Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2022/23

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines

Wiederholung. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^{|\alpha|}(U)$. Dann bezeichnet man mit $D^\alpha u$ die partielle Ableitung

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

1.1 Bezeichnung. Häufig hat man es mit den drei Raumvariablen x, y, z und der Zeitvariable t zu tun. Dann drückt man partielle Ableitungen nach einer dieser Variablen dadurch aus, dass man die Variable als Index an die Funktion setzt.

Beispielsweise ist der *Laplace-Operator* in n Variablen definiert als

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

In drei Raumdimensionen schreibt man ihn

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

1.2 Definition. Eine *partielle Differentialgleichung* der Ordnung k ist eine Gleichung der Form

$$F\Big(D^{\alpha^{(1)}} u(x), \dots, D^{\alpha^{(N)}} u(x), x\Big) = 0,$$

wobei F eine Funktion in $N+1$ Veränderlichen ist und $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N)}$ Multiindices sind mit $\max_{j=1,\dots,N} |\alpha^{(j)}| = k$. Die Funktion u ist die gesuchte Lösung, sie heißt *starke Lösung*, wenn u von der Klasse C^k ist. Vorerst sind wir nur an starken Lösungen interessiert. Je nach Situation werden später auch schwächere Regularitätsanforderungen gestellt.

Eine System von endlich vielen partiellen Differentialgleichungen bezeichnet man als partielles Differentialgleichungssystem.

1.3 Bezeichnung. Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)$$

heißt *linear*. Im Fall $f \equiv 0$ heißt sie *homogen linear,*, ansonsten bezeichnet man f als *Inhomogenität* der Differentialgleichung.

Wenn die $a_\alpha(x)$ nicht von x abhängen, dann sagt man, dass die lineare Differentialgleichung konstante Koeffizienten besitzt.

1.4 Bezeichnung. (a) Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0\Big(D^{\beta^{(1)}}u(x), \dots, D^{\beta^{(N)}}u(x), x\Big) = 0$$

heißt *semilinear*, vorausgesetzt $|\beta^{(j)}| < k$ for alle j.

(b) Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\Big(D^{\beta_\alpha^{(1)}}u(x), \dots, D^{\beta_\alpha^{(N_\alpha)}}u(x), x\Big) D^\alpha u + a_0\Big(D^{\gamma^{(1)}}u(x), \dots, D^{\gamma^{(N)}}u(x), x\Big) = 0$$

heit *quasilinear*, vorausgesetzt alle $|\beta_\alpha^{(j)}| < k$ und alle $|\gamma^{(j)}| < k$.

(c) Alle anderen partiellen Differentialgleichungen bezeichnet man als *voll nichtlinear.*

1.5 Beispiel. (a) Die *Transportgleichung* lautet

$$u_t + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} = 0,$$

wobei $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ (also konstant) sind.

(b) Die *Laplace-Gleichung* lautet

$$\Delta u = 0.$$

(c) Die *Wärmeleitungsgleichung* (engl. *heat equation*) lautet

$$u_t - \Delta u = 0.$$

Die Wärmeleitungsgleichung wird auch Diffusionsgleichung genannt.

(d) Die Wellengleichung (*heat equation*) lautet

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

Die Differentialgleichungen (a)–(d) sind linear mit konstanten Koeffizienten. (a) ist von erster Ordnung, (b)–(d) von zweiter.

(e) Die *Burgers Gleichung* lautet

$$u_t + u\,u_x = \nu(x) u_{xx}.$$

Diese Gleichung ist semilinear von zweiter Ordnung.

Die Burgers Gleichung und die weiter unten beschriebene Navier-Stokes Gleichungen beschreiben Phänomene aus der Strömungsmechanik.

(f) Die *Eikonalgleichung* lautet

$$|\nabla u| = 1.$$

Sie ist voll nichtlinear von erster Ordnung.

(g) Die *Navier-Stokes Gleichungen* lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t), \qquad i = 1, 2, 3,\\ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0.\end{aligned}$$

Es handelt sich um ein semilineares partielles Differentialgleichungssystem. Gesucht sind dabei u_1, u_2, u_3 und p. Ferner ist $\nu > 0$ eine vorgegebene Konstante und die f_i sind Funktionen. Eine offene Frage ist, ob es eine glatte Funktion f gibt, so dass keine Lösung der Navier-Stokes Gleichung für alle $t > 0$ erklärt ist.

Diese Frage ist ein Clay Millenium Problem

http://www.claymath.org/millennium-problems/navier%E2%80%93stokes-equation.

2 Die Transportgleichung

Bei der Transportgleichung in unserem Sinn handelt es sich um

$$u_t + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \tag{2.1}$$

wobei $b \in \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times]0, \infty[)$ gesucht wird.

Der Name Transportgleichung stammt aus dem Buch von Evans.

2.1 Satz. *Die C^1-Lösungen von (2.1) auf $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ sind genau die Funktionen der Form*

$$u(x, t) = w(x - tb),$$

wobei $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Bemerkung. Eine Aufgabe der Form

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} &= f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

bezeichnet man als *Anfangswertproblem.* Dabei ist die zweite Zeile zu verstehen als

$$\lim_{t \searrow 0} u(x, t) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Im Fall der homogenen Gleichung, also für $f \equiv 0$, haben wir im Satz gesehen, dass $u(x, t) = g(x - bt)$ die einzige Lösung des Anfangswertproblems ist.

Die Vertauschbarkeit von Ableitung und Integral regelt Satz 8.10 der Analysis III im WS 21/22. Wir brauchen außerdem noch den folgenden Satz, den wir in der Analysis III als Satz 18.10 gezeigt hatten.

2.3 Satz. *Es sei $f \in C^1(]a, b[^2)$. Für beliebiges $c \in]a, b[$ setzt man $F(t) = \int_c^t f(t, s)ds$. Dann ist F differenzierbar und es gilt*

$$F'(t) = f(t, t) + \int_c^t \frac{\partial f}{\partial t}(t, s)ds.$$

Beweis.

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \int_c^t \frac{f(t+h,s)-f(t,s)}{h}ds + \int_t^{t+h} \frac{f(t+h,s)}{h}ds.$$

Nach dem Mittelwertsatz ist der vordere Integrand beschränkt durch

$$\max\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\tau,s)\right|\middle| a+\epsilon \leq \tau \leq b-\epsilon\right\}$$

bei geeigneter Wahl von ϵ. Den zweiten Term behandeln wir mit Substitution $s = t+\tau h$.

$$\int_t^{t+h} \frac{f(t+h,s)}{h}ds = \int_0^1 f(t+h, t+\tau h)d\tau.$$

Hier genügt bereits die Stetigkeit von h für den Grenzübergang. □

2.4 Definition. Mit $\overline{C}^k(G,\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir den Raum aller derjenigen C^k-Funktionen auf G, so dass für jedes α mit $|\alpha| \leq k$ die Ableitung $D^\alpha f$ stetig nach $\overline{G}$ fortgesetzt werden kann.

2.5 Satz. *Für gegebene Funktionen* $f \in \overline{C}^1(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$ *und* $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *besitzt das Anfangswertproblem* (2.2) *eine eindeutig bestimmte Lösung in* $\overline{C}^1(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$. *Für* $t > 0$ *hat sie die Gestalt*

$$u(x,t) = g(x-tb) + \int_0^t f(x+(s-t)b, s)ds.$$

3 Die Laplace-Gleichung

Motivation. Es sei u sei die Wärme in einem beschränkten Gebiet U. Am Rand des Gebietes liege eine unveränderliche Wärmeverteilung f vor. Es habe sich eine stationäre, also zeitunabhängige Lösung eingestellt. Dann löst u das folgende *Randwertproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } U, \\ u &= f && \text{in } \partial U. \end{aligned}$$

3.1 Definition. Die partielle Differentialgleichung $\Delta u = 0$ heißt *Laplace-Gleichung*, die zugehörige inhomogene Gleichung $-\Delta u = f$ heißt *Poisson-Gleichung.* Die Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ bezeichnet man als *harmonische Funktionen.*

Bemerkung. (a) Wir hatten in der Funktionentheorie gesehen, dass Real- und Imaginärteil von holomorphen Funktionen harmonisch sind.

(b) Das Vorzeichen bei der Poisson-Gleichung wird gewählt, weil der Operator $-\Delta$ positiv im Sinne der Funktionalanalysis ist. (D. h. alle seine Eigenwerte sind ≥ 0.)

Wir beginnen mit $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und suchen radialsymmetrische Lösungen der Laplace-Gleichung.

3.2 Bemerkung. Gesucht wird eine Lösung $u\colon B_r(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ von $\Delta u = 0$ der Form $u(x) = v(|x|)$, also eine rotationsinvariante Lösung. Im Fall $n = 2$ wissen wir aus Aufgabe 3 von Blatt 1, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten die Gestalt

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} u_r$$

hat.

In beliebigen Dimensionen ist u genau dann in $B_r(0) \setminus \{0\}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung, wenn

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0.$$

Das ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung in v'. Wir erhalten

$$v(r) = \begin{cases} C_1 \ln r + C_2, & n = 2, \\ \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2, & n \geq 3. \end{cases}$$

Man beachte, dass die einzigen radialen Lösungen von $\Delta u = 0$ in $B_r(0)$ die konstanten Funktionen sind.

3.3 Definition. Die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln(|x|), & n = 2, \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

ist die *Fundamentallösung* der Laplace-Gleichung in n-Dimensionen. Hierbei ist $\alpha(n)$ das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Aus der Analysis III wissen wir $\alpha(3) = \frac{4}{3}\pi$.

Die Wahl der Vorfaktoren wird später einsichtig. Die Fundamentallösung ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Man kann die Fundamentallösung nutzen, das Poisson-Problem im ganzen $\mathbb{R}^n$ zu lösen. Um das zu tun, benötigen wir die Greenschen Formeln.

4 Anwendung der Fundamentallösung

Wir verwenden den Nabla-Operator $\nabla u = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$. Mit $\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n u_j \overline{v}_j$ wird das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$ bezeichnet.

Ich wiederhole die Sätze 18.15 und 18.16 der Analysis III aus dem Winter 2021/22.

