem auf dem $\mathbb{R}^n$ gelöst. Man beobachtet das *Huygenssche Prinzip*

In ungeraden Dimensionen $n \geq 3$ wirkt die Anfangsbedingung an der Stelle x nur auf die Punkte des Vorwärts-Lichtkegels

$$\{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\mid |y-x|^2 = t^2\}.$$

In geraden Dimensionen werden alle Punkte in

$$\{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\mid |y-x|^2 \leq t^2\}.$$

beeinflusst.

Beispiel 11.11. Sei $h \equiv 0$ und sei $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ radialsymmetrisch, also $g(x) = G(|x|)$ für ein $G \in C^3([0,\infty[)$ mit $G'(0) = G'''(0) = 0$. Wir lösen das Anfangswertproblem (11.2) mit der Kirchhoffschen Formel für den Punkt $x = 0$

$$u(0,t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t(0)} (g(y) + \langle \nabla g(y), y \rangle) \, d\sigma(y).$$

In Bemerkung 3.2 hatten wir gezeigt

$$\nabla g(y) = \frac{G'(|y|)}{|y|} y.$$

Also

$$u(0,t) = G(t) + \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t(0)} G'(|y|)|y| d\sigma(y) = G(t) + tG'(t).$$

Das Phänomen, dass räumlich verstreute Irregularitäten sich zu einer stärkeren Irregularität fokussieren, bezeichnet man als *Kaustik*.

Satz 11.12 (Duhamelsches Prinzip für die Wellengleichung). *Sei $f \in C(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$. Für $s > 0$ sei v^s eine Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$\begin{aligned} v^s_{tt} - \Delta v^s &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times]s,\infty[\\ v^s &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{s\} \\ v^s_t(\cdot,s) &= f(\cdot,s) && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{s\} \end{aligned}$$

Dann ist

$$u(x,t) = \int_0^t v^s(x,t) ds$$

eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \\ u_t &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Forderung, dass v^s die Wellengleichung löst, schließt $v^s \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ein. Welche Regularitätsanforderungen an f zu stellen sind, um diese Regularität von v^s sicherzustellen, hängt von der Dimension ab.

Satz 11.13. *Sei* $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *Dann ist*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_t(x)} \frac{f(y, t - |y-x|)}{|y-x|} d\lambda_3(y)$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \textit{in } \mathbb{R}^3 \times]0, \infty[\\ u &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^3 \times \{0\} \\ u_t &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^3 \times \{0\} \end{aligned}$$

Bemerkung. Den Integranden bzeichnet man als *retardiertes Potenzial.*

12 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Bezeichnung 12.1. Sei

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f$$

eine lineare Differentialgleichung der Ordnung k. Ihr *Symbol* ist die Funktion

$$p_k(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha. \tag{12.1}$$

Im Fall $k = 2$ ist p_2 für festes x eine quadratische Form in ξ

$$p_2(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{j,k}(x)\xi_j\xi_k = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_{1,1}(x) & b_{1,2}(x) & \dots & b_{1,n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1}(x) & b_{n,2}(x) & \dots & b_{n,n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Die quadratische Matrix aus der Gleichung bezeichnen wir mit $B(x)$. Dabei darf ohne Einschränkung $b_{j,k}(x) = b_{k,j}(x)$ angenommen werden. Dann ist $B(x)$ für jedes x symmetrisch und daher reell diagonalisierbar.

Beispiel 12.2. (a) Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ in n-Raumvariablen: Dann ist $B(x)$ für jedes x die negative $n \times n$-Einheitsmatrix.

(b) Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = f$. Die Zeitvariable werde mit x_{n+1} bezeichnet. Dann ist für jedes x die $(n+1) \times (n+1)$-Matrix $B(x)$ gegeben durch

$$B(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wellengleichung $u_t - \Delta u = f$. Es sei wieder x_{n+1} die Zeitvariable. Dann ist für jedes x die $(n+1) \times (n+1)$-Matrix $B(x)$ gegeben durch

$$B(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 12.3. Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden nach den Vorzeichen der Eigenwerte von B geordnet. Die Gleichung (12.1) heißt

- *elliptisch* an der Stelle x, wenn alle Eigenwerte von $B(x)$ dasselbe Vorzeichen haben und $B(x)$ nicht singulär ist,
- *parabolisch* an der Stelle x, wenn $B(x)$ singulär ist und alle von Null verschiedenen Eigenwerte von $B(x)$ dasselbe Vorzeichen haben,
- *hyperbolisch* an der Stelle x, wenn $B(x)$ nicht singulär ist und genau ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die anderen hat.

Eine Differentialgleichungen heißt elliptisch, wenn sie an jeder Stelle elliptisch ist, analog für die anderen Begriffe.

Bemerkung. (a) Nur in $n = 2$ ist das zumindest für jeden Punkt eine Klassifikation.

(b) Literatur für den elliptischen Fall: Gilbarg, D., und Trudinger, N. S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order

Beispiel 12.4. Die Poisson-Gleichung ist elliptisch, die Wärmeleitungsgleichung parabolisch und die Wellengleichung ist hyperbolisch.

Bemerkung. Man vergleiche mit der Klassifikation der Kegelschnitte

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d = 0.$$

Bemerkung 12.5. Je nach Typ der Differentialgleichungen werden unterschiedliche Probleme untersucht:

- hyperbolisch: Anfangswertaufgabe (Cauchy-Problem)
- elliptisch: Randwertprobleme oder Eigenwertprobleme

  Bei einem Eigenwertproblem werden homogene Randbedingungen gestellt und dazu die Eigenwerte bestimmt
- parabolisch: Anfangs- und Randwertprobleme

Beispiel 12.6. Im $\mathbb{R}^2$ sei die Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{xy} + y^2 u_{yy} - u_x = 0$$

gegeben. Um sie zu klassifizieren, muss sie zunächst durch eine symmetrische Matrix B beschrieben werden.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & y^2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det B = y^2 - \frac{1}{4}$. Für $y = \pm\frac{1}{2}$ ist die Differentialgleichung parabolisch, für $|y| > \frac{1}{4}$ elliptisch, und für $|y| < \frac{1}{4}$ ist sie hyperbolisch.

13 Die Poröse-Medien-Gleichung

Definition 13.1. Es sei $\gamma > 1$. Die partielle Differentialgleichung

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = f$$

heißt *poröse-Medien-Gleichung*. Sie ist nur für nicht-negative u erklärt.

Bemerkung 13.2 (Trennung der Variablen). Wir möchten Lösungen der homogenen Gleichung finden und machen dazu den Ansatz

$$u(x,t) = v(t)w(x).$$

Dann

$$\frac{v'(t)}{v^\gamma(t)} = \frac{\Delta w^\gamma(x)}{w(x)}.$$

Diese Größe hängt weder von t noch von x ab. Wir nennen sie μ. Die gewöhnliche Differentialgleichung für v löst man bequem mit dem Verfahren der Variablentrennung und erhält

$$v(t) = ((1-\gamma)\mu t + \lambda)^{1/(1-\gamma)}, \tag{13.1}$$

für beliebiges λ. Damit $v(0)$ erklärt ist, muss λ positiv sein. Bei der partiellen Differentialgleichung für w begnügen wir uns mit einem Ansatz, nämlich $w(x) = |x|^\alpha$.

Wir erhalten die Gleichung

$$\mu|x|^\alpha - \alpha\gamma(\alpha\gamma + n - 2)|x|^{\alpha\gamma-2} = 0.$$

Das bedeutet $\alpha = \alpha\gamma - 2$, also

$$\alpha = \frac{2}{\gamma - 1}$$

und $\mu = \alpha\gamma(\alpha\gamma + n - 2) = (\alpha+2)(\alpha+n) > 0$. Wegen $\mu = \frac{2\gamma(2+n(\gamma-1))}{(\gamma-1)^2}$ erhalten wir schließlich für jedes $\lambda > 0$ die Lösung

$$u(x,t) = \left(\frac{2\gamma(2+n(\gamma-1))}{1-\gamma}t + \lambda\right)^{1/(1-\gamma)} |x|^{2/(\gamma-1)}.$$

Diese Lösung hat einen Blow-Up in endlicher Zeit. Das sieht man schon aus Gleichung (13.1).

Bemerkung 13.3 (Barenblatt-Kompaneetz-Zeldovich-Lösung). Gesucht ist eine Lösung u, die auf die folgende Weise invariant unter Dilatationen ist

$$u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t), \lambda > 0.$$

Wenn es so eine Lösung gibt, dann können wir $\lambda = \frac{1}{t}$ setzen und erhalten

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right).$$

Dieses v nehmen wir als radial an, also $v(y) = w(|y|)$. Mit $y = t^{-\beta}|x|$ gelten

$$u_t(x,t) = -\alpha t^{-\alpha-1} w(t^{-\beta x}) - \beta t^{-\alpha-\beta-1} w'(t^{-\beta|x|})|x| = -\alpha t^{-\alpha-1} w(y) - \beta t^{-\alpha-1} w'(y) y$$

und

$$\Delta(u^\gamma(x,t)) = t^{-\alpha\gamma-2\beta} \Delta(v^\gamma(y)).$$

Um weiter machen zu können, verlangen wir $\alpha + 1 = \alpha\gamma + 2\beta$. Den Laplace-Operator in Polarkoordinaten haben wir auch schon ausgerechnet. Also

$$\alpha w + \beta y w' + (w^\gamma)'' + \frac{n-1}{y} (w^\gamma)' = 0.$$

BKZ haben jetzt folgendes gesehen: Wenn man $\alpha = n\beta$ setzt und die Gleichung mit y^{n-1} erhält man zuerst

$$n\beta y^{n-1} w + \beta y^n w' + y^{n-1} (w^\gamma)'' + (n-1) y^{n-2} (w^\gamma)' = 0.$$

Das ist aber eine Ableitung. Daher

$$\beta \left(y^n w\right)' + \left(y^{n-1} \left(w^\gamma\right)'\right)' = 0.$$

Die Integrationskonstante wird so gewählt, dass die Größen im Unendlichen verschwinden. Dann $\beta y^n w + y^{n-1} (w^\gamma)' = 0$, also

$$(w^\gamma)' = -\beta y w.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\gamma w^{\gamma-1} w' = \gamma w\, w^{\gamma-2} w' = w \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(w^{\gamma-1}\right)'.$$

Also

$$\left(w^{\gamma-1}\right)' = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \beta y$$

und daher

$$w^{\gamma-1} = b - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \beta y^2$$

für beliebiges $b > 0$. Die rechte Seite ist negativ für große y. Für beliebiges $b > 0$ ist die Barenblatt-Kompaneetz-Zeldovich Lösung der poröse-Medien-Gleichung gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{t^\alpha}\left(b - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}\right)^{1/(\gamma-1)}, & |x| < t^\beta\sqrt{\frac{2b\gamma}{\beta(\gamma-1)}}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{n(\gamma-1)+2}, \quad \alpha = n\beta.$$

Dies ist eine *schwache Lösung* der Gleichung.