4.1 Theorem (Erste Greensche Formel). *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein* C^1*-Polyeder, sei* $f \in \overline{C}^1(U)$ *und sei* $g \in \overline{C}^2(U)$*. Dann gilt*

$$\int_U f\Delta g \, d\lambda_n = \int_{\partial U} f \frac{\partial g}{\partial \nu} \, d\sigma - \int_U \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d\lambda_n.$$

4.2 Theorem (Zweite Greensche Formel). *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein* C^1*-Polyeder und seien* $f, g \in \overline{C}^2(U)$*. Dann gilt*

$$\int_U (f\Delta g - g\Delta f) \, d\lambda_n = \int_{\partial U} \left(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Die Definition eines C^k-Polyeders war Definition 15.12 der Analysis III. Ich möchte sie nicht wiederholen. Es genügt für's erste zu wissen, dass klassische Polyeder und glatt berandete offene Mengen wie etwa Kugeln für jedes k zur Klasse der C^k-Polyeder gehören.

4.3 Satz (Abstrakte Polarkoordinaten). *Für ein* $R > 0$ *sei* $f \in C(B_R(0) \setminus \{0\}) \cap L^1(B_R(0))$*. Dann gilt*

$$\int_{B_R(0)} f \, d\lambda_n = \int_0^R \int_{\partial B_r(0)} f \, d\sigma \, dr. \tag{4.1}$$

Satz 4.3 ist ein Spezialfall der Koflächenformel (siehe Evans, Appendix C, Theorem 5).

4.4 Beispiel. Sei $\lambda_n(B^1(0))$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel und sei $\sigma(\partial B_r(0))$ die Oberfläche der n-dimensionalen Kugel vom Radius r. Aus Homogenitätsgründen gilt

$$\sigma(\partial B_r(0)) = r^{n-1}\sigma(\partial B_1(0)).$$

Mit der Koflächenformel folgt

$$\lambda_n(B^1(0)) = \int_0^1 \sigma(\partial B_r(0)) \, dr = \int_0^1 r^{n-1} \, dr \, \sigma(\partial B_1(0)) = \frac{1}{n}\sigma(\partial B_r(0)).$$

Die in §3 bestimmte Fundamentallösung bezeichnen wir nun mit Φ, also

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln(|x|), & n = 2, \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

4.5 Lemma. *Für jede beschränkte, borelmessbare Menge* M *gilt* $\Phi \in L^1(M)$.

4.6 Definition. Für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bezeichnet man $\operatorname{Supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}}$ als *Träger* von f. Für offenes $U \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet man mit $C_c^k(U)$ den Raum aller Funktionen von der Klasse C^k, deren Träger kompakt ist und in U liegt.

4.7 Theorem. *Sei* $n \geq 2$ *und sei* $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. *Für* $x \in \mathbb{R}^n$ *setze*

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y| f(y)\, d\lambda_2(y), & n = 2, \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \dfrac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} d\lambda_n(y), & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *und* u *löst die Poisson-Gleichung*

$$-\Delta u = f.$$

Bemerkung. Man beachte, dass $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) * \Phi(y-x)\, d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(y-x) * \Phi(x)\, d\lambda_n(y)$ und dass $\Delta\Phi(x) = 0$ für $x \neq 0$. Das zeigt, dass bei diesem Integral der Laplace-Operator nicht mit dem Integral vertauscht.

5 Die Mittelwertseigenschaft

5.1 Theorem (Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen). *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $u\colon U \to \mathbb{R}$ *harmonisch. Ferner sei* $\overline{B}_r(x) \subset U$. *Mit* σ *werde das Oberflächenmaß auf* $\partial B_r(x)$ *bezeichnet. Dann*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma$$

und

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)} \int_{B_r(x)} u \, d\lambda_n.$$

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist wahr:

5.2 Satz. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $u \in C^2(U)$. *Falls zu jedem* $x \in U$ *ein* $r_0 > 0$ *existiert, so dass* $B_{r_0}(x) \subseteq U$ *und für alle* $r < r_0$ *die Mittelwertgleichung*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma$$

gilt, so ist u *harmonisch.*

5.3 Korollar. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $u \in C^2(U)$. *Falls zu jedem* $x \in U$ *ein* $r_0 > 0$ *existiert, so dass* $B_{r_0}(x) \subseteq U$ *und für alle* $r < r_0$ *die Mittelwertgleichung*

$$u(x) = \frac{1}{\lambda_n(B_r(x))} \int_{B_r(x)} u \, d\lambda_n(x)$$

gilt, so ist u *harmonisch.*

Wiederholung. Ein metrischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es in ihm höchstens zwei Mengen gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind (nämlich $\emptyset$ und X).

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ ist genau dann offen in X, wenn es eine offene Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $M = G \cap X$, und M ist genau dann abgeschlossen in X, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $M = A \cap X$.

5.4 Theorem (Starkes Maximumprinzip). *Es sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und zusammenhängend. Es sei* $u \in C^2(U)$ *harmonisch in* U. *Falls es ein* $x_0 \in U$ *gibt, so dass* $u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$, *so ist* u *konstant.*

5.5 Korollar. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und es sei $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ harmonisch in U. Dann nimmt die Funktion u ihr Maximum in ∂U an.*

Die beiden Formulierungen des Maximumprinzips gelten auch, wenn man Maximum durch Minimum erstetzt.

5.6 Bezeichnung. Das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, && \text{in } U, \\ u &= g, && \text{in } \partial U. \end{aligned}$$

heißt *Randwertproblem*; dabei bedeutet die zweite Forderung, dass $\lim_{y \to x} u(y) = g(x)$ für alle $x \in \partial U$.

5.7 Satz. *Für beschränktes, offenes U gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ des Randwertproblems 5.6.*

5.8 Bemerkung. Wie in Bemerkung 12.7 der Analysis I zeigt man, dass die Funktion

$$\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

von der Klasse C^∞ ist. Dabei wird C so gewählt, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, d\lambda_n = 1$. Für $\epsilon > 0$ setzt man

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Dann $\eta_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{Supp}(\eta_\epsilon) = \overline{B}_\epsilon(0)$, $\eta_\epsilon(x) \geq 0$ für alle x und $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon d\lambda_n = 1$.

5.9 Satz. *Sei U offen im $\mathbb{R}^n$ und sei u harmonisch in U. Dann $u \in C^\infty(U)$.*

6 Greensche Funktion

Wir wollen das Randwertproblem 5.6 mittels der Fundamentallösung Φ lösen. Nach Theorem 4.7 wird für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung u der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ gegeben durch $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\Phi(y-x)d\lambda_n(y)$.

6.1 Lemma. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $u \in C^1(U)$*. Dann gelten für alle* $x \in U$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y)\left\langle \nabla_y \Phi(y-x), \nu(y)\right\rangle d\sigma(y) = -u(x),$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B_\epsilon(x)} \Phi(y-x)\left\langle \nabla u(y), \nu(y)\right\rangle d\sigma(y) = 0.$$

Wir zeigen zuerst eine Variante von Theorem 4.7 mit Rand.

6.2 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt mit glattem Rand. Für* $u \in C^2(\overline{U})$ *gilt für alle* $x \in U$

$$u(x) = \int_{\partial U} \left(\Phi(y-x)\left\langle \nabla u, \nu\right\rangle - u(y)\left\langle \nabla_y\Phi(y-x), \nu\right\rangle\right) d\sigma(y) - \int_U \Phi(y-x)\Delta u(y)d\lambda_n(y).$$

Beweis. Wähle $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B}_\epsilon(x) \subset U$ und setze $V_\epsilon = U \setminus \overline{B}_\epsilon(x)$. Dann

$$\int_U \Phi(y-x)\Delta u(y)d\lambda_n(y) = I_1 + I_2$$

mit

$$I_1 = \int_{V_\epsilon} \Phi(y-x)\Delta u(y)d\lambda_n(y)$$
$$I_2 = \int_{B_\epsilon(x)} \Phi(y-x)\Delta u(y)d\lambda_n(y).$$

Wegen $u \in C^2(U)$ und Lemma 4.5 ist der Integrand von I_2 integrierbar und aus dem Lebesgueschen Grenzwertsatz folgt die Konvergenz von I_2 gegen 0. Bei der Berechnung von I_1 verwenden wir die zweite Greensche Formel, beachten, dass die äußere Einheitsnormale an $\partial B_\epsilon(x)$ die negative der äußeren Einheitsnormalen an V_ϵ ist, und erhalten $I_1 = I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7$ mit

$$I_3 = \int_{V_\epsilon} \Delta\Phi(x-y)u(y)d\lambda_n(y) = 0,$$
$$I_4 = \int_{\partial U} \Phi(y-x)\left\langle \nabla u(y), \nu\right\rangle d\sigma(y),$$

$$
\begin{aligned}
I_5 &= -\int_{\partial B_\epsilon(x)} \Phi(y-x)\,\langle \nabla u(y), \nu\rangle \,d\sigma(y),\\
I_6 &= -\int_{\partial U} u(y)\,\langle \nabla\Phi(y-x), \nu\rangle \,d\sigma(y),\\
I_7 &= \int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y)\,\langle \nabla\Phi(y-x), \nu\rangle \,d\sigma(y).
\end{aligned}
$$

I_4 und I_6 tauchen in der Behauptung auf. Nach Lemma 6.1 konvergiert I_5 gegen 0 und I_7 gegen $-u(x)$. □

6.3 Definition. Ein *Gebiet* ist eine offene, zusammenhängende Menge im $\mathbb{R}^n$.

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Falls für jedes $x \in U$ das Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi^x(y) &= 0 && \text{in } U\\
\varphi^x(y) &= \Phi(y-x) && \text{in } \partial U
\end{aligned}
$$

eine Lösung $\varphi^x \in C^2(\overline{U})$ besitzt, so bezeichnet man die Funktion

$$
G\colon \{(x,y) \in U^2 \mid x \neq y\} \to \mathbb{R}, \qquad G(x,y) = \Phi(y-x) - \varphi^x(y)
$$

als *Greensche Funktion* von U.

Bemerkung. Wir werden später die Forderung an die Randregularität der Greenschen Funktion etwas abschwächen müssen.

6.4 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, welches eine Greensche Funktion G besitzt. Ferner sei $u \in C^2(\overline{U})$. Dann gilt für alle $x \in U$*

$$
u(x) = -\int_{\partial U} u(y)\,\langle \nabla_y G(x,y), \nu\rangle \,d\sigma(y) - \int_U G(x,y)\Delta u(y)\,d\lambda_n(y). \tag{6.1}
$$

Beweis. Alle ∇ und Δ beziehen sich auf y. Die rechte Seite ist gleich

$$
-\int_{\partial U} u\,\langle \nabla\Phi(y-x), \nu\rangle \,d\sigma - \int_U \Phi\,\Delta u\,d\lambda_n + \int_{\partial U} u\,\langle \varphi^x, \nu\rangle \,d\sigma + \int_U \varphi^x\,\Delta u\,d\lambda_n.
$$

Nun verwenden wir für die ersten beiden Terme den Satz 6.2 und für den letzten die zweite Greensche Formel und erhalten

$$
\begin{aligned}
u(x) - \int_{\partial U} \Phi(y-x)\,\langle \nabla u, \nu\rangle \,d\sigma + \int_{\partial U} u\,\langle \nabla\varphi^x, \nu\rangle \,d\sigma + \int_U u\,\Delta\varphi^x\,d\lambda_n&\\
+ \int_{\partial U} \varphi^x\,\langle \nabla u, \nu\rangle \,d\sigma - \int_{\partial U} u\,\langle \nabla\varphi^x, \nu\rangle \,d\sigma &= u(x),
\end{aligned}
$$

denn der dritte und der sechste Term heben sich weg und die Summe aus dem zweiten und dem fünften verschwindet wegen der Randbedingungen von φ^x. □

6.5 Theorem. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, welches eine Greensche Funktion G besitzt. Ferner sei $u \in C^2(\overline{U})$ eine Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \textit{in } U \\ u &= g \quad \textit{in } \partial U. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Dann gilt für alle $x \in U$

$$u(x) = -\int_{\partial U} g(y) \langle \nabla_y G(x,y), \nu \rangle \, d\sigma(y) + \int_U G(x,y) f(y) d\lambda_n(y). \tag{6.3}$$

6.6 Satz (Symmetrie der Greenschen Funktion). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, welches eine Greensche Funktion G besitzt. Dann gilt $G(x,y) = G(y,x)$ für alle $x, y \in U$ mit $x \neq y$.*

Um zu zeigen, dass die durch (6.3) gegebene Funktion unter genügend starken Voraussetzungen das Randwertproblem tatsächlich löst, verwende ich einen Satz aus der Funktionalanalysis, den ich nicht beweisen werde.

6.7 Theorem (Whitneyscher Fortsetzungssatz). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ glatt berandet und beschränkt. Es sei $f \in C^2(\overline{U})$ und es sei $h \in C^2(\partial U)$, wobei letzteres meint, dass die Verknüpfung von h mit allen lokalen Parametrisierungen von der Klasse C^2 ist. Dann existieren Funktionen $F, H \in C^2(\mathbb{R}^n)$, so dass $F(x) = f(x)$ für alle $x \in \overline{U}$ und $H(x) = h(x)$ für alle $x \in \partial U$.*

Beweis. Das ist ein Spezialfall des Satzes, der gezeigt gezeigt wird in: H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **36**, No. 1 (1934), 63–89. □

6.8 Theorem. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, welches eine Greensche Funktion G besitzt, welche sogar in $C^3\left(\overline{U}^2 \setminus \left\{(x,y) \in \overline{U}^2 \middle| x = y\right\}\right)$ liegt. Ferner seien $f \in C^2(\overline{U})$ und $g \in C^2(\partial U)$ gegeben. Dann wird durch (6.3) eine Lösung des Randwertproblems (6.2) gegeben.*

Die Formulierung von Theorem 6.8 ist alles andere als optimal. Courant und Hilbert zeigen das Theorem in Kapitel 5 § 14 unter schwächeren Voraussetzungen. Der moderne Zugang löst Randwertprobleme allerdings in zwei Schritten: zuerst wird die Existenz einer Lösung im schwachen Sinn mit den Mitteln der Funktionalanalysis gezeigt und danach analytisch deren Regularität in Abhängigkeit von der Randregularität.

6.9 Bemerkung. Der *Halbraum* ist $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Die *Spiegelung* am Rand bildet $x \in \mathbb{R}^n_+$ ab auf $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$. Damit lässt sich leicht eine Funktion $\varphi^x \colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ finden mit

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^x(y) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ \varphi^x(y) &= \Phi(y - x) && \text{in } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

nämlich $\varphi^x(y) = \Phi(y - \widetilde{x})$.

Die Funktion $\Phi(y-x) - \Phi(y-\widetilde{x})$ wird gelegentlich als Greensche Funktion des Halbraums bezeichnet, obwohl der Halbraum unbeschränkt ist und deswegen keine Greensche Funktion im Sinne von Definition 6.3 besitzt. Da die Greensche Funktion offensichtlich von der Klasse C^3 ist, gilt Theorem 6.8, wenn man zusätzlich voraussetzt, dass g und f kompakten Träger haben.

6.10 Bezeichnung. Die *Spiegelung an der Einheitssphäre* bildet $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ab auf

$$\widetilde{x} = \frac{x}{|x|^2}.$$

6.11 Satz. *Die Greensche Funktion der Einheitskugel ist*

$$G(x,y) = \begin{cases} \Phi(x-y) - \Phi\big(|x|(y-\widetilde{x})\big), & x \neq 0, \\ \Phi(y) - \Phi(1,0,\dots,0), & x = 0. \end{cases}$$

6.12 Definition. Für $n \geq 2$, $x \in B_1(0)$, $y \in \partial B_1(0)$ und ν die äußere Einheitsnormale an $B_1(0)$ definieren wir den *Poisson-Kern* durch

$$K(x,y) = -\left\langle \nabla_y G(x,y), \nu \right\rangle.$$

6.13 Satz. *Für $n \geq 2$ gilt*

$$K(x,y) = \frac{r^2 - |x|^2}{rn\alpha(n)|x-y|^n}, \qquad x \in B_r^{(n)}(0),\ y \in \partial B_r^{(n)}(0).$$

Der Poisson-Kern ist harmonisch in x.

Bemerkung. Man beachte $2\alpha(2) = 2\pi$.

6.14 Theorem. *Es seien $n \geq 2$ und es sei K der Poisson-Kern. Für $g \in C(\partial B_1(0))$ setze*

$$u(x) = \int_{\partial B_1(0)} g(y) K(x,y)\, d\sigma(y).$$

Dann löst u das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \textit{in } B_1(0) \\ u &= g && \textit{in } \partial B_1(0) \end{aligned}$$

Bemerkung. (a) Ein Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} \Delta u &= -f && \text{in } U \\ u &= g && \text{in } \partial U \end{aligned}$$

bezeichnet man als *Dirichlet-Problem* für die Poisson-Gleichung. Ein Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} \Delta u &= -f && \text{in } U \\ \langle \nabla u, \nu \rangle &= g && \text{in } \partial U \end{aligned}$$

ist ein *Neumann-Problem.*

(b) In Courant/Hilbert, "Methoden der Mathematischen Physik I" werden Greensche Funktionen für andere Gebiete konstruiert, nämlich für Rechteck, Quader und Kreisring.

7 Die Wärmeleitungsgleichung

7.1 Definition. Die partielle Differentialgleichung

$$u_t - \Delta u = 0$$

ist die *homogene Wärmeleitungsgleichung*, die Gleichung

$$u_t - \Delta u = f$$

ist die *inhomogene Wärmeleitungsgleichung*. Statt Wärmeleitungsgleichung sagt man auch *Diffusionsgleichung*.

Dabei gilt die Vereinbarung, dass t die Zeitvariable ist und Δ nur auf die Raumvariablen wirkt.

7.2 Definition. Die Funktion $\Phi\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

heißt *Fundamentallösung* für die Wärmeleitungsgleichung.

7.3 Lemma. $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\})$. *Ferner gilt* $\Phi_t - \Delta\Phi = 0$ *in* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$.

7.4 Lemma. *Für jedes* $t > 0$ *gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) d\lambda_n(x) = 1.$$

7.5 Definition. Eine *Anfangswertproblem* (*Cauchy-Problem*) für die Wärmeleitungsgleichung ist eine Aufgabe der Form

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \text{in } \mathbb{R}^n \times \,]0,\infty[\\ u &= g && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

Dabei ist die letzte Zeile zu verstehen als

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(\xi,0) \\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u(x,t) = g(\xi) \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

7.6 Theorem. *Für* $g \in C(\mathbb{R}^n)$ *beschränkt setze*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)\,d\lambda_n(y).$$

Dann $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$ *und* u *löst das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u &= g && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

Bemerkung. Man beachte, dass die Lösung des Anfangswertproblems unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit zeigt.

7.7 Theorem. *Sei* $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$*, so dass* $\sup\{|f(x,t)| \mid x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t \leq T\} < \infty$ *für jedes* $T > 0$*. Für* $t > 0$ *sei*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)\,d\lambda_n(y)\,ds.$$

Dann liegt u *in* $C^2(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$ *und ist Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \textit{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

7.8 Korollar. *Sei* $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$*, so dass* $\sup\{|f(x,t)| \mid x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t \leq T\} < \infty$ *für jedes* $T > 0$*, und sei* $g \in C(\mathbb{R}^n)$ *beschränkt. Dann löst*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)\,d\lambda_n(y) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)\,d\lambda_n(y)\,ds$$

das inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta v &= f && \textit{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u &= g && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

8 Etwas Fourieranalysis

In diesem Kapitel werden einige Ergebnisse über Fourierreihen ohne Beweis zusammengetragen. Theorem 8.3 wird in der Einführung in die Funktionalanalysis gezeigt.

Wie immer bezeichnet $\mathbb{K}$ einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

8.1 Definition. Es sei $1 \leq p < \infty$.

(a) Für $I \subseteq \mathbb{Z}$ setzen wir

$$\ell^p(I) = \left\{ (b_k)_{k\in I} \;\middle|\; b_k \in \mathbb{C}, \sum_{k\in I} |b_k|^p < \infty \right\}$$

Wir schreiben ℓ^p anstelle von $\ell^p(\mathbb{N})$.