14 Die Methode der Charakteristiken

Bezeichnung 14.1. In diesem Abschnitt behandeln wir nicht notwendig lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Sie werden geschrieben als

$$F(\nabla u, u, x) = 0 \tag{14.1}$$

wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist und F eine Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U} \to \mathbb{R}.$$

Die Elemente von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U}$ bezeichnen mit (p, z, x). Wir verwenden auch Abkürzungen für den Gradienten

$$\nabla F(p, z, x) = (D_p F, D_z F, D_x F).$$

Beispiel 14.2. (a) Die Transportgleichung gehört in diese Klasse. In diesem Fall war $U = \mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ und $F(p_1, \dots, p_{n+1}, z, x_1, \dots, x_{n+1}) = p_{n+1} + \sum_{j=1}^n b_j p_j$.

(b) Eine voll nichtlineare Gleichung ist $u_{x_1} u_{x_2} = u$. Die zugehörige Funktion ist $F(p_1, p_2, z, x_1, x_2) = p_1 p_2 - z$.

Zusätzlich zu den Daten aus 14.1 sei noch eine Anfangs- bzw. Randbedingung in $\Gamma \subseteq \partial U$ gegeben. Das Ziel der Methode der Charakteristiken besteht darin, die Punkte von U auf solchen Wegen $x(s) = (x^1(s), \dots, x^n(s))$ mit Punkten in Γ zu verbinden, dass die Einschränkung der partiellen Differentialgleichung auf den Weg eine gewöhnliche Differentialgleichung ist.

Für $x(s)$ wie oben setzen wir $z(s) = u(x(s))$ und $p(s) = \nabla u(x(s))$ mit Komponenten $p^j(s)$.

Im folgenden bezeichnen wir die Ableitung nach s durch einen Punkt, also

$$\frac{\partial a}{\partial s} =: \dot{a}.$$

Man differenziert zuerst die Gleichung $p^i(s) = u_{x_i}(s)$ und erhält

$$\dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(x(s)) \dot{x}^j(s).$$

Nun differenziert man die Differentialgleichung nach x^i

$$\sum_{j=1}^n F_{p_j}(\nabla u, u, x) u_{x_j x_i} + F_z(\nabla u, u, x) u_{x_i} + F_{x_i}(\nabla u, u, x) = 0.$$

In diese Gleichung setzen wir den (vorerst unbekannten) Weg ein

$$\sum_{j=1}^{n} F_{p_j}(p(s), z(s), x(s))u_{x_i x_j}(x(s)) + F_z(p(s), z(s), x(s))p^i(s) + F_{x_j}(p(s), z(s), x(s)) = 0.$$

Bis jetzt ist nichts passiert. Jetzt verlangen wir, dass $x(s)$ die folgende gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt

$$\dot{x}(s) = D_p F(p(s), z(s), x(s)), \tag{14.2}$$

dann stimmen die Terme zweiter Ordnung in den letzten beiden Gleichungen überein und wir erhalten

$$\dot{p}^i(s) = -F_{x_i}(p(s), z(s), x(s)) - F_z(p(s), z(s), x(s))p^i(s).$$

Theorem 14.3. *Es sei* $u \in C^2(U)$ *eine Lösung von* (14.1). *Dann erfüllt* $(p(s), z(s), x(s))$ *das folgende gewöhnliche Differentialgleichungssystem*

$$\begin{aligned} \dot{p}(s) &= -D_x F(p(s), z(s), x(s)) - D_z F(p(s), z(s), x(s))p(s), \\ \dot{z}(s) &= \langle D_p F(p(s), z(s), x(s)), p(s) \rangle, \\ \dot{x}(s) &= D_p F(p(s), z(s), x(s)). \end{aligned} \tag{14.3}$$

Definition 14.4. Das Differentialgleichungssystem (14.3) besteht aus den *charakteristischen Gleichungen.*

Beispiel 14.5. Wir betrachten für $U =]0, \infty[^2$, $\Gamma =]0, \infty[\times \{0\}$ und eine beliebige stetige Funktion g auf Γ das folgende lineare Anfangswertproblem mit variablen Koeffizienten

$$\begin{aligned} x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} &= u, && \text{in } U, \\ u &= g, && \text{in } \Gamma. \end{aligned}$$

Dann

$$F(p_1, p_2, z, x_1, x_2) = x_1 p_2 - x_2 p_1 - z.$$

Die charakteristischen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{p} &= (p_1 - p_2, p_1 + p_2), \\ \dot{z}(s) &= \langle (-x_2, x_1), (p_1, p_2) \rangle = z, \\ \dot{x}(s) &= (-x_2, x_1). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung für x kennen wir. Ihre Lösung ist

$$x(s) = (x_0 \cos(s + \varphi), x_0 \sin(s + \varphi)).$$

Sei nun $(x_1, x_2) \in U$ vorgegeben. Ein Weg von Γ nach (x_1, x_2) wird gegeben durch

$$x(s) = \big(|(x_1, x_2)| \cos s, |x| \sin s\big), \quad s \in \left[0, \arctan \frac{x_2}{x_1}\right].$$

Der Anfangswert ist $g(|(x_1, x_2)|)$. Da wir die Differentialgleichung für z im Kopf lösen können, erhalten wir

$$u(x^1, x^2) = g(|(x_1, x_2)|)e^{\arctan \frac{x_2}{x_1}}.$$

Die Differentialgleichung für p braucht in diesem Fall nicht gelöst zu werden.

Bemerkung 14.6 (Allgemeine quasilineare Differentialgleichung erster Ordnung). Die allgemeine quasilineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die Gestalt

$$F(\nabla u, u, x) = \langle b(x, u(x)), \nabla u(x)\rangle + c(x, u(x)) = 0,$$

für gegebene Funktionen $b\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $c\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, also $F(p, z, s) = \langle b(x, z), p\rangle + c(x, z)$. Die charakteristische Gleichung für x hat dann die Gestalt

$$\dot{x}(s) = b(x(s), z(s))$$

und die für z hat die Gestalt

$$\dot{z}(s) = \langle b(x(s), z(s)), p(s)\rangle = -c(x(s), z(s)).$$

Die Differentialgleichung für p braucht wieder nicht gelöst zu werden.

Beispiel 14.7. Sei $U = \mathbb{R} \times]0, \infty[$ und $\Gamma = \mathbb{R} \times \{0\}$ und sei $g \in C^1(\mathbb{R})$. Gesucht ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{x_1} + u_{x_2} &= u^2 && \text{in } U,\\ u &= g && \text{in } \Gamma. \end{aligned}$$

Wir haben also $b = (1, 1)$ und $c(x, z) = -z^2$. Die relevanten charakteristischen Gleichungen sind

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(s) &= 1,\\ \dot{x}^2(s) &= 1,\\ \dot{z}(s) &= z^2. \end{aligned}$$

Das löst man mit der Methode der getrennten Variablen. Wenn man $x(0) \in \Gamma$ fordert, kann man eine Integrationskonstante bestimmen. Man erhält

$$\begin{aligned} x^1(s) &= x^0 + s,\\ x^2(s) &= s,\\ z(s) &= \frac{z^0}{1 - sz^0}. \end{aligned}$$

Sei nun $(x_1, x_2) \in U$ geben. Setzt man $x^0 = x_1 - x_2$, so gelten $x(0) = (x^0, 0)$ sowie $x(x_2) = (x_1, x_2)$ und

$$u(x_1, x_2) = z(x_2) = \frac{g(x_1 - x_2)}{1 - x_2 g(x_1 - x_2)}.$$

Der Definitionsbereich dieser Lösung ist die Zusammenhangskomponente von Γ in $\overline{U} \setminus \{(x_1, x_2) | x_2 g(x_1 - x_1) = 0\}$.

Beispiel 14.8. Der voll nichtlineare Fall ist schwieriger, weil man dann die Differentialgleichung für p ebenfalls lösen muss. Im Beispiel sei $U =]0, \infty[\times \mathbb{R}$ und $\Gamma = \{0\} \times \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{x_1} u_{x_2} &= u && \text{in } U, \\ u &= x_2^2 && \text{in } \Gamma. \end{aligned}$$

Das bedeutet $F(p, z, s) = p_1 p_2 - z$. Die charakteristischen Gleichungen sind

$$\begin{aligned} \dot{p}^1 &= p^1, \\ \dot{p}^2 &= p^2, \\ \dot{z} &= \big\langle (p^2, p^1), (p^1, p^2) \big\rangle = 2p^1 p^2, \\ \dot{x}^1 &= p^2, \\ \dot{x}^2 &= p^1. \end{aligned}$$

Man kann sie in dieser Reihenfolge lösen

$$\begin{aligned} p^1(s) &= p_1^0 e^s, \\ p^2(s) &= p_2^0 e^s, \\ z(s) &= z^0 + 2p_1^0 p_2^0 (e^{2s} - 1), \\ x^1(s) &= p_2^0 (e^s - 1), \\ x^2(s) &= x_2^0 + p_1^0 (e^s - 1). \end{aligned}$$

Zusätzlich wissen wir noch $z^0 = \left(x_2^0\right)^2$ aus der Anfangsbedingung.