(b) Für eine Borelmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$L^p(U) = \left\{ f\colon U \to \mathbb{K} \;\middle|\; \int_U |f|^p \, d\lambda_n < \infty \right\}$$

.

8.2 Definition. (a) Man versieht $\ell^p(I)$ mit der Norm

$$\|(b_k)_{k\in I}\|_p = \left(\sum_{k\in I} |b_k|^p \right)^{1/p}$$

und $L^p(U)$ mit der Norm

$$\|f\|_p = \left(\int_U |f|^p \, d\lambda_n \right)^{1/p}.$$

Der Satz von Riesz-Fischer (siehe Satz 11.10 der Analysis III) sagt aus, dass $\ell^p(I)$ und $L^p(U)$ Banachräume sind.

(b) Wenn man $\ell^2(I)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle (b_k)_{k\in I}, (c_k)_{k\in I} \rangle = \sum_{k\in I} b_k \overline{c}_k$$

versieht, dann ist $\ell^2(I)$ ein Hilbertraum.

(c) Analog wird $L^2(U)$ durch das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_U f\,\overline{g}\,d\lambda_n$$

zu einem Hilbertraum.

8.3 Theorem. *Für* $f \in L^2([0,1])$ *setze*

$$\begin{aligned}
c_k &= \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i k x}\,d\lambda_1(x), && k \in \mathbb{Z},\\
a_k &= \int_0^1 f(x)\cos(2\pi k x)\,d\lambda_1(x), && k \in \mathbb{N}_0,\\
b_k &= \int_0^1 f(x)\sin(2\pi k x)\,d\lambda_1(x), && k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Dann gelten

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x},\\
f(x) &= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(2\pi k x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi k x)
\end{aligned}$$

im L^2*-Sinn. Insbesondere sind linke und rechte Seite nur* λ_1*-fast überall gleich.*

8.4 Theorem (Satz von Fejér). *Sei* $f \in L^1([0,1])$. *Die* 1*-periodische Fortsetzung von* f *sei stetig in* x. *Dann gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n e^{2\pi i n x} = f(x).$$

8.5 Beispiel. Für $x \in [0,1]$ setze

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{2},\\ 2-2x, & \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$$

Dann $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_{2j} = 0$ für $j \neq 0$ und $c_{2j+1} = \frac{-2}{\pi^2(2j+1)^2}$ für $j \in \mathbb{N}_0$. Wegen Theorem 8.3 gilt

$$f(x) = \frac{1}{2} - 4\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(2j+1)^2}\cos(2\pi(2j+1)x) \tag{8.1}$$

im L^2-Sinn. Für jedes x sagt der Satz 8.4 von Fejér erstmal folgendes aus

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{N}\left(1 - \frac{2j+1}{2N+1}\right)\frac{-4}{\pi^2(2j+1)^2}\cos(2\pi(2j+1)x)\right).$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (8.1) ist der zusätzliche Term in der Fejér-Reihe nicht erforderlich. Setzt man beispielsweise $x = \frac{1}{2}$ ein, so bekommt man

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

9 Die Wärmeleitungsgleichung, Teil II

9.1 Bemerkung. Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Randbedingungen. Es sei $U =]0,1[$. Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in }]0,1[\times]0,\infty[\\ u &= 0 && \text{in } \{0,1\} \times]0,\infty[\end{aligned}$$

Ansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ führt zu

$$v''(x)w(t) = v(x)w'(t)$$

also gibt es eine Konstante C mit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)} = C$$

Die Randbedingung führt zu $v(0) = v(1) = 0$.

Fall $C = 0$: Dann $v(x) = ax + b$. Das ist nur für $a = b = 0$ mit den Randbedingungen vereinbar.

Fall $C > 0$: Dann $v(x) = ae^{\sqrt{C}x} + be^{-\sqrt{C}x}$. Die Randbedingungen führen zu $a+b = 0$ und $ae^{\sqrt{C}} + be^{-\sqrt{C}} = 0$, also $a = b = 0$.

Fall $C < 0$. Sei $\omega = \sqrt{-C} > 0$. Dann $v(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$. Die Randbedingungen führen zu $a = 0$ und $b\sin(\omega) = 0$. Für $\omega \in \pi\mathbb{N}$ erhalten wir nicht-triviale Lösungen der Randwertaufgabe

$$u(x,t) = \sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}.$$

9.2 Lemma. *Für* $a \in \mathbb{R}$ *und* $t > 0$ *gelten*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) e^{iay}\, dy = 2\sqrt{\pi t}e^{iax - a^2 t}.$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \sin(ay)\, dy = 2\sqrt{\pi t}\sin(ax)e^{-a^2 t}.$$

9.3 Satz. *Für* $g \in C([0,1])$ *mit* $g(0) = g(1) = 0$ *definieren wir* h *als die 2-periodische Fortsetzung von*

$$x \mapsto \begin{cases} g(x), & 0 \le x \le 1, \\ -g(-x), & -1 \le x < 0, \end{cases}$$

und setzen

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) h(y)\,dy.$$

Dann löst u *das Anfangs- und Randwertproblem*

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \quad \text{in }]0,1[\times]0,\infty[\\ u &= 0 \quad \text{in } \{0,1\}\times]0,\infty[\quad \text{Randbedingung} \\ u &= g \quad \text{in }]0,1[\times\{0\} \qquad \text{Anfangsbedingung.} \end{aligned} \tag{9.1}$$

In der Einführung in die Funktionalanalysis werden wir den folgenden Satz zeigen:

9.4 Satz. *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt und es sei* $m \in \mathbb{N}$. *Dann wird durch*

$$\|f\|_{C^m(\overline{U})} = \sup_{x\in U} \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le m}} \left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x)\right|$$

eine Norm auf $C^m(\overline{U})$ *gegeben, durch die* $C^m(\overline{U})$ *zu einem Banachraum wird.*

Für $|\alpha| \le m$ *ist der Differentialoperator* D^α *stetig als Abbildungen von* $C^m(\overline{U})$ *nach* $C^{m-|\alpha|}(\overline{U})$.

9.5 Satz. *Für* $g \in C([0,1])$ *mit* $g(0) = g(1) = 0$ *gebe es eine Folge* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, *so dass für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sum_{k=1}^\infty b_k \sin(k\pi x) = g(x)$. *Dann konvergiert die Reihe*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}$$

für jede Wahl von $0 < t_1 < t_2$ *in* $C^2([0,1]\times[t_1,t_2])$ *und löst das Anfangs- und Randwertproblem*

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \qquad \text{in }]0,1[\times]0,\infty[\\ u &= 0 \qquad \text{in } \{0,1\}\times]0,\infty[\qquad \text{Randbedingung} \\ u &= g \qquad \text{in }]0,1[\times\{0\} \qquad\quad \text{Anfangsbedingung} \end{aligned}$$

Die *Spur* $\operatorname{tr} M$ einer quadratischen Matrix M ist gleich der Summe ihrer Diagonaleinträge. Die Spur ist invariant unter Basiswechseln. Daher ist sie gleich der Summe der Eigenwerte.

Wenn $w\colon U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 ist, so bezeichnen wir mit H_w ihre Hessematrix. Offenbar gilt $\Delta w = \operatorname{tr} H_w$.

9.6 Lemma. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $w \in C^2(U)$. *Für* $x_0 \in U$ *gelte* $\nabla w(x_0) = 0$ *und* $\Delta w(x_0) > 0$. *Dann existiert* $a \in \mathbb{R}^n$, *so dass die Funktion* $t \mapsto w(x_0 + ta)$ *in* 0 *ein striktes lokales Minimum besitzt.*

9.7 Theorem (Maximumprinzip). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt, sei* $u \in C^2(U\times]0,\infty[) \cap C(\overline{U}\times[0,\infty[)$ *eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung* $u_t - \Delta u = 0$*. Dann gilt für jedes* $T > 0$

$$\max\{u(x,t) \mid x \in \overline{U} \textit{ und } 0 \le t \le T\} = \max\{u(x,t) \mid (x \in \partial U \textit{ und } t \le T) \textit{ oder } t = 0\}.$$

9.8 Korollar (Eindeutigkeit). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt, seien* $u, v \in C^2(U\times]0,\infty[) \cap C(\overline{U}\times[0,\infty[)$ *Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung. Es sei* $u(x,0) = v(x,0)$ *für alle* $x \in \overline{U}$*, und für ein* $T > 0$ *gelte* $u(x,t) = v(x,t)$ *für alle* $x \in \partial U$*,* $t \in [0,T]$*. Dann stimmen* u *und* v *in* $\overline{U} \times [0,T]$ *überein.*

Die Aussage, dass Randwerte für Zeiten $t > T$ die Lösung zu Zeiten $t < T$ nicht beeinflussen, entspricht der Kausalität in der physischen Welt.

9.9 Korollar (Stabilität). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt, seien* $h^{(1)}, h^{(2)} \in C(\partial U \times [0,\infty[)$ *und* $g^{(1)}, g^{(2)} \in C(\overline{U} \times \{0\})$*. Für alle* $(x,t) \in \partial U \times [0,\infty[$ *gelte* $|h^{(1)}(x,t) - h^{(2)}(x,t)| \le \epsilon$ *und für alle* $x \in \overline{U}$ *gelte* $|g^{(1)}(x,0) - g^{(2)}(x,0)| \le \epsilon$*. Falls es für* $j = 1,2$ *jeweils eine Lösung* $u^{(j)} \in C^2(U \times (0,\infty)) \cap C(\overline{U} \times [0,\infty))$ *von*

$$\begin{aligned} u_t^{(j)} - \Delta u^{(j)} &= 0 && \textit{in } U \times]0,\infty[\\ u^{(j)} &= h^{(j)} && \textit{in } \partial U \times]0,\infty[\\ u^{(j)} &= g^{(j)} && \textit{in } U \times \{0\}, \end{aligned}$$

gibt, so gilt $|u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)| \le \epsilon$ *für alle* $(x,t) \in \overline{U} \times [0,\infty[$*.*

9.10 Definition. (a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und es sei $T > 0$. Dann ist $U_T = U \times]0,T]$ der *parabolische Zylinder* über U und $\Gamma_T = \overline{U}_T \setminus U_T$ der *parabolische Rand* von U_T.

(b) Eine Funktion $u\colon U_T \to \mathbb{R}$ liegt in $C_1^2(U_T)$, wenn u, u_t und die Raumableitungen erster und zweiter Ordnung in $C(U_T)$ liegen.

9.11 Theorem (Maximumprinzip für das Cauchyproblem). *Es sei* $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times]0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *eine Lösung von*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, && \textit{in } \mathbb{R}^n \times]0,T], \\ u &= g, && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{aligned}$$

für eine beschränkte, stetige Funktion $g \in C(\mathbb{R}^n)$*. Ferner gebe es* $a, A > 0$*, so dass*

$$u(x,t) \le Ae^{a|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T].$$

Dann gilt

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

9.12 Korollar (Eindeutigkeitssatz für das Cauchyproblem). *Seien* $g \in C(\mathbb{R}^n)$ *und* $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *gegeben. Dann existiert höchstens eine Lösung* $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times]0,T]]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f, && \textit{in } \mathbb{R}^n \times]0,T], \\ u &= g. && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{aligned}$$

welche für irgendwelche $a, A > 0$ *die Wachstumsbedingung*

$$|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2}$$

erfüllt.

Im Buch von John wird in §7.1 ein Beispiel angegeben (von Tychonoff), welches zeigt, dass man auf die Wachstumsbedingung nicht verzichten kann.

9.13 Definition. Die Differentialgleichung $u_t + \Delta u = 0$ heißt *Rückwartsdiffusionsgleichung.*

9.14 Bemerkung. (a) Sei $T > 0$. Wenn u eine Lösung des folgenden Anfangs- und Randwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung ist

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \text{in } U \times]0,T[\\ u &= 0 && \text{in } \partial U \times]0,T[\\ u &= g && \text{in } U \times \{0\}, \end{aligned}$$

dann ist $v(x,t) = u(x, T-t)$ eine Lösung des folgenden Anfangs- und Randwertproblems für die Rückwartsdiffusionsgleichung

$$\begin{aligned} v_t + \Delta v &= 0 && \text{in } U \times]0,T[\\ v &= 0 && \text{in } \partial U \times]0,T[\\ v(x,0) &= u(x,T) && \text{in } U \times \{0\}, \end{aligned}$$

(b) Eine Lösung von

$$\begin{aligned} v_t + \Delta v &= 0 && \text{in }]0,1) \times (0,T[\\ v &= 0 && \text{in } \{0,1\} \times]0,T[\\ v(x,0) &= \sin(k\pi x) && \text{in }]0,1[\times \{0\}, \end{aligned}$$

ist $v(x,t) = \sin(k\pi x)e^{k^2\pi^2 t}$.

9.15 Definition. Eine partielle Differentialgleichung zusammen mit Anfangs- und/oder Randbedingungen bezeichnet man als *korrekt gestellt*, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind

(a) Lösbarkeit: Es gibt mindestens eine Lösung

(b) Eindeutigkeit: Es gibt höchstens eine Lösung

(c) Stabilität: Die Lösung hängt stetig von den Anfangs- bzw. Randbedingungen ab

Ein Problem, welches mindestens eine der drei Bedingungen verletzt, heißt *schlecht gestellt*.

9.16 Bemerkung. (a) Alles drei hat natürlich nur einen Sinn, wenn man sich für Anfangs- und Randbedingungen sowie Lösungen auf Funktionenräune festlegt.

(b) Teil (b) der vorigen Bemerkung zeigt, dass das Anfangs- und Randwertproblem für die Rückwärtsdiffusionsgleichung schlecht gestellt ist.

10 Die Wellengleichung

10.1 Definition. Die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

heißt *Wellengleichung.*

Bemerkung. (a) In einigen Büchern findet man das Zeichen $\Box u = u_{tt} - \Delta u$.

(b) Die Wellengleichung ist von der Ordnung 2 in der Zeit. Man setzt Anfangsbedingungen für u und u_t.

Im Fall $n = 1$ lösen wir nun das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \,]0, \infty) \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\} \\ u_t &= h && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

mit der Methode von d'Alembert. Dazu beachtet man

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - u_{xx}.$$

Setzt man also $v = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u$, so gilt

$$v_t + v_x = 0.$$

Das ist eine Transportgleichung. Nach Satz 2.1 gibt es also eine Funktion a, so dass $v(x,t) = a(x-t)$ für alle x, t. Daraus ergibt sich

$$u_t(x,t) - u_x(x,t) = a(x-t).$$

Dies ist eine inhomogene Transportgleichung. Mit Satz 2.5 ergibt sich für eine vorerst unbekannte Funktion b

$$u(x,t) = b(x+t) + \int_0^t a(x - (s-t) - s)\,ds = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)\,dy + b(x+t).$$

Das müssen wir an die Anfangsbedingungen anpassen. Sofort klar ist $b = g$. Für a erhalten wir

$$a(x) = v(x,0) = u_t(x,0) - u_x(x,0) = h(x) - g'(x).$$

Das setzen wir wieder ein und erhalten

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y))dy + g(x+t) \\ &= \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy. \end{aligned} \tag{10.1}$$

10.2 Theorem. *Für $g \in C^2(\mathbb{R})$ und $h \in C^1(\mathbb{R})$ löst die Funktion u aus (10.1) die Anfangswertaufgabe*

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\} \\ u_t &= h && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

10.3 Beispiel. Die Lösung für $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ und $h = 0$ besteht aus zwei auseinander laufenden Spitzen.

Die Lösung für $g = 0$ und $h = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ besteht aus einem Plateau, welches immer größer wird. Es gilt nämlich

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x-t}^{x+t} e^{-y^2} dy = \frac{1}{4}(\operatorname{erf}(x+t) - \operatorname{erf}(x-t))$$

wobei $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2} dy$.

Die Löaung der ersten Aufgabe wird im linken und die der zweiten im rechten Bild von Abbildung 10.1 gezeigt.

10.4 Beispiel. Seien nun $g \in C^2([0, \infty[)$ mit $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ und $h \in C^1([0, \infty[)$ mit $h(0) = h'(0) = 0$. Wir lösen das Anfangs- und Randwertproblem für die Halbgerade

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in }]0, \infty[\times]0, \infty[\\ u &= 0 && \text{in } \{0\} \times]0, \infty[\\ u &= g && \text{in }]0, \infty[\times \{0\} \\ u_t &= h && \text{in }]0, \infty[\times \{0\} \end{aligned}$$

Für $x \leq 0$ definieren wir der Einfachhheit halber $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$. Dann $g \in C^2(\mathbb{R})$ und $h \in C^1(\mathbb{R})$. Wir vermuten, dass die nach links laufende Welle zurückgespiegelt wird, und machen den Ansatz

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy + k(x-t)\right),$$

wobei $k(x) = 0$ für $x \geq 0$. Für $t > 0$ muss gelten

$$0 = u(0,t) = \frac{1}{2}\left(g(t) + \int_0^t h(y)dy + k(-t)\right).$$

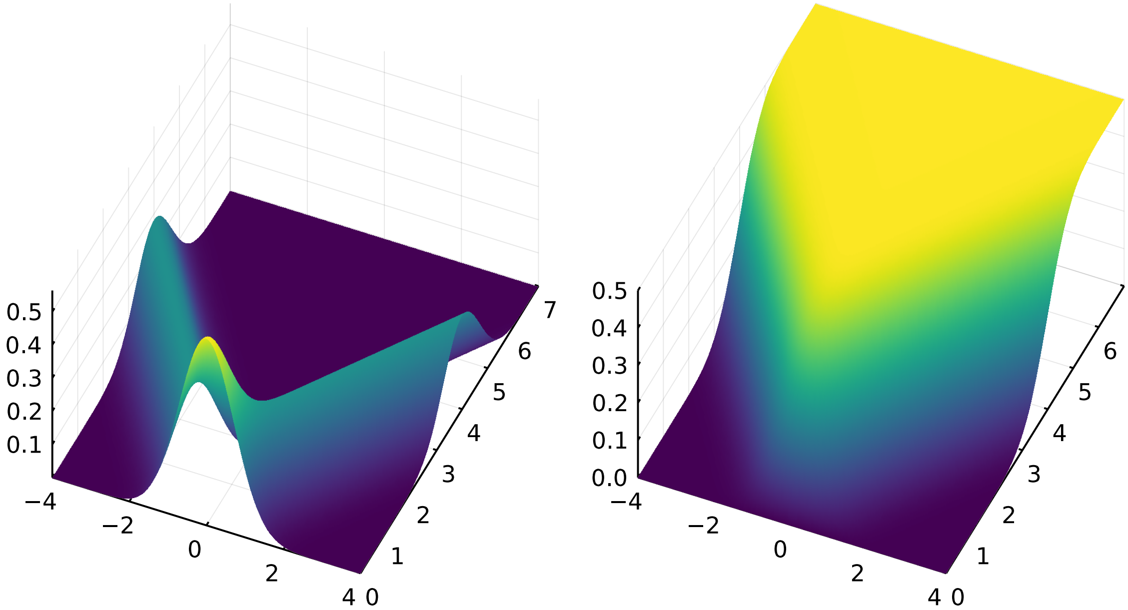

Abbildung 10.1: Graphen zu Beispiel 10.3

Das bedeutet $k(x) = -g(-x) - \int_0^{-x} h(y)dy$, $x < 0$. Dann stimmen alle anderen Bedingungen automatisch. Wir erhalten

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x) + \int_{t-x}^{t+x} h(y)dy\right), & x \le t, \\ \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy\right), & x > t. \end{cases}$$

Aus der Herleitung sieht man, dass $u \in C^2((0,\infty)^2)$.

Nun wollen wir eine Lösung für das Anfangswertproblem in $n = 2$ und $n = 3$ konstruieren. Der erste Schritt ist in allen Dimensionen möglich. Gesucht ist für $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty[)$ von

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u = 0 \quad & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u = g \quad & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \\ u_t = h \quad & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned} \tag{10.2}$$

10.5 Bezeichnung. Für $u \in C(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $r, t > 0$ setze

$$U(x,r,t) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, d\sigma(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, d\sigma(y).$$

U heißt *sphärisches Mittel* von u.