Wenn $u \in C^1(\overline{U})$, dann können wir Aufgabe 3 von Blatt 7 benutzen und sehen $p_2^0 = 2x_2^0$. Die Differentialgleichung liefert $p_1^0 p_2^0 = z^0 = \left(x_2^0\right)^2$, also $p_1^0 = \frac{1}{2} x_2^0$. Das führt auf

$$\begin{aligned} z(s) &= \left(x_2^0\right)^2 e^{2s}, \\ x^1(s) &= 2x_2^0 \left(e^s - 1\right), \\ x^2(s) &= \frac{x_2^0}{2} \left(e^s + 1\right). \end{aligned}$$

Sei nun $(x_1, x_2) \in U$ gegeben. Dann $x_1 - 4x_2 = -4x_2^0$ durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen und daher $x_2^0 = \frac{4x_2 - x_1}{4}$. Durch Addition dieser Gleichungen bekommt man $x_1 + 4x_2 = 4x_2^0 e^2$, also $e^s = \frac{4x_2+x_1}{4x_2-x_1}$. Schließlich

$$u(x_1, x_2) = \left(\frac{4x_2 - x_1}{4}\right)^2 \left(\frac{4x_2 + x_1}{4x_2 - x_1}\right)^2 = \frac{(x_1 + 4x_2)^2}{16}.$$

Bemerkung 14.9 (Transformation des Randes). Das Gebiet U besitze einen C^1-Rand. Zu jedem $x^0 \in \partial U$ existieren Umgebungen W von x^0 und V von 0 sowie ein C^1-Diffeomorphismus $\Phi\colon W \to V$ mit $\Phi(x^0) = 0$ und $\Phi(W \cap \partial U) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. Wir bezeichnen die Inverse von Φ mit Ψ.

Satz 14.10. *Wenn $u \in C^1(W)$ das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} F(\nabla u, u, x) &= 0 && \text{in } W \cap U,\\ u &= g && \text{in } W \cap \partial U, \end{aligned}$$

löst, dann löst $v = u \circ \Psi$ eine Differentialgleichung erster Ordnung in $V \cap \mathbb{R}^n_+$ mit Anfangsbedingung $v = g \circ \Psi$ in $(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap V$ und umgekehrt.

Im weiteren gehen wir von einem flachen Rand aus, also einem, der in $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ liegt.

Satz 14.11 (Kompatibilitätsbedingungen). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $\Gamma \subset \partial U$ von der Form $\Gamma = W \cap \{x | x_n = 0\}$ für eine offene Menge W und es sei $g \in C^1(\Gamma)$. Es gebe ferner eine Lösung $u \in C^1(\overline{U})$ von*

$$\begin{aligned} F(\nabla u, u, x) &= 0 && \text{in } U,\\ u(x) &= g && \text{in } \Gamma. \end{aligned}$$

Dann existiert zu jedem $x^0 \in \Gamma$ ein $p^0 \in \mathbb{R}^n$, welches die folgenden Kompatibilitätsbedingungen erfüllt

$$\begin{aligned} p_i^0 &= g_{x_i}(x^0), \quad i = 1, \ldots, n-1,\\ F(p^0, g(x^0), x^0) &= 0. \end{aligned}$$

Beispiel 14.12. Für $U = \mathbb{R} \times]0, \infty[$ seien $\Gamma = \partial U$ und $g(x_1, x_2) \equiv 1$. Ferner sei $F(p, z, x) = p_1 p_2 - z$. Wähle $x^0 = (0, 0)$. Dann $g(x^0) = 1$ und $p_1^0 = p_2^0 = 0$, aber $F(p_1^0, p_2^0, g(x^0), x^0) = -1$. Es gibt also keine Lösung der Anfangswertaufgabe.

Definition 14.13. Ein Tripel $(p, z, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U$ mit $z = g(x)$, welches die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt, heißt *zulässig.*

Ein zulässiges Tripel heißt *nicht-charakteristisch,* wenn $F_{p_n}(p, z, x) \neq 0$.

Lemma 14.14. *Es seien* F *von der Klasse* C^2 *und* g *von der Klasse* C^3 *und es sei* (p^0, z^0, x^0) *nicht-charakteristisch. Dann existieren eine Umgebung* V *von* x^0 *in* Γ *und eine eindeutig bestimmte* C^2*-Funktion* $q \colon V \to \mathbb{R}^n$ *mit* $q(x^0) = p^0$*, so dass für alle* $y \in V$ *das Tripel* $(q(y)), g(y), y)$ *zulässig ist.*

Lemma 14.15. *Es seien* F *von der Klasse* C^2 *und* g *von der Klasse* C^3*, es sei* (p^0, z^0, x^0) *nicht-charakteristisch und es sei* q *wie im vorigen Lemma. Für* y *im Definitionsbereich von* q *werde mit* $\big(p(y,\cdot), z(y,\cdot), x(y,\cdot)\big)$ *die Lösung der gewöhnlichen Anfangswertaufgabe*

$$\begin{aligned}
\dot{p}(y,s) &= -D_x F(p(y,s), z(y,s), x(y,s)) - D_z F(p(y,s), z(y,s), x(y,s)) p(y,s),\\
\dot{z}(y,s) &= \langle D_p F(p(y,s), z(y,s), x(y,s)), p(y,s) \rangle\,,\\
\dot{x}(y,s) &= D_p F(p(y,s), z(y,s), x(y,s)),\\
p(y,0) &= q(y),\\
z(y,0) &= g(y),\\
x(y,0) &= y
\end{aligned} \tag{14.4}$$

bezeichnet. Dann existieren ein offenes Intervall I *mit* $0 \in I$*, eine offene Umgebung* W *von* x^0 *in* Γ *und eine offene Umgebung* V *von* x^0 *im* $\mathbb{R}^n$*, so dass die Abbildung*

$$\begin{aligned}
\Phi \colon W \times I &\to V,\\
(y,s) &\mapsto x(y,s),
\end{aligned}$$

ein C^2*-Diffeomorphismus ist.*

Theorem 14.16. *Es sei* $\Phi \colon W \times I \to V$ *wie im Lemma. Für* $\xi \in V$ *setzen wir* $(y(\xi), s(\xi)) = \Phi^{-1}(\xi)$ *und definieren*

$$\begin{aligned}
u(x) &= z(y(\xi), s(\xi)),\\
P(\xi) &= p(y(\xi), s(\xi)).
\end{aligned}$$

Dann ist u *von der Klasse* C^2 *und löst die Differentialgleichung*

$$F(\nabla u(\xi), u(\xi), \xi) = 0, \quad \xi \in V$$

unter der Randbedingung

$$u(\xi) = g(\xi), \quad \xi \in V \cap \Gamma.$$

Im Beweis kommen zweite Ableitungen von u vor. Das ist der Grund für die Differenzierbarkeitsforderungen.

Beispiel 14.17. Wir betrachten in $U = \mathbb{R}\times]-1,\infty[$ und $\Gamma = \partial U$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + 2u &= 0 && \text{in } U, \\ u(y,-1) &= \frac{1}{1+y^2}, && (y,-1) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Das bedeutet $F(p,z,u) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + 2z$. Die erste Kompatibilitätsbedingung ist $q_1(y) = \frac{-2y}{(1+y^2)^2}$. Die zweite ist

$$0 = F(q_1, q_2, z, y, -1) = \frac{-2y^2}{(1+y^2)^2} - q_2 + \frac{2}{1+y^2} = \frac{-q_2(1+y^2)^2 + 2}{(1+y^2)^2}.$$

Das bedeutet $q_2 = \frac{2}{(1+y^2)^2}$.

Weil die Differentialgleichung linear ist, benötigen wir p allerdings nicht. Unter Einsatz der Differentialgleichung bekommen wir $\dot{z} = x_1 p_1 + x_2 p_2 = -2z$, also

$$z = \frac{1}{1+y^2} e^{-2s}.$$

Die charakteristischen Gleichungen für x sind $\dot{x}_1 = x_1$ und $\dot{x}_= x_2$, also

$$\begin{aligned} x_1 &= y e^s, \\ x_2 &= -e^s. \end{aligned}$$

Wir müssen jetzt die Abbildung Φ invertieren. Seien dazu $(\xi_1, \xi_2) \in U$ gegeben. Aus $\xi_2 = -e^s$ folgt $s = \ln(-\xi_2)$ und daraus schließlich $y = \xi_1 e^{-s} = -\xi_1/\xi_2$. Setzt man das in die Formel für z ein, so hat man

$$u(\xi) = z\left(-\frac{\xi_1}{\xi_2}, \ln(-\xi_2)\right) = \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Man beachte, dass wegen $s = \ln(-\xi_2)$ diese Herleitung nur in $\mathbb{R} \times]-1,0[$ gültig ist.

Wir müssen uns den krummlinigen Fall jetzt doch etwas genauer ansehen.

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge mit C^1-Rand und es sei $x \in \partial U$. Ein *Tangentialvektor* an ∂U in x ist ein Vektor der Form $\gamma'(0)$, wenn $\gamma\colon]-\epsilon,\epsilon[\to \partial U$ ein C^1-Weg mit $\gamma(0) = x$ ist. Der Raum aller Tangentialvektoren ist der *Tangentialraum* $T_x(M)$.

Satz 14.18. *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet mit* C^1*-Rand und es sei* $\Gamma \subseteq \partial U$ *offen in* ∂U. *Gegeben sei eine Lösung* $u \in C^1(\overline{U})$ *des Randwertproblems*

$$\begin{aligned} F(\nabla u, u, x) &= 0 && \textit{in } U, \\ u &= g && \textit{in } \Gamma. \end{aligned}$$

Dann existiert zu jedem $x^0 \in \Gamma$ *ein* $p^0 \in \mathbb{R}^n$*, welches die folgenden Kompatibilitätsbedingungen erfüllt*

(a) *für jeden* C^1*-Weg* $\gamma\colon]-\epsilon,\epsilon[\,\to\Gamma$ *mit* $\gamma(0)=x^0$ *gilt*

$$\left\langle p^0,\gamma'(0)\right\rangle=(g\circ\gamma)'(0),$$

(b) $F(p^0,g(x^0),x^0)=0.$

Definition 14.19. Unter den Voraussetzungen von Satz 14.18 bezeichnet man das Tripel $(p^0,g(x^0),x^0)$ als *zulässig.*

Ein zulässiges Tripel heißt *nicht-charakteristisch,* wenn für die äußere Normale ν an ∂U in x^0 gilt

$$\left\langle D_pF(p^0,g(x^0),x^0),\nu\right\rangle\neq 0.$$

Satz 14.20. *Es sei* $\Phi\colon W\to V$ *ein* C^1*-Diffeomorphismus mit* $\Phi(W\cap\partial U)=V\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$ *wie in Bemerkung 14.9. Wenn* $(p^0,g(x^0),x^0)$ *nicht-charakteristisch im Sinne von Definition 14.19 ist, dann kann man den Diffeomorphismus so wählen, dass die zurückgezogene Differentialgleichung nicht-charakteristisch im Sinne von Definition 14.13 ist.*

Beispiel 14.21. Wir haben eine Zeitvariable t, die wir auch als x_{n+1} bezeichnen. Wir setzen $U=\mathbb{R}^n\times\,]0,\infty[$ und $\Gamma=\partial U$. Für ein $F\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$u_t+\operatorname{div}F(u)=0.$$

Die Divergenz wirkt nur auf die Raumvariablen. Die Differentialgleichung kann auch geschrieben werden als

$$u_t+F'(u)\nabla u=0.$$

Wir bezeichnen die Raumzeitvariablen mit $y=(x,t)$ und die zugehörigen Ableitungsvariablen mit $q=(p,p_{n+1})$ und setzen $G(q,z,y)=p_{n+1}+F'(z)p$. Wir stellen für diese quasilineare Differentialgleichung die charakteristischen Gleichungen auf

$$\begin{aligned}\dot{x}^i(s)&=(F^i)'(z(s)), &&\qquad i=1,\dots,n,\\ \dot{x}^{n+1}(s)&=1.\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass wir s und t identifizieren können. Die charakteristische Gleichung für die Zeit ist

$$\dot{z}=\langle F'(p),p\rangle+p_{n+1}=0$$

Das bedeutet

$$u(x^0+F'(g(x^0))t,t)=g(x^0).$$

Es ist keineswegs ausgeschlossen, dass sich zwei solche Geraden schneiden. In diesem Fall existiert i. a. keine starke Lösung in ganz U. Man beachte, dass die Randebedingungen nicht-charakteristisch sind.

15 Distributionskalkül

Bei der Untersuchung linearer Differentialgleichungen ist es häufig nützlich, den Funktionsbegriff zu verallgemeinern.

Definition 15.1. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen setzen wir

$$C_c^\infty(U) = \{\varphi \in C^\infty(U) \mid \operatorname{Supp} \varphi \subset U \text{ und } \operatorname{Supp} \varphi \text{ kompakt}\}.$$

Die Elemente von $C_c^\infty(U)$ heißen *Testfunktionen*. Häufig schreibt man $\mathcal{D}(U)$ für $C_c^\infty(U)$ und $\mathcal{E}(U)$ für $C^\infty(U)$.

In §17 der Analysis III hatten wir gesehen, dass es ausreichend viele Testfunktionen gibt.

Satz 15.2 (Analysis III, Satz 17.3). *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und seien $A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $X \subset A_1 \cup \cdots \cup A_m$. Dann existiert eine der Überdeckung $A_1, \ldots, A_m$ untergeordnete Zerlegung $(g_1, \ldots, g_m)$ der Eins.*

Das bedeutet $g_j \in \mathcal{D}(A_j)$, $g_j \geq 0$ und $\sum_{j=1}^m g_j(x) = 1$ für alle $x \in X$.

Definition 15.3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}(U)$. Sie heißt *konvergent* gegen $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subset U$ gibt, so $\operatorname{Supp} \varphi_j \subset K$ für alle j und für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Folge $\left(\frac{\partial^\alpha \varphi_j}{\partial x^\alpha}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}$ konvergiert.

Wie immer sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 15.4. Ein lineares Funktional $T \colon \mathcal{D}(U) \to \mathbb{K}$ heißt *Distribution*, wenn es folgenstetig ist, wenn also gilt

> Für jede konvergente Folge $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(U)$ mit Grenzwert φ gilt $\lim_{j \to \infty} T(\varphi_j) = T(\varphi)$.

Der Raum aller Distributionen wird mit $\mathcal{D}'(U)$ bezeichnet. Statt $T(\varphi)$ schreibt man $\langle T, \varphi \rangle$.

Beispiel 15.5. (a) Sei μ ein lokal endliches Borelmaß, das heißt ein Borelmaß, so dass $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten K. Dann wirkt μ als Distribution

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int_U \varphi \, d\mu.$$

(b) Ein Spezialfall hiervon ist das *Dirac-Maß* δ_x mit $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$. Bei den Physikern heißt $\delta_0 = \delta$ auch Diracsche Deltafunktion, obwohl δ keine Funktion ist.

(c) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $x \in U$ ist
$$\langle T, \varphi \rangle = \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x)$$
eine Distribution.

Definition 15.6. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine messbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{K}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn für jedes kompakte Teilmenge K von U gilt $\int_K |f| d\lambda_n < \infty$.

Lokal integrierbare Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, werden identifiziert. Der Raum aller lokal integrierbaren Funktionen auf U wird mit $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ bezeichnet.

Bemerkung 15.7. $C(U) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(U)$.

Satz 15.8. $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ *wird durch die folgende Vorschrift nach* $\mathcal{D}'(U)$ *eingebettet*
$$\langle f, \varphi \rangle = \int_U f\varphi, \qquad f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U),\ \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Bemerkung 15.9. Für $f \geq 0$ ist Satz 15.8 ein Spezialfall von Beispiel 15.5 (a), angewandt auf das Maß
$$\mu(B) = \int_B f \, d\mu.$$

Satz 15.10. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Ein lineares Funktional* $T\colon \mathcal{D}(U) \to \mathbb{K}$ *ist genau dann eine Distribution, wenn für jede kompakte Teilmenge* $K \subset U$ *ein* $k \in \mathbb{N}_0$ *und ein* $C > 0$ *existieren, so dass* $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_k$ *für alle* $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ *mit* $\operatorname{Supp} \varphi \subset K$, *wobei* $\|\varphi\|_k = \max\{|\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}| \mid |\alpha| \leq k,\ x \in U\}$.

Bemerkung 15.11. Warum ist $\mathcal{D}(\Omega)$ nicht metrisierbar? (Die Antwort stammt aus math.stackexchange.)

Es sei $(\varphi_j)_j$ eine Folge in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, so dass $\varphi_j(x) = 1$ für $|x| \leq j$ and $\varphi_j(x) = 0$ für $|x| > j + 1$. Angenommen, es gebe eine mit der Vektorraumstruktur verträgliche Metrik d auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem j ein $c_j > 0$, so dass $d(c_j\varphi_j, 0) < \frac{1}{j}$. Also $\lim_{j\to\infty} d(c_j\varphi_j, 0) = 0$, obwohl $(c_j\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ divergiert, weil es keine kompakte Menge K gibt, so dass $\operatorname{Supp} \varphi_j \subseteq K$ für alle j.

Satz 15.12. *Seien* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $T \in \mathcal{D}'(U)$ *und* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. *Dann wird durch*
$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \varphi^{(\alpha)} \right\rangle$$
eine Distribution erklärt. Wir bezeichnen sie als partielle Ableitung *von* T *zum Multiindex* α.

Wenn $f \in C^k(U)$ *und* $|\alpha| \leq k$, *dann ist die* α*-te Ableitung der zu* f *gehörigen Distribution gleich der zu* $f^{(\alpha)}$ *gehörigen Distribution.*

Beispiel 15.13. Wir leiten die Heaviside-Funktion H ab.

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0. \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Für jede Testfunktion φ gilt

$$-\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0).$$

Also $H' = \delta_0$ im Distributionssinn.

Satz 15.14. *Für* $g, h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *wird durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h \, d\lambda_1$$

eine Distributionslösung der eindimensionalen Wellengleichung gegeben.

Satz 15.15. *Es sei* Φ *die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung im* $\mathbb{R}^n$*, also*

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Dann $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\Phi = \delta_0$ *im Distributionssinn.*

Bemerkung 15.16. Wenn $L(x, D)$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten ist, dann bezeichnet man jede Distribution Φ mit $L(x,D)\Phi = \delta_0$ als *Fundamentallösung.*

Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle gf, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (gf)\varphi \, d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} f(g\varphi) \, d\lambda_1 = \langle f, g\varphi \rangle .$$

Daher definieren wir:

Definition 15.17. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T \in \mathcal{D}'(U)$ und sei $g \in C^\infty(U)$. Dann definieren wir die Distribution gT durch

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle .$$

Definition 15.18. Eine Folge $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}'(U)$ konvergiert genau dann gegen $T \in \mathcal{D}'(U)$, wenn für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle .$$

Bemerkung. Damit ist die Topologie auf $\mathcal{D}'(U)$ nicht komplett beschrieben (siehe Meise und Vogt, Beispiel 24.37).