10.6 Lemma. *Wenn* u *von der Klasse* C^1 *bzw.* C^2 *ist, dann auch* U *als Funktion von* $(x, r, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\times]0, \infty[$. *Für jedes* $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ *gilt ferner*

$$\begin{aligned} \lim_{r \searrow 0} U(x, r, t) &= u(x, t), \\ U_r(x, r, t) &= \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} \Delta u(y, t) d\sigma(y) ds. \end{aligned}$$

10.7 Lemma. *Wenn* V *dass sphärische Mittel von* $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *ist, dann erfüllt* V *die* Darbouxsche Gleichung

$$V_{rr} + \frac{n-1}{r} V_r = \Delta V.$$

10.8 Satz. *Wenn* u *das Anfangswertproblem (10.2) löst, dann ist für jedes* x *das sphärische Mittel* U *Lösung der folgenden* Poisson-Darboux-Gleichung

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r &= 0 && r \in]0, \infty[, t \in]0, \infty[, \\ U &= G && r \in]0, \infty[, t = 0, \\ U_t &= H && r \in]0, \infty[, t = 0, \end{aligned}$$

wobei G *und* H *jeweils die sphärischen Mittel von* g *und* h *sind.*

Um die Poisson-Darboux-Gleichung für $n = 3$ zu lösen, setzen wir $\widetilde{U} = rU$, $\widetilde{G} = rG$ und $\widetilde{H} = rH$. Dann $\widetilde{U}_r = U + rU_r$ und $\widetilde{U}_{rr} = 2U_r + rU_{rr}$ mit entsprechenden Formeln für G und H soweit sinnvoll. Die Poisson-Darboux-Gleichung transformiert sich zu

$$\widetilde{U}_{rr} = r\left(\frac{3-1}{r} U_r + U_{rr}\right) = rU_{tt} = \widetilde{U}_{tt}.$$

Somit ist $\widetilde{U}$ eine Lösung der folgenden eindimensionalen Wellengleichung in r

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_{tt} - \widetilde{U}_{rr} &= 0 && r \in]0, \infty[, t \in]0, \infty[, \\ \widetilde{U} &= 0 && r = 0, t \in]0, \infty[, \\ \widetilde{U} &= \widetilde{G} && r \in]0, \infty[, t = 0, \\ \widetilde{U}_t &= \widetilde{H} && r \in]0, \infty[, t = 0. \end{aligned}$$

Diese Aufgabe haben wir in Beispiel 10.4 gelöst. Für $r < t$ gilt nämlich

$$\widetilde{U}(x, r, t) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{G}(x, r+t) - \widetilde{G}(x, t-r) + \int_{t-r}^{t+r} \widetilde{H}(x, \rho) d\rho\right). \tag{10.3}$$

Mit Lemma 10.6 folgt

$$u(x, t) = \lim_{r \to 0} U(x, r, t) = \lim_{r \to 0} \frac{\widetilde{U}(x, r, t)}{r} = \left(\widetilde{G}\right)_t (x, t) + \widetilde{H}(x, t).$$

Unter Verwendung der Definition des sphärischen Mittels erhält man, wenn man beachtet, dass $\alpha(3) = \frac{4}{3}\pi$ und die Substitution $y = \frac{\tilde{y}-x}{t}$ lautet,

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_t(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{3\alpha(3)t^{3-1}}\int_{B_t(x)} g(\tilde{y},t)\,d\sigma(\tilde{y})\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} g(x+ty)d\sigma(y)\right)\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} g(x+ty)d\sigma(y) + \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} \langle\nabla g(x+ty), y\rangle\, d\sigma(y)\\
&= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} g(\tilde{y})d\sigma(\tilde{y}) + \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} \langle\nabla g(\tilde{y}), \tilde{y}-x\rangle\, d\sigma(\tilde{y}).
\end{aligned} \tag{10.4}$$

Wegen

$$\widetilde{H}(x,t) = \frac{t}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} h(y)d\sigma(y) \tag{10.5}$$

haben wir die Kirchhoffsche Formel hergeleitet.

10.9 Theorem (Kirchhoffsche Formel). *Seien* $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ *und* $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *Dann wird durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} \left(th(y) + g(y) + \langle\nabla g(y), y-x\rangle\right) d\sigma(y).$$

die eindeutig bestimmt Lösung des Anfangswertproblems (10.2) gegeben.

Nun lösen wir das Ausgangsproblem (10.2) für $n = 2$ durch Dimensionsabstieg. Wir bezeichnen die 3-dimensionale Kugel mit $B_1^{(3)}(x)$ und die zweidimensionale mit $B_1(x)$ und setzen

$$\overline{u}(x_1,x_2,x_3,t) = u(x_1,x_2,t)$$

und entprechend für g und h. Wenn u eine Lösung der Wellengleichung in $n = 2$ ist, dann ist $\overline{u}$ eine in $n = 3$. Wegen (10.4) und (10.5) bedeutet das für $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \overline{u}(x_1,x_2,0,t)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1^{(3)}(0)} g(x_1+ty_1, x_2+ty_2)d\sigma(y_1,y_2,y_3)\right)\\
&\qquad + \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1^{(3)}(0)} h(x_1+ty_1, x_2+ty_2)d\sigma(y_1,y_2,y_3).
\end{aligned}$$

Das Flächenelement hatten wir beim Beweis des Satzes 4.3 über die abstrakten Polarkoordinaten bestimmt. Damit erhalten wir durch Integration über beide Halbsphären

$$\int_{\partial B_1^{(3)}(0)} g(x_1+ty_1, x_2+ty_2)d\sigma(y) = 2\int_{B_1^{(2)}(0)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}d\lambda_2(z).$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1^{(3)}(0)} g(x_1+ty_1, x_2+ty_2)\,d\sigma(y)\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{B_1(0)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}\,d\lambda_2(z) + \frac{t}{2\pi}\int_{B_1(0)} \frac{\langle \nabla g(x+tz), z\rangle}{\sqrt{1-|z|^2}}\,d\lambda_2(z)$$
$$= \frac{1}{2\pi t}\int_{B_t(x)} \frac{g(y)+\langle \nabla g(y), y-x\rangle}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,d\lambda_2(y).$$

10.10 Theorem (Poissonsche Formel für das Anfangswertproblem der ebenen Wellengleichung). *Sei* $n = 2$ *und seien* $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ *und* $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$*. Dann besitzt das Anfangswertproblem (10.2) genau eine Lösung. Diese ist gegeben durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi t}\int_{B_t(x)} \frac{g(y)+th(y)+\langle \nabla g(y), y-x\rangle}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,d\lambda_2(y).$$

Bemerkung. (a) Sowohl die Kirchhoffsche als auch die Poissonsche Formel zeigen, dass Wellen sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten.

(b) In Evans wird für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Anfangswertproblem auf dem $\mathbb{R}^n$ gelöst. Man beobachtet das *Huygenssche Prinzip*

In ungeraden Dimensionen $n \geq 3$ wirkt die Anfangsbedingung an der Stelle x nur auf die Punkte des Vorwärts-Lichtkegels

$$\{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\mid |y-x|^2 = t^2\}.$$

In geraden Dimensionen werden alle Punkte in

$$\{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\mid |y-x|^2 \leq t^2\}.$$

beeinflusst.

10.11 Beispiel. Sei $h \equiv 0$ und sei $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ radialsymmetrisch, also $g(x) = G(|x|)$ für ein $G \in C^3([0,\infty[)$. Ferner gelte $G'(0) = G'''(0) = 0$. Wir lösen das Anfangswertproblem (10.2) mit der Kirchhoffschen Formel für den Punkt $x = 0$

$$u(0,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(0)} \left(g(y) + \langle \nabla g(y), y\rangle\right) d\sigma(y).$$

In Bemerkung 3.2 hatten wir gezeigt

$$\nabla g(y) = \frac{G'(|y|)}{|y|}y.$$

Also

$$u(0,t) = G(t) + \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(0)} G'(|y|)|y|\,d\sigma(y) = G(t) + tG'(t).$$

Das Phänomen, dass räumlich verstreute Irregularitäten sich zu einer stärkeren Irregularität fokussieren, bezeichnet man als *Kaustik*.

10.12 Satz (Duhamelsches Prinzip für die Wellengleichung). *Sei* $f \in C^3(\mathbb{R}^3 \times]0,\infty[)$. *Für* $s > 0$ *sei* $v^s \in C^2(\mathbb{R}^3 \times]s,\infty[)$ *die aus der Kirchhoffschen Formel gewonnene Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$\begin{aligned} v^s_{tt} - \Delta v^s &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^n \times]s,\infty[\\ v^s &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{s\} \\ v^s_t(\cdot,s) &= f(\cdot,s) && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{s\} \end{aligned}$$

Dann ist

$$u(x,t) = \int_0^t v^s(x,t)ds$$

eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \textit{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \\ u_t &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

10.13 Satz. *Sei* $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *Dann ist*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{B_t(x)} \frac{f(y,t-|y-x|)}{|y-x|}d\lambda_3(y)$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \textit{in } \mathbb{R}^3 \times]0,\infty[\\ u &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^3 \times \{0\} \\ u_t &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^3 \times \{0\} \end{aligned}$$

11 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

11.1 Bezeichnung. Sei

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f$$

eine lineare Differentialgleichung der Ordnung k. Ihr *Symbol* ist die Funktion

$$p_k(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha. \tag{11.1}$$

Im Fall $k = 2$ ist p_2 für festes x eine quadratische Form in ξ

$$p_2(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{j,k}(x)\xi_j\xi_k = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_{1,1}(x) & b_{1,2}(x) & \dots & b_{1,n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1}(x) & b_{n,2}(x) & \dots & b_{n,n}(x)\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix}.$$

Die quadratische Matrix aus der Gleichung bezeichnen wir mit $B(x)$. Dabei darf ohne Einschränkung $b_{j,k}(x) = b_{k,j}(x)$ angenommen werden. Dann ist $B(x)$ für jedes x symmetrisch und daher reell diagonalisierbar.

11.2 Beispiel. (a) Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ in n-Raumvariablen: Dann ist $B(x)$ für jedes x die negative $n \times n$-Einheitsmatrix.

(b) Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = f$. Die Zeitvariable werde mit x_{n+1} bezeichnet. Dann ist für jedes x die $(n+1)\times(n+1)$-Matrix $B(x)$ gegeben durch

$$B(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wellengleichung $u_t - \Delta u = f$. Es sei wieder x_{n+1} die Zeitvariable. Dann ist für jedes x die $(n+1)\times(n+1)$-Matrix $B(x)$ gegeben durch

$$B(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.3 Definition. Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden nach den Vorzeichen der Eigenwerte von B geordnet. Die Gleichung (11.1) heißt

- *elliptisch* an der Stelle x, wenn alle Eigenwerte von $B(x)$ dasselbe Vorzeichen haben und $B(x)$ nicht singulär ist,
- *parabolisch* an der Stelle x, wenn $B(x)$ singulär ist und alle von Null verschiedenen Eigenwerte von $B(x)$ dasselbe Vorzeichen haben,
- *hyperbolisch* an der Stelle x, wenn $B(x)$ nicht singulär ist und genau ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die anderen hat.

Eine Differentialgleichungen heißt elliptisch, wenn sie an jeder Stelle elliptisch ist, analog für die anderen Begriffe.

Bemerkung. (a) Nur in $n = 2$ ist das zumindest für jeden Punkt eine Klassifikation.

(b) Literatur für den elliptischen Fall: Gilbarg, D., und Trudinger, N. S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order

11.4 Beispiel. Die Poisson-Gleichung ist elliptisch, die Wärmeleitungsgleichung parabolisch und die Wellengleichung ist hyperbolisch.

Bemerkung. Man vergleiche mit der Klassifikation der Kegelschnitte

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d = 0.$$

11.5 Bemerkung. Je nach Typ der Differentialgleichungen werden unterschiedliche Probleme untersucht:

- hyperbolisch: Anfangswertaufgabe (Cauchy-Problem)
- elliptisch: Randwertprobleme oder Eigenwertprobleme

  Bei einem Eigenwertproblem werden homogene Randbedingungen gestellt und dazu die Eigenwerte bestimmt
- parabolisch: Anfangs- und Randwertprobleme

11.6 Beispiel. Im $\mathbb{R}^2$ sei die Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{xy} + y^2 u_{yy} - u_x = 0$$

gegeben. Um sie zu klassifizieren, muss sie zunächst durch eine symmetrische Matrix B beschrieben werden.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & y^2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det B = y^2 - \frac{1}{4}$. Für $y = \pm\frac{1}{2}$ ist die Differentialgleichung parabolisch, für $|y| > \frac{1}{4}$ elliptisch, und für $|y| < \frac{1}{4}$ ist sie hyperbolisch.

12 Die Poröse-Medien-Gleichung

12.1 Definition. Es sei $\gamma > 1$. Die partielle Differentialgleichung

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = f$$

heißt *poröse-Medien-Gleichung*. Sie ist nur für nicht-negative u erklärt.

12.2 Bemerkung (Trennung der Variablen). Wir möchten Lösungen der homogenen Gleichung finden und machen dazu den Ansatz

$$u(x,t) = v(t)w(x).$$

Dann

$$\frac{v'(t)}{v^\gamma(t)} = \frac{\Delta(w^\gamma)(x)}{w(x)}.$$

Diese Größe hängt weder von t noch von x ab. Wir nennen sie μ. Die gewöhnliche Differentialgleichung für v löst man bequem mit dem Verfahren der Variablentrennung und erhält

$$v(t) = ((1-\gamma)\mu t + \lambda)^{1/(1-\gamma)}, \tag{12.1}$$

für beliebiges λ. Damit $v(0)$ erklärt ist, muss λ positiv sein. Bei der partiellen Differentialgleichung für w begnügen wir uns mit einem Ansatz, nämlich $w(x) = |x|^\alpha$.

Wir erhalten die Gleichung

$$\mu|x|^\alpha - \alpha\gamma(\alpha\gamma + n - 2)|x|^{\alpha\gamma-2} = 0.$$

Das bedeutet $\alpha = \alpha\gamma - 2$, also

$$\alpha = \frac{2}{\gamma - 1}$$

und $\mu = \alpha\gamma(\alpha\gamma + n - 2) = (\alpha+2)(\alpha+n) > 0$. Wegen $\mu = \frac{2\gamma(2+n(\gamma-1))}{(\gamma-1)^2}$ erhalten wir schließlich für jedes $\lambda > 0$ die Lösung

$$u(x,t) = \left(\frac{2\gamma(2+n(\gamma-1))}{1-\gamma}t + \lambda\right)^{1/(1-\gamma)} |x|^{2/(\gamma-1)}.$$

Diese Lösung ist nicht für alle Zeiten endlich. Man sagt, sie habe einen *Blow-Up in endlicher Zeit.*

12.3 Bemerkung (Barenblatt-Kompaneetz-Zeldovich-Lösung). Gesucht ist eine Lösung u, die auf die folgende Weise invariant unter Dilatationen ist

$$u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t), \lambda > 0.$$

Wenn es so eine Lösung gibt, dann können wir $\lambda = \frac{1}{t}$ setzen und erhalten

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right).$$

Wir können das nur für radiales v untersuchen, also $v(y) = w(|y|)$. Mit $y = t^{-\beta}|x|$ gelten

$$u_t(x,t) = -\alpha t^{-\alpha-1} w\left(\frac{|x|}{t^\beta}\right) - \beta t^{-\alpha-\beta-1} w'\left(\frac{|x|}{t^\beta}\right)|x| = -\alpha t^{-\alpha-1} w(y) - \beta t^{-\alpha-1} w'(y) y$$

und

$$\Delta(u^\gamma(x,t)) = t^{-\alpha\gamma-2\beta}\Delta(v^\gamma(y)).$$

Um weiter machen zu können, verlangen wir $\alpha + 1 = \alpha\gamma + 2\beta$. Den Laplace-Operator in Polarkoordinaten haben wir auch schon ausgerechnet. Also

$$\alpha w + \beta y w' + (w^\gamma)'' + \frac{n-1}{y}(w^\gamma)' = 0.$$

BKZ haben jetzt folgendes gesehen: Wenn man $\alpha = n\beta$ setzt und die Gleichung mit y^{n-1} multiplizeirt, erhält man

$$n\beta y^{n-1} w + \beta y^n w' + y^{n-1}(w^\gamma)'' + (n-1) y^{n-2}(w^\gamma)' = 0.$$

Das ist aber eine Ableitung. Daher

$$\beta (y^n w)' + \left(y^{n-1}(w^\gamma)'\right)' = 0.$$

Die Integrationskonstante wird so gewählt, dass die Größen im Unendlichen verschwinden. Dann $\beta y^n w + y^{n-1}(w^\gamma)' = 0$, also

$$(w^\gamma)' = -\beta y w.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\gamma w^{\gamma-1} w' = \gamma w\, w^{\gamma-2} w' = w \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(w^{\gamma-1}\right)'.$$

Also

$$\left(w^{\gamma-1}\right)' = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\beta y$$

und daher

$$w^{\gamma-1} = b - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\beta y^2$$

für beliebiges $b > 0$. Die rechte Seite ist negativ für große y. Für beliebiges $b > 0$ ist die Barenblatt-Kompaneetz-Zeldovich Lösung der poröse-Medien-Gleichung gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{t^\alpha}\left(b - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}\right)^{1/(\gamma-1)}, & |x| < r(t), \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{n(\gamma-1)+2}, \quad \alpha = n\beta, \quad \text{und} \quad r(t) = t^\beta\sqrt{\frac{2b\gamma}{\beta(\gamma-1)}}.$$

Die Lösung ist i. a. für (x,t) mit $|x| = r(t)$ nicht differenzierbar. Man interpretiert das als *freies Randwertproblem*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta(u^\gamma) &= f && \text{in } U, \\ u &= 0 && \text{in } \{(x,t) \in \partial U | t > 0\}, \end{aligned}$$

wobei die Bestimmung von U zum Problem gehört.

Im Fall der BKZ-Lösung ist $U = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| |x| < r(t)\right\}$.

13 Die Methode der Charakteristiken

13.1 Bezeichnung. In diesem Abschnitt behandeln wir nicht notwendig lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, welche auch implizit sein können. Sie werden geschrieben als

$$F(\nabla u, u, x) = 0 \tag{13.1}$$

wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist und F eine Abbildung

$$F \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U} \to \mathbb{R}.$$

Die Elemente von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U}$ bezeichnen mit (p, z, x). Wir verwenden auch Abkürzungen für die Bestandteile des Gradienten

$$\nabla F(p, z, x) = (D_p F, D_z F, D_x F).$$

13.2 Beispiel. (a) Die Transportgleichung gehört in diese Klasse. In diesem Fall war $U = \mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ und $F(p_1, \dots, p_{n+1}, z, x_1, \dots, x_{n+1}) = p_{n+1} + \sum_{j=1}^n b_j p_j$.

(b) Eine voll nichtlineare Gleichung ist $u_{x_1} u_{x_2} = u$. Die zugehörige Funktion ist $F(p_1, p_2, z, x_1, x_2) = p_1 p_2 - z$.

Zusätzlich zu den Daten aus 13.1 sei noch eine Anfangs- bzw. Randbedingung in $\Gamma \subseteq \partial U$ gegeben. Das Ziel der Methode der Charakteristiken besteht darin, die Punkte von U auf solchen Wegen $x(s) = (x^1(s), \dots, x^n(s))$ mit Punkten in Γ zu verbinden, dass die Einschränkung der partiellen Differentialgleichung auf den Weg eine gewöhnliche Differentialgleichung ist.

Für $x(s)$ wie oben setzen wir $z(s) = u(x(s))$ und $p(s) = \nabla u(x(s))$ mit Komponenten $p^j(s)$.