Satz 15.19. *Für* $j \in \mathbb{N}$ *sei* $T_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *die durch die* L^1_{loc}*-Funktion*

$$f_j \colon x \mapsto \left(\frac{j}{4\pi}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{jx^2}{4}\right)$$

gegebene Distribution. Dann $\lim_{j\to\infty} T_j = \delta_0$ *in* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 15.20. Für $n = 1$, f_j wie oben und H die Heaviside-Funktion gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle f_j H, \varphi\rangle = \langle H, f_j\varphi\rangle = \int_0^\infty f_j \varphi \, d\lambda_1$$

Wir setzen φH wie folgt zu einer geraden Funktion $\psi \in C(\mathbb{R})$ fort

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Dann folgt aus Theorem 8.6

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \langle f_j H, \varphi\rangle = \lim_{j\to\infty} \int_0^\infty \Phi\left(x, \frac{1}{j}\right) \psi(x) dx = \frac{1}{2} \lim_{j\to\infty} \int_{-\infty}^\infty \Phi\left(x, \frac{1}{j}\right) \psi(x) dx \\ = \frac{1}{2}\psi(0) = \frac{1}{2}\varphi(0), \end{aligned}$$

also $\lim_{j\to\infty} f_j H = \frac{1}{2}\delta_0$.

Wir werden in den Übungen aber folgendes zeigen

(a) Für $a_j(x) = H\left(x - j^{-1/4}\right)$ gilt $\lim_{j\to\infty} a_j = H$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(b) $\lim_{j\to\infty} \langle f_j a_j, \varphi\rangle = 0$ für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Das bedeutet, dass man das Produkt der Distributionen δ_0 und H nicht sinnvoll erklären kann, denn sowohl $(f_j H)_{j\in\mathbb{N}}$ als auch $(f_j a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ müssten gegen dieses Produkt konvergieren.

Da es keine Produkte von Distributionen gibt, spielt der Distributionskalkül bei der Untersuchung nichtlinearer Differentialgleichungen keine Rolle.

Lemma 15.21. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $g \in L^1_{loc}(U)$ *mit* $\langle g, \varphi\rangle = 0$ *für alle* $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. *Dann* $g = 0$.

Beispiel 15.22. Für $0 < \delta < \epsilon$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ folgt aus dem Mittelwertsatz

$$\int_\delta^\epsilon \frac{|\varphi(x) - \varphi(-x)|}{x} dx \leq (\epsilon - \delta) \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)|.$$

Daher folgt aus dem Cauchy-Kriterium die Konvergenz von

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$$

für $\epsilon \searrow 0$. Wenn der Träger von φ in $[-R, R]$ liegt, so zeigt die obige Rechnung, dass

$$\left|\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx\right| \le R \sup_{|x|\le R} |\varphi(x)|.$$

Das bedeutet, dass durch

$$\left\langle \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

eine Distribution gegeben wird, die man als *Cauchyschen Hauptwert* von $\frac{1}{x}$ bezeichnet.

Definition 15.23. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ heißt *schnell fallend,* wenn $\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Der Raum

$$\mathscr{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \middle| \forall \beta \in \mathbb{N}_0^N : D^\beta f \text{ schnell fallend} \right\}$$

heißt *Schwartzraum.* Seine Elemente heißen *Schwartzfunktionen.*

Definition 15.24. Eine Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gegen $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, wenn $\lim_{k\to\infty} \|f_j - f\|_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei

$$\|f\|_k := \sup \left\{ |x^\alpha D^\beta f(x)| \middle| |\alpha|, |\beta| \le k, x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Definition 15.25. Ein lineares Funktional $T\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{K}$ ist *folgenstetig,* wenn es konvergente Folgen auf konvergente Folgen abbildet. Ein folgenstetiges lineares Funktional bezeichnet man als *temperierte Distribution.* Den Raum aller temperierten Distributionen schreibt man als $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung 15.26. Es gelten $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Die durch die Exponentialfunktion induzierte Distribution liegt nicht in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

16 Soboleworäume

Wiederholung. Für $1 \leq p < \infty$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ messbar hatten wir definiert

$$L^p(U) = \{f \colon U \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \|f\|_p < \infty\},$$

wobei

$$\|f\|_p = \left(\int_U |f|^p \, d\lambda_n\right)^{1/p}.$$

Wir hatten gezeigt, dass diese Räume Banachräume sind, also jede Cauchy-Folge konvergiert. Für $1 < p < \infty$ hatten wir die Höldersche Ungleichung gezeigt. Dabei ist q so zu wählen, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für $f \in L^p(U)$ und $g \in L^q(U)$

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Lemma 16.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt $L^p(U) \subset L^1_{\text{loc}}(U)$. Insbesondere sind alle L^p-Funktionen für $1 \leq p < \infty$ Distributionen.*

Definition 16.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und seien $u, v \in L^1_{\text{loc}}(U)$. Man sagt, v sei die *schwache Ableitung* von u zum Multiindex α, wenn für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt

$$\int_U u \, \varphi^{(\alpha)} \, d\lambda_n = (-1)^{|\alpha|} \int v \, \varphi \, d\lambda_n.$$

Man schreibt dann $v = D^\alpha u$.

Bemerkung. $v \in L^1_{\text{loc}}(U)$ ist also genau dann die schwache Ableitung von $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$, wenn die durch v gegebene Distribution gleich der Ableitung der durch u gegebenen Distribution ist.

Definition 16.3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $k \in \mathbb{N}_0$ und sei $1 \leq p < \infty$. Der *Sobolewraum* $W^{k,p}(U)$ besteht aus allen $u \in L^p(U)$, deren sämtliche Ableitungen $D^\alpha u$ mit $|\alpha| \leq k$ im schwachen Sinne existieren und in $L^p(U)$ liegen.

Der Raum $W^{k,2}(U)$ wird auch mit $H^k(U)$ bezeichnet.

Beispiel 16.4. Die Funktion $f(x) = |x|$ liegt für jedes p in $W^{1,p}(]-1,1[)$, aber nicht in $W^{2,p}(]-1,1[)$.

Definition 16.5. Für $1 \leq p < \infty$ wird $W^{k,p}(U)$ versehen mit der Norm

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Das bedeutet, dass $\|u\|_{k,p}$ die ℓ^p-Norm des Tupels $(\|D^\alpha u\|_p)_{|\alpha|\le k}$ ist.

$H^k(U)$ wird versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{H^k(U)} = \sum_{|\alpha|\le k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(U)}.$$

Lemma 16.6. *Eine Folge* $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *in* $W^{k,p}(U)$ *konvergiert genau dann gegen* $u \in W^{k,p}(U)$*, wenn für jedes* α *mit* $|\alpha| \le k$ *die Folge* $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *in* $L^p(U)$ *gegen* $D^\alpha u$ *konvergiert. Sie ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn für jedes* α *mit* $|\alpha| \le k$ *die Folge* $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge ist.*

Satz 16.7. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Für jedes* $k \in \mathbb{N}_0$ *und jedes* $p \in [1,\infty[$ *ist* $W^{k,p}(U)$ *ein Banachraum und* $H^k(U)$ *ein Hilbertraum.*

Beispiel 16.8. Für welche $\beta > 0$ ist $u(x) = |x|^{-\beta}$ in $W^{1,p}(B_1(0))$?

Für $x \neq 0$ existieren alle Ableitungen im klassischen Sinne, nämlich

$$u_{x_i}(x) = -\frac{\beta x_i}{|x|^{\beta+2}}.$$

Notwendig für $u \in W^{1,p}$ ist daher

$$\int_{B_1(0)} \left(\frac{|x_i|}{|x|^{\beta+2}}\right)^p d\lambda_n < \infty$$

für $i = 1,\dots,n$. Beachte

$$|x|^p = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{p/2} \le \left(n \max_{1\le i\le n} x_i^2\right)^{p/2} = n^{p/2} \max_{1\le i\le n} |x_i|^p \le n^{p/2} \sum_{i=1}^n |x_i|^p.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}\infty > \int_{B_1(0)} \frac{|x|^p}{|x|^{(\beta+2)p}} d\lambda_n = \int_{B_1(0)} |x|^{-(\beta+1)p} d\lambda_n = \int_0^1 \int_{\partial B_r(0)} r^{-(\beta+1)p}\, d\sigma\, dr \\ = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_0^1 r^{n-1-(\beta+1)p}\, dr.\end{aligned}$$

Dieses Integral ist genau dann endlich, wenn $n > (\beta+1)p$.

Wir zeigen nun, dass unter dieser Voraussetzung die schwache Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ in der Tat durch $-\beta x_i |x|^{-\beta-2}$ gegeben wird. Dass diese Funktion in $L^p(B_1(0))$ liegt, haben wir soeben gezeigt. Wir wenden dazu für ein beliebiges $\varphi \in \mathcal{D}(B_1(0))$ den Divergenzsatz auf das Vektorfeld $F = u\varphi e_i$ an. Außerhalb des Ursprungs gilt

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\beta x_i}{|x|^{\beta+2}}\varphi + |x|^{-\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Daher besagt der Divergenzsatz für $\epsilon > 0$

$$\int_{B_1(0)\setminus B_\epsilon(0)} u_{x_i}\varphi \, d\lambda_n = -\int_{B_1(0)\setminus B_\epsilon(0)} u\varphi_{x_i} \, d\lambda_n - \int_{\partial B_\epsilon(0)} u\varphi\nu_i \, d\sigma.$$

Wir betrachten die Grenzwerte für $\epsilon \to 0$ einzeln.

$$\begin{aligned}\int_{B_\epsilon(0)} |u_{x_i}\varphi| \, d\lambda_n \le C_1 \int_0^\epsilon \int_{\partial B_\epsilon(0)} r^{-\beta-1} \, d\sigma \, dr &= \frac{C_1}{n\alpha(n)} \int_0^\epsilon r^{n-\beta-2} dr \\ &= \frac{C_1}{n\alpha(n)(n-\beta-1)} \epsilon^{n-\beta-1} \to 0,\end{aligned}$$

denn aus $n > (\beta+1)p$ folgt $n > \beta + 1$. Speziell

$$\int_{B_\epsilon(0)} |u\varphi_{x_i}| \, d\lambda_n \le C_2 \int_{B_\epsilon(0)} |x|^{-\beta} \, d\lambda_n \to 0.$$

Schließlich

$$\int_{\partial B_\epsilon(0)} |u\varphi\nu_i| \, d\sigma \le C_2 \int_{\partial B_\epsilon(0)} \epsilon^{-\beta} \, d\sigma = \frac{C_2}{n\alpha(n)} \epsilon^{n-1-\beta} \to 0.$$

Damit haben wir alles zusammen, was wir brauchen, um zu zeigen, dass der Gradient tatsächlich die schwache Ableitung ist, obwohl er nur in $B_1(0) \setminus \{0\}$ definiert ist:

$$\begin{aligned}-\int_{B_1(0)} u\varphi_{x_i} = -\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{B_1(0)\setminus B_\epsilon(0)} u\varphi_{x_i} &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{B_1(0)\setminus B_\epsilon(0)} u_{x_i}\varphi + \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(0)} u\varphi\nu_i \\ &= \int_{B_1(0)} u_{x_i}\varphi.\end{aligned}$$

Satz 16.9. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt, sei* $1 \le p < \infty$, *sei* $k \in \mathbb{N}_0$, *sei* $u \in W^{k,p}(U)$ *und sei* $\varphi \in C^\infty(\overline{U})$. *Dann* $\varphi u \in W^{k,p}(U)$ *und für alle* α *mit* $|\alpha| \le k$ *gilt*

$$D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi \, D^{\alpha-\beta} u.$$

Für unbeschränktes $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt der Satz, falls $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gefordert wird.

Beweis. Das wird für den Fall $n = 1$ und $k = 1$ als Übungsaufgabe gezeigt. □

Lemma 16.10. *Es sei* $1 \le p < \infty$ *und es sei* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *Dann existiert zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ *mit kompaktem Träger, so dass* $\|f - \varphi\|_p < \epsilon$.

Bezeichnung 16.11. Es sei $\chi \in \mathcal{D}(B_1(0))$ eine beliebige Funktion mit $0 \le \chi$ und $\int_{B_1(0)} \chi \, d\lambda_n = 1$, z. B.

$$\chi(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

Für $\epsilon > 0$ setzen wir

$$\chi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Dann ist $\chi_\epsilon \in \mathcal{D}(B_\epsilon(0))$ und es gilt $\int_{B_\epsilon(0)} \chi_\epsilon d\lambda_n = 1$. Die Funktionen χ_ϵ bezeichnet man als *Glättungsfunktionen* (engl. *mollifier*).

Wir zitieren Satz 13.8 aus der Analysis III im WS 2016/17.

Satz 16.12. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$ oder $k = \infty$, sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und sei $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$. Dann $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und es gilt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$*

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(f * g)}{\partial y^\alpha} = f * \left(\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial y^\alpha}\right).$$

Lemma 16.13. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und es sei $u \in C(\mathbb{R}^n)$ mit Träger in U. Für $\epsilon > 0$ setzen wir $u^\epsilon = \chi_\epsilon * u$. Dann $\lim_{\epsilon \searrow 0} u^\epsilon = u$ gleichmäßig.*

Lemma 16.14. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, es sei $k \in \mathbb{N}_0$, es sei $1 \leq p < \infty$ und es sei $u \in W^{k,p}(U)$. Wir setzen*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in U, \\ 0, & x \notin U, \end{cases}$$

und für jedes $\epsilon > 0$ setzen wir $u^\epsilon = \chi_\epsilon * \tilde{u}_0$. Dann $u^\epsilon \in C^\infty(U)$ und für jedes $x \in U$ und jedes α mit $|\alpha| \leq k$ gilt für alle ϵ mit $B_{2\epsilon}(x) \subset U$

$$D^\alpha u^\epsilon(x) = (D^\alpha u)^\epsilon(x).$$

Lemma 16.15. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 16.14 gilt*

$$\|u^\epsilon\|_p \leq \|u\|_p$$

für alle $\epsilon > 0$.

Satz 16.16. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, es sei $k \in \mathbb{N}_0$, es sei $1 \leq p < \infty$ und es sei $u \in W^{k,p}(U)$. Ferner sei $V \subset U$ eine beschränkte, offene Menge mit $\overline{V} \subset U$. Dann*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} u^\epsilon|_V = u|_V \quad \text{in } W^{k,p}(V).$$

Theorem 16.17. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $k \in \mathbb{N}_0$ und sei $1 \leq p < \infty$. Zu jedem $u \in W^{k,p}(U)$ gibt es eine Folge $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $W^{k,p}(U) \cap C^\infty(U)$, die in $W^{k,p}(U)$ gegen u konvergiert.*

Theorem 16.18. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Ferner seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$. Dann existiert zu jedem $u \in W^{k,p}(U)$ eine Folge $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $C^\infty(\overline{U})$, welche in $W^{k,p}(U)$ gegen u konvergiert.*

Für den Beweis benötigen wir zuerst das folgende Resultat.

Lemma 16.19. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge mit C^1-Rand und sei $x_0 \in \partial U$ ein Punkt, an dem die äußere Normale nicht senkrecht auf e_n steht. Dann gibt es $r, \lambda, \epsilon_0 > 0$, so dass*

$$\forall 0 < \epsilon < \epsilon_0 \forall x \in U \cap B_{r/2}(x_0) : B_\epsilon(x^\epsilon) \subset U \cap B_r(x_0),$$

wobei $x^\epsilon := x + \lambda\epsilon e_n$.

Bemerkung. Der Beweis funktioniert genauso, wenn man lediglich einen Lipschitz-Rand fordert. Der Satz gilt also auch für Polytope.

Satz 16.20 (Formel des Faà di Bruno). *Die* Bell-Polynome *sind definiert als*

$$B_{m,k}(x_1, \ldots, x_{m-k+1}) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_k=m \\ j_i \geq 1}} \frac{m!}{j_1! \ldots j_k!} x_{j_1} \cdots x_{j_k}.$$

Es seien I, J zwei Intervalle, ferner $f \in C^m(I)$ und $g \in C^m(J)$ mit $f(I) \subseteq J$. Dann gilt

$$\frac{d^m(g \circ f)}{dt^m}(t) = \sum_{k=1}^{m} g^{(k)}(f(t)) B_{m,k}(f'(t), f''(t), \ldots, f^{(m-k+1)}(t)).$$

Einen Beweis findet man im Amer. Math. Monthly 109 (2002), 217–234.

Korollar 16.21. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Es gebe offene Obermengen $U_1 \supset \overline{U}$ und $V_1 \supset \overline{V}$ sowie einen C^k-Diffeomorphismus $\Phi \colon U \to V$, so dass Φ Einschränkung einer Abbildung in $C^k(U_1)$ und Φ^{-1} Einschränkung einer Abbildung in $C^k(V_1)$ ist. Dann wird durch*

$$u \mapsto u \circ \Phi$$

ein Isomorphismus zwischen $W^{k,p}(V)$ und $W^{k,p}(U)$ gegeben.

Theorem 16.22 (Spursatz (engl.: trace theorem)). *Es sei $1 \leq p < \infty$ und es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Dann existieren $C > 0$ und ein stetiger linearer Operator*

$$T \colon W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U),$$

so dass

$$\begin{aligned} Tu &= u|_{\partial U} && \textit{falls } u \in W^{1,p}(U) \cap C^1(\overline{U}), \\ \|Tu\|_{L^p(\partial U)} &\leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} && \textit{falls } u \in W^{1,p}(U). \end{aligned}$$

Definition 16.23. Man bezeichnet Tu als *Spur* von u auf dem Rand.

Bemerkung 16.24. (a) Die Aussage gilt ebenfalls für Polygone.

(b) Man kann Sobolewräume auch für nicht-ganze Exponenten erklären. Dann zeigt sich, dass der Spuroperator stetig von $W^s(U)$ nach $W^{s-1/2}(\partial U)$ abbildet, falls der Rand von U genügend regulär ist.

Theorem 16.25 (Divergenzsatz). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine glatt berandete, beschränkte, offene Mengei, sei $1 \leq p < \infty$.*

(a) Es sei $u \in W^{1,p}(U)$. Dann gilt für $j = 1, \dots, n$

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_j} d\lambda^n = \int_{\partial U} u \nu_j d\sigma,$$

wobei ν_j die j-te Komponente der äußeren Einheitsnormalen ist.

(b) Es sei $u \in W^{1,p}(U, \mathbb{R}^n)$, d. h. die Komponenten von u seien in $W^{1,p}(U)$. Dann gilt

$$\int_U \operatorname{div} u \, d\lambda^n = \int_{\partial U} \langle u, \nu \rangle \, d\sigma.$$

Entsprechend bekommt man dann die Greenschen Formeln für Funktionen in $W^{2,p}$.

Theorem 16.26. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit glattem Rand und sei $1 \leq p < \infty$. Seien $f, g \in W^{2,p}(U)$ und $h \in W^{1,p}(U)$. Dann*

(a)

$$\int_U h \, \Delta \overline{g} \, d\lambda_n = -\int_U \langle \nabla h, \nabla g \rangle \, d\lambda_n + \int_{\partial U} h \, \langle \nabla \overline{g}, \nu \rangle \, d\sigma.$$

(b)

$$\int_U (f \, \Delta g - g \, \Delta f) d\lambda_n = \int_{\partial U} (f \, \langle \nabla g, \nu \rangle - g \, \langle \nabla f, \nu \rangle) \, d\sigma.$$

Beispiel 16.27. In Satz 10.4 hatten wir eine Funktion $g \in C^([0, 1])$ mit $g(0) = g(1) = 0$ untersucht, für die es eine Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ gibt, so dass $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x)$. Wir hatten gesehen, dass durch

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) e^{-k^2 \pi^2 t}$$

eine Funktion in $C^\infty(]0, 1[\times]0, \infty[) \cap C([0, 1] \times [0, \infty[)$ gegeben wird, welche das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in }]0,1[\times]0,\infty[\\ u &= 0 && \text{in } \{0,1\} \times]0,\infty[&& \text{Randbedingung} \\ u &= g && \text{in }]0,1[\times \{0\} && \text{Anfangsbedingung} \end{aligned}$$

löst.

Als Beispiel betrachten wir $b_k = k^{-3/2}$. Dann ist die Einschränkung von u auf $\{t \leq T\}$ für kein $T > 0$ in $H^1(]0, 1[\times]0, T[)$.