Im folgenden bezeichnen wir die Ableitung nach s durch einen Punkt, also

$$\frac{\partial a}{\partial s} =: \dot{a}.$$

Man differenziert zuerst die Gleichung $p^i(s) = u_{x_i}(s)$ und erhält

$$\dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(x(s)) \dot{x}^j(s).$$

Nun differenziert man die Differentialgleichung nach x^i

$$\sum_{j=1}^n F_{p_j}(\nabla u, u, x) u_{x_j x_i} + F_z(\nabla u, u, x) u_{x_i} + F_{x_i}(\nabla u, u, x) = 0.$$

In diese Gleichung setzen wir den (vorerst unbekannten) Weg ein

$$\sum_{j=1}^{n} F_{p_j}(p(s), z(s), x(s)) u_{x_i x_j}(x(s)) + F_z(p(s), z(s), x(s)) p^i(s) + F_{x_j}(p(s), z(s), x(s)) = 0.$$

Bis jetzt ist nichts passiert. Jetzt verlangen wir, dass $x(s)$ die folgende gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt

$$\dot{x}(s) = D_p F(p(s), z(s), x(s)), \tag{13.2}$$

dann stimmen die Terme zweiter Ordnung in den letzten beiden Gleichungen überein und wir erhalten

$$\dot{p}^i(s) = -F_{x_i}(p(s), z(s), x(s)) - F_z(p(s), z(s), x(s)) p^i(s).$$

13.3 Theorem. *Es sei* $u \in C^2(U)$ *eine Lösung der partiellen Differentialgleichung* (13.1). *Dann erfüllt* $(p(s), z(s), x(s))$ *das folgende gewöhnliche Differentialgleichungssystem*

$$\begin{aligned} \dot{p}(s) &= -D_x F(p(s), z(s), x(s)) - D_z F(p(s), z(s), x(s)) p(s), \\ \dot{z}(s) &= \langle D_p F(p(s), z(s), x(s)), p(s) \rangle, \\ \dot{x}(s) &= D_p F(p(s), z(s), x(s)). \end{aligned} \tag{13.3}$$

13.4 Definition. Das Differentialgleichungssystem (13.3) besteht aus den *charakteristischen Gleichungen.*

13.5 Beispiel. Im Fall der Transportgleichung

$$u_t + \sum_{j=1}^{N} b_j u_{x_j} = 0$$

gelten $n = N + 1$ und

$$F(p, z, x) = p_n + \sum_{j=1}^{n-1} b_j p_j.$$

Also

$$D_p F = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D_z F = 0, \quad D_x F = 0.$$

Die charakteristischen Gleichungen lauten somit

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= 0,\\
\dot{z} &= \sum_{j=1}^{n-1} b_j p_j + p_n,\\
\dot{x} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Einsetzen von $F(p,z,x) = 0$ in die zweite charakteristische Gleichung ergibt $\dot{z} = 0$. Daher ist u konstant auf den Geraden

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristischen Gleichungen sind autonom; mit $x(s)$ ist also auch $x(s-s_0)$ eine Lösung. Bei der Beschreibung der Geraden haben wir das genutzt, um $x(0) \in \mathbb{R}^N \times \{0\}$ festzulegen.

Wenn ein Raumpunkt $(x_1, \ldots, x_N)$ und eine Zeit t gegeben sind, dann muss diejenige Gerade bestimmt werden, die durch $(x_1, \ldots, x_N, t)$ verläuft. Das ist die Gerade

$$\begin{pmatrix} x_1 + sb_1 \\ \vdots \\ x_N + sb_n \\ t + s \end{pmatrix}.$$

Sie trifft die Ebene $\{t = 0\}$ in dem zu $s = -t$ gehörigen Punkte. Wenn die Anfangswertaufgabe $u(x) = g(x)$ lautet, dann ist die Lösung des durch g gegebenen Anfangswertproblems der Transportgleichung also glecih

$$u(x,t) = g(x_1 - tb_1, \ldots, x_N - tb_N).$$

13.6 Beispiel. Wir betrachten für $U =]0,\infty[^2$, $\Gamma =]0,\infty[\times \{0\}$ und eine beliebige stetige Funktion g auf Γ das folgende lineare Anfangswertproblem mit variablen Koeffizienten

$$\begin{aligned}
x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} &= u, && \text{in } U,\\
u &= g, && \text{in } \Gamma.
\end{aligned}$$

Dann

$$F(p_1, p_2, z, x_1, x_2) = x_1 p_2 - x_2 p_1 - z.$$

Die charakteristischen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}\dot{p} &= (p_1 - p_2, p_1 + p_2),\\ \dot{z} &= \langle(-x_2, x_1), (p_1, p_2))\rangle = z,\\ \dot{x} &= (-x_2, x_1).\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung für x kennen wir. Ihre allgemeine Lösung ist

$$x(s) = (r\cos(s+\varphi), r\sin(s+\varphi)).$$

Sei nun $(x_1, x_2) \in U$ vorgegeben. Wir müssen r und φ so anpassen, dass der Weg von Γ nach (x_1, x_2) führt. Dazu muss sein $r = |(x_1, x_2)|$. Wenn wir $x(0) \in \Gamma$ wollen, dann ergibt sich außerdem $\varphi = 0$. Also

$$x(s) = \big(|(x_1, x_2)|\cos s, |(x_1, x_2)|\sin s\big), \quad s \in \left[0, \arctan\frac{x_2}{x_1}\right].$$

Der Anfangswert ist $g(|(x_1, x_2)|)$. Da wir die Differentialgleichung für z im Kopf lösen können, erhalten wir

$$u(x^1, x^2) = g(|(x_1, x_2)|)e^{\arctan\frac{x_2}{x_1}}.$$

Die Differentialgleichung für p braucht in diesem Fall nicht gelöst zu werden.

Dass die so gefundene Funktion tatsächlich eine Lösung ist, kann im Einzelfall nachgerechnet werden. Wir behandeln diesen Punkt allgemein in Theorem 13.19.

13.7 Bemerkung (Allgemeine quasilineare Differentialgleichung erster Ordnung). Die allgemeine quasilineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die Gestalt

$$F(\nabla u, u, x) = \langle b(x, u(x)), \nabla u(x)\rangle + c(x, u(x)) = 0,$$

für gegebene Funktionen $b\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $c\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, also $F(p, z, s) = \langle b(x, z), p\rangle + c(x, z)$. Die charakteristische Gleichung für x hat dann die Gestalt

$$\dot{x}(s) = b(x(s), z(s))$$

und die für z hat die Gestalt

$$\dot{z}(s) = \langle b(x(s), z(s)), p(s)\rangle = -c(x(s), z(s)).$$

Die Differentialgleichung für p braucht wieder nicht gelöst zu werden.

13.8 Beispiel. Sei $U = \mathbb{R} \times\,]0, \infty[$ und $\Gamma = \mathbb{R} \times \{0\}$ und sei $g \in C^1(\mathbb{R})$. Gesucht ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{x_1} + u_{x_2} &= u^2 && \text{in } U,\\ u &= g && \text{in } \Gamma.\end{aligned}$$

Wir haben also $b = (1,1)$ und $c(x,z) = -z^2$. Die relevanten charakteristischen Gleichungen sind

$$\begin{aligned}\dot{x}^1(s) &= 1,\\ \dot{x}^2(s) &= 1,\\ \dot{z}(s) &= z^2.\end{aligned}$$

Das löst man mit der Methode der getrennten Variablen und erhält

$$x(s) = (a_1 + s, a_2 + s), \quad z(s) = \frac{z_0}{1 - sz_0}$$

mit Integrationskonstanten a_1, a_2 und z_0. Soll der Weg in Γ beginnen, so muss $a_2 = 0$ gelten.

Sei nun $(x_1, x_2) \in U$ geben. Man muss nun a_1 und s_0 so bestimmen, dass $(x_1, x_2) = (a_1 + s_0, s_0)$. Das bedeutet $s_0 = x_2$ und $a_1 = x_1 - x_2$. Der Weg $x(s) = (x_1 - x_2 + s, s)$ trifft Γ im Punkt $(x_1 - x_2, 0)$. Also

$$u(x_1, x_2) = z(x_2) = \frac{g(x_1 - x_2, 0)}{1 - x_2 g(x_1 - x_2, 0)}.$$

Der Definitionsbereich dieser Lösung ist die Zusammenhangskomponente von Γ in $\setminus\{(x_1, x_2) | x_2 g(x_1 - x_1) = 0\}$.

13.9 Lemma. *Sei* $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$. *Dann ist die Funktion* $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x, 0)$, *differenzierbar mit* $v'(x) = \lim_{t \to 0} u_x(x, t)$.

13.10 Beispiel. Der voll nichtlineare Fall ist schwierigeri als der quasilineare, weil man die Differentialgleichung für p ebenfalls lösen muss. Im Beispiel sei $U =]0, \infty[\times \mathbb{R}$ und $\Gamma = \{0\} \times \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{x_1} u_{x_2} &= u & &\text{in } U,\\ u &= x_2^2 & &\text{in } \Gamma. \end{aligned}$$

Das bedeutet $F(p, z, s) = p_1 p_2 - z$. Die charakteristischen Gleichungen sind

$$\begin{aligned}\dot{p}^1 &= p^1,\\ \dot{p}^2 &= p^2,\\ \dot{z} &= \langle (p^2, p^1), (p^1, p^2) \rangle = 2p^1 p^2,\\ \dot{x}^1 &= p^2,\\ \dot{x}^2 &= p^1.\end{aligned}$$

Man kann sie in dieser Reihenfolge lösen

$$\begin{aligned} p^1(s) &= p_1^0 e^s,\\ p^2(s) &= p_2^0 e^s,\\ z(s) &= z^0 + 2p_1^0 p_2^0 (e^{2s} - 1),\\ x^1(s) &= p_2^0 (e^s - 1),\\ x^2(s) &= x_2^0 + p_1^0 (e^s - 1). \end{aligned}$$

Zusätzlich wissen wir noch $z^0 = \left(x_2^0\right)^2$ aus der Anfangsbedingung.

Wenn $u \in C^1(\overline{U})$, dann folgt $p_2^0 = 2x_2^0$ aus Lemma 13.9 Die Differentialgleichung liefert $p_1^0 p_2^0 = z^0 = \left(x_2^0\right)^2$, also $p_1^0 = \frac{1}{2}x_2^0$. Das führt auf

$$\begin{aligned} z(s) &= \left(x_2^0\right)^2 e^{2s}, \\ x^1(s) &= 2x_2^0\left(e^s - 1\right), \\ x^2(s) &= \frac{x_2^0}{2}\left(e^s + 1\right). \end{aligned}$$

Sei nun $(\xi_1, \xi_2) \in U$ gegeben. Dann suchen