Definition 16.28. Mit $W_0^{k,p}(U)$ wird der Abschluss von $\mathcal{D}(U)$ in $W^{k,p}(U)$ bezeichnet. Statt $W_0^{k,2}(U)$ schreibt man auch $H_0^k(U)$.

Beispiel 16.29. (a) $W_0^{0,p}(U) = W^{0,p}(U) = L^p(U)$.

(b) $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Das folgt aus Lemma 16.10 und einem Faltungsargument.

Den Beweis des folgenden Satzes findet man in Abschnitt 5.5 des Buchs von Evans.

Theorem 16.30. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* C^1*-Rand und sei*

$$T \colon W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

der Spuroperator. Dann gilt

$$W_0^{1,p}(U) = \ker T.$$

17 Der Wärmeleitungskern

Erinnerung: Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung in n Raumdimensionen ist

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$$

Lemma 17.1. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ mit C^2-Rand und seien $T > 0$ und $\alpha < \frac{n}{2} + 1$. Dann existiert ein $C > 0$, so dass für alle $x, x^0 \in \partial\Omega$ und alle $t \in [0, T]$*

$$\left| \frac{\partial \Phi(x - x^0, t)}{\partial \nu_x} \right| \le C t^{-\alpha} |x - x^0|^{2\alpha - n},$$

wobei ν_x die äußere Einheitsnormal an $\partial\Omega$ in x bezeichnet.

Definition 17.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand, es sei $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ eine Funktion und es sei $x \in \partial\Omega$. Mit ν_x werde die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ in x bezeichnet. Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Ω. Wir sagen, dass sie *nicht-tangential gegen x konvergiert*, wenn $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ und es ein $\rho > 0$ gibt, so dass $\langle x - y_n, \nu_x \rangle \ge \rho |y_n - x|$ für alle n.

Wir sagen, dass der Grenzwert von $f(y)$ bei *nicht-tangentialer Annäherung* gleich ℓ ist, wenn $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \ell$ für jede nicht-tangential gegen x konvergente Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. In diesem Fall schreiben wir $\text{nt-}\lim_{y\to x} f(y) = \ell$.

Satz 17.3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand, es sei $T > 0$ und es sei $\gamma \in C(\partial\Omega \times [0,T])$. Wir setzen*

$$w(x,t) = -\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi(x - y, \tau)}{\partial \nu_y} \gamma(y, t - \tau) \, d\sigma(y) \, d\tau.$$

Dann

$$\begin{aligned} w &\in C^\infty(\Omega \times [0,T]), \\ w(x,0) &= 0 \qquad \textit{für alle } x \in \Omega, \end{aligned}$$

und für alle $x_0 \in \partial\Omega$ und alle $t \in \,]0,T]$ gilt

$$\text{nt-}\lim_{x\to x_0} w(x,t) = \frac{\gamma(x_0,t)}{2} - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi(y - x_0, \tau)}{\partial \nu_y} \gamma(y, t - \tau) \, d\sigma(y) \, d\tau. \tag{17.1}$$

Die Gleichung (17.1) bezeichnet man als *Sprungrelation.*

Die Existenz der Integrale folgt aus dem vorigen Lemma. Ansonsten gliedert sich der Beweis von Satz 17.3 in mehrere Einzelschritte.

Lemma 17.4.
$$\int_0^\infty e^{-s^2} s^{n-2} ds = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right).$$
Insbesondere gilt $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Lemma 17.5. *Für jedes* $\epsilon > 0$ *existieren* $\tau_1, \delta_1 > 0$*, so dass für alle* τ_0 *und* δ *mit* $0 < \tau_0 < \tau_1$ *und* $0 < \delta < \delta_1$ *gilt*

$$\left|\lim_{\mu\searrow 0} \int_0^{\tau_0} \int_{\partial\Omega\cap B_\delta(x_0)} \frac{\mu}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}\tau^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left(-\frac{|x_0-y|^2}{4\tau} - \frac{\mu^2}{4\tau}\right) d\sigma(y)d\tau - \frac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

Lemma 17.6. *Für jedes* $\epsilon > 0$ *existieren* $\tau_2, \delta_2 > 0$*, so dass für alle* τ_0 *und* δ *mit* $0 < \tau_0 < \tau_2$ *und* $0 < \delta < \delta_2$ *gilt*

$$\left|\text{nt-lim}_{x\to x_0} \int_0^{\tau_0} \int_{\partial\Omega\cap B_\delta(x_0)} \frac{\partial\Phi(x-y,\tau)}{\partial\nu_y}\gamma(y,t-\tau)d\sigma(y)d\tau + \frac{1}{2}\gamma(x_0,t)\right| < \epsilon.$$

Bemerkung. Man kann aus dem Beweis nicht erkennen, wo eingeht, dass der Grenzwert nicht tangential genommen werden muss. In dem Buch von Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, wird die Sprungrelation ohne diese Einschränkung gezeigt, allerdings unter etwas stärkeren Regularitätsvoraussetzungen.

Für $g \in C(\partial\Omega \times]0,\infty[)$ suchen wir eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u - u_t &= 0 \quad \text{in } \Omega \times]0,\infty[, \\ u &= 0 \quad \text{in } \Omega \times \{0\}, \\ u &= g \quad \text{in } \partial\Omega \times]0,\infty[. \end{aligned} \tag{17.2}$$

Das geschieht durch den Ansatz

$$u(x,t) = -\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\Phi(x-y,t-\tau)}{\partial\nu_y}\gamma(y,\tau)d\sigma(y)d\tau$$

für eine unbekannte Funktion γ. Wegen der Kommutativität der Faltung in t führt die Sprungrelation für $x_0 \in \partial\Omega$ zu

$$u(x_0,t) = \frac{1}{2}\gamma(x_0,t) - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\Phi(x_0-y,t-\tau)}{\partial\nu_y}\gamma(y,\tau)d\sigma(y)d\tau.$$

Das bedeutet, dass γ die folgende Fixpunktgleichung erfüllen muss

$$\gamma(x_0,t) = 2g(x_0,t) + 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi(x_0-y,t-\tau)}{\partial\nu_y}\gamma(y,\tau)d\sigma(y)d\tau.$$

Der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes steht entgegen, dass man das C aus Lemma 17.5 nicht kennt. Wir definieren rekursiv

$$\gamma_0(x_0,t) = 2g(x_0,t),$$
$$\gamma_j(x_0,t) = 2g(x_0,t) + 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi(x_0-y,t-\tau)}{\partial\nu_y}\gamma_{j-1}(y,\tau)d\sigma(y)d\tau.$$

Lemma 17.7.

$$\gamma_j(x_0,t) = 2g(x_0,t) + 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{\nu=1}^{j} S_\nu(x_0,y,t-\tau)\frac{\partial\Phi(z-y,\tau)}{\partial\nu_z}d\sigma(z)d\tau,$$

wobei

$$S_1(x_0,y,t) = 2\frac{\partial\Phi(x_0-y,t)}{\partial\nu_y},$$
$$S_{\nu+1}(x_0,y,t) = 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} S_\nu(x_0,z,t-\tau)\frac{\partial\Phi(z-y,\tau)}{\partial\nu_z}d\sigma(z)d\tau.$$

Für die folgenden Lemmata wählen wir eine feste irrationale Zahl β mit $0<\beta<\frac{1}{2}$. Die Irrationalität verhindert dabei, dass wir im Laufe der Induktion auf das Integral $\int r^{-1}$ stoßen.

Lemma 17.8.
$$\int_0^t (t-\tau)^{j\beta-1}\tau^{\beta-1}d\tau = \frac{\Gamma(j\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma((j+1)\beta)}t^{(j+1)\beta-1}.$$

Lemma 17.9. *Für jedes* j *mit* $j(1-2\beta)-(n-1)<0$ *existiert* C_j*, so dass*

$$|S_j(x_0,y,t)| \le C_j t^{j\beta-1}|x_0-y|^{j(1-2\beta)-(n-1)}$$

für alle t, x_0, y.

Für $j_0 = \min\{j | j(1-2\beta)-(n-1)>0\}$ *gibt es ein* C_{j_0}*, so dass*

$$|S_{j_0}(x_0,y,t)| \le C_{j_0}t^{j_0\beta-1}$$

für alle t, x_0, y.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion nach j. Mit $\alpha = 1-\beta$ erhält man die Aussage für $j=1$ aus Lemma 17.1. Im Fall $n=1$ ist man damit auch schon fertig. Im folgenden gilt also $n>1$.

Von j auf $j+1$ schließt man wie folgt

$$\begin{aligned}|S_{j+1}(x_0,y,t)| &= \left|\int_0^t \int_{\partial\Omega} S_j(x_0,z,t-\tau)S_1(z,y,\tau)d\sigma(z)d\tau\right| \\ &\le C_1C_j\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \tau^{\beta-1}|y-z|^{1-2\beta-(n-1)}(t-\tau)^{j\beta-1}|x_0-z|^{j(1-2\beta)-(n-1)}d\sigma(z)d\tau \\ &= C_1C_jt^{(j+1)\beta-1}\frac{\Gamma(j\beta)\Gamma(\beta}{\Gamma((j+1)\beta)}\int_{\partial\Omega}|y-z|^{1-2\beta-(n-1)}|x_0-z|^{j(1-2\beta)-(n-1)}d\sigma(z).\end{aligned}$$

Wegen der Kompaktheit von $\partial\Omega$ existiert $\delta > 0$, so dass für jedes $x_0 \in \partial\Omega \cap B_\delta(x_0)$ die Abschätzung $d\sigma \leq 2d\lambda_{n-1}$ gilt. Wir setzen $\rho = \frac{1}{3}|x_0 - y|$ und zeigen die Aussage zuerst für den Fall $4\rho < \delta$. Dazu zerlegen wir das Integral über $\partial\Omega$ in drei Teile

$$\int_{\partial\Omega} |y-z|^{1-2\beta-(n-1)}|x_0-z|^{j(1-2\beta)-(n-1)}d\sigma(z) = I_1 + I_2 + I_3,$$

wobei

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\partial\Omega\cap B_{4\rho}(x_0)} |y-z|^{1-2\beta-(n-1)}|x_0-z|^{j(1-2\beta)-(n-1)}d\sigma(z) \\
I_2 &= \int_{\partial\Omega\cap(B_\delta(x_0)\setminus B_{4\rho}(x_0))} |y-z|^{1-2\beta-(n-1)}|x_0-z|^{j(1-2\beta)-(n-1)}d\sigma(z) \\
I_3 &= \int_{\partial\Omega\setminus B_\delta(x_0)} |y-z|^{1-2\beta-(n-1)}|x_0-z|^{j(1-2\beta)-(n-1)}d\sigma(z)
\end{aligned}$$

Zur Abschätzung von I_1 und I_2 vewenden wir lokale Koordinaten. Wir wählen sie so, dass $x_0 = 0$ und $y = 3\rho e_1$. Wegen der Wahl von δ erhalten wir dann unter Verwendung des Transformationssatzes

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq 2\int_{B_{4\rho}^{(n-1)}(0)} |3\rho e_1 - z'|^{1-2\beta-(n-1)}|z'|^{j(1-2\beta)-(n-1)}d\lambda_{n-1}(z') \\
&= 2\int_{B_4^{(n-1)}(0)} |3\rho e_1 - \rho\nu'|^{1-2\beta-(n-1)}|\rho\nu'|^{j(1-2\beta)-(n-1)}\rho^{n-1}d\lambda_{n-1}(\nu') \\
&= 2\rho^{(j+1)(1-2\beta)-(n-1)}\int_{B_4^{(n-1)}(0)} |3e_1 - \nu'|^{1-2\beta-(n-1)}|\nu'|^{j(1-2\beta)-(n-1)}d\lambda_{n-1}(\nu').
\end{aligned}$$

Da das letzte Integral eine nur von j abhängige Konstante ist, ist die gewonnene Abschätzung von der gesuchten Form.

Nun soll I_2 abgeschätzt werden. Wegen der Wahl von δ gilt

$$I_2 \leq 2\int_{B_\delta^{(n-1)}(0)\setminus B_{4\rho}^{(n-1)}(0)} |3\rho e_1 - z'|^{1-2\beta-(n-1)}|z'|^{j(1-2\beta)-(n-1)}d\lambda_{n-1}(z').$$

Für $z' \in B_\delta(0) \setminus B_{4\rho}(0)$ gilt $|3\rho e_1 - z'| \geq |z'| - 3\rho \geq |z'| - \frac{3}{4}|z'| = \frac{1}{4}|z'|$ und daher

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq 2^{2n-3-4\beta}\int_{B_\delta(0)\setminus B_{4\rho}(0)} |z'|^{(j+1)(1-2\beta)-2(n-1)}d\lambda_{n-1}(z') \\
&= 2^{2n-3-4\beta}\operatorname{vol}(S^{n-1})\int_{4\rho}^{\delta} r^{(j+1)(1-2\beta)-2(n-1)}r^{n-2}dr \\
&= \frac{2^{2n-3-4\beta}\operatorname{vol}(S^{n-1})}{(j+1)(1-2\beta)-(n-1)} r^{(j+1)(1-2\beta)-(n-1)}\Big|_{4\rho}^{\delta}.
\end{aligned}$$

Wenn $(j+1)(1-2\beta)-(n-1) < 0$, dann ist der Vorfaktor negativ und I_2 wird abgeschätzt, indem man für r den Wert 4ρ einsetzt und das δ weglässt. Andernfalls gilt $j+1=j_0$ und der Vorfaktor ist positiv. In diesem Fall wird I_2 unabhängig von ρ dadurch abgeschätzt, dass man für r den Wert δ einsetzt und ρ weglässt. In beiden Fällen erhält man die zugehörige Behauptung.

Um schließlich I_3 abzuschätzen, beachten wir, dass für z mit $|x_0-z|\geq\delta$ gilt

$$|y-z|\geq|z-x_0|-|x_0-y|\geq\delta-3\rho\geq\delta-\frac{3}{4}\delta=\frac{\delta}{4}.$$

Daher gilt $I_3\leq B_1$ für

$$B_1=4^{n-2+2\beta}\delta^{(j+1)(1-2\beta)-2(n-1)}\operatorname{vol}(\partial\Omega).$$

Im Fall $j+1=j_0$ sind wir fertig. Andernfalls bezeichnen wir mit D den Durchmesser von Ω. Dann

$$I_3\leq\frac{B_1}{D^{(j+1)(1-2\beta)-(n-1)}}\rho^{(j+1)(1-2\beta)-(n-1)}.$$

Damit ist im Fall $\rho<\frac{\delta}{4}$ ist die Behauptung bewiesen. Andernfalls ergibt sich aus $|y-z|+|x_0-z|\geq\rho\geq\frac{\delta}{4}$, dass für jedes z mindestens einer der beiden Beträge $|y-z|$ bzw. $|x_0-z|$ größer oder gleich $\frac{\delta}{8}$ ist und somit

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}&|y-z|^{1-2\beta-(n-1)}|x_0-z|^{j(1-2\beta)-(n-1)}d\sigma(z)\\&\leq\left(\frac{\delta}{8}\right)^{1-2\beta-(n-1)}\int_{\partial\Omega}|x_0-z|^{j(1-2\beta)-(n-1)}d\sigma(z)\\&\qquad+\left(\frac{\delta}{8}\right)^{j(1-2\beta)-(n-1)}\int_{\partial\Omega}|y-z|^{1-2\beta-(n-1)}d\sigma(z).\end{aligned}$$

Beide Integrale existieren für alle $x_0,y\in\partial\Omega$ und hängen stetig von diesen Parametern ab. Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existiert eine von x_0 und y unabhängige Schranke B_2 für die rechte Seite. Man argumentiert nun wieder wie bei der Abschätzung von I_3 mit dem Durchmesser. □

Lemma 17.10. *Es existiert eine Konstante A, so dass für alle j mit $j(1-2\beta)>n-1$ gilt*

$$|S_j(x_0,y,t)|\leq A^jt^{j\beta-1}\prod_{\mu=1}^{j-1}\frac{\Gamma(\mu\beta)\Gamma(\beta}{\Gamma((\mu+1)\beta)}.$$

Beweis. Es seien j_0 und C_1 wie in Lemma 17.9. Wir hatten im vorigen Beweis bereits gesehen, dass für jedes $y\in\partial\Omega$ das Integral $\int_{\partial\Omega}|x_0-z|^{1-2\beta-(n-1)}d\sigma(z)$ existiert. Aus Kompaktheitsgründen existiert das Maximum M dieser Zahlen, wenn y durch $\partial\Omega$ variiert. Es sei $A\geq C_1M$ so groß gewählt, dass die Behauptung für $j=j_0$ zutrifft. Die Aussage sei richtig für ein $j\geq j_0$. Dann folgt der Induktionsschluss mit Lemma 17.8 sofort aus

$$|S_{j+1}(x_0,y,t)|\leq C_1A^j\prod_{\mu=1}^{j-1}\frac{\Gamma(\mu\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma((\mu+1)\beta)}\int_0^t\int_{\partial\Omega}\tau^{\beta-1}|x_0-z|^{1-2\beta-(n-1)}(t-\tau)^{j\beta-1}d\sigma(z)d\tau.$$

□

Lemma 17.11. *Für alle $T > 0$ existiert C, so dass für alle $t \leq T$ und alle $x_0, y \in \partial\Omega$*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |S_j(x_0, y, t)| \leq C.$$

Theorem 17.12. *Für ein beschränktes Gebiet Ω mit C^2-Rand und eine stetige Funktion g auf $\partial\Omega \times]0, \infty[$ besitzt das Anfangs-Randwertproblem (17.2) eine eindeutig bestimmte Lösung. Sie hat die Gestalt*

$$u(x,t) = -\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi(x-y, t-\tau)}{\partial\nu_y} \gamma(y,\tau) d\sigma(y) d\tau$$

für $\gamma = \lim_{j\to\infty} \gamma_j$.

Definition 17.13. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Funktion $q\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ heißt *Wärmeleitungskern,* wenn

$$\begin{aligned} \Delta_x q(x,y,t) - q_t(x,y,t) &= 0 \qquad && x, y \in \Omega, t > 0, \\ q(x,y,t) &= 0 && x \in \partial\Omega, y \in \Omega, t > 0, \end{aligned}$$

und für alle stetigen Funktionen $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega q(x,y,t) f(x) d\lambda_n(x) = f(y) \quad \text{für alle } y \in \Omega.$$

Korollar 17.14. *Jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^2-Rand hat einen Wärmeleitungskern.*

Beispiel 17.15. Die Spiegelungsmethode zeigt, dass der Wärmeleitungskern für das Einheitsintervall gegeben wird durch

$$q(x,y,t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y-2j)^2}{4t}\right) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+y-2j)^2}{4t}\right).$$

Theorem 17.16. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand und Wärmeleitungskern q. Ferner sei $\varphi\colon \overline{\Omega} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ ausreichend regulär und es seien $g \in C(\partial\Omega \times]0, \infty[)$ und $f \in C(\Omega)$. Dann wird durch*

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^t \int_\Omega q(x,y,t-\tau)\varphi(y,\tau) d\lambda_n(y) d\tau \\ &+ \int_\Omega q(x,y,t) f(y) d\lambda_n(y) \\ &- \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial\nu_y}(x,y,t-\tau) g(y,\tau) d\sigma(y) d\tau \end{aligned}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangs- und Randwertproblems

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= \varphi(x,t), && x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) &= g(x,t), && x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), && x \in \Omega, \end{aligned}$$

gegeben.

Beweis. Theorem 5.3.2 in Jost. Dort wird behauptet, dass Lipschitz-Stetigkeit von φ ausreicht. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz wird mit funktionalanalytischen Mitteln (also ohne den Wärmeleitungskern) in §7.1 von Evans gezeigt. □

Umgekehrt folgt aus diesem Satz auch die Existenz eines Wärmeleitungskerns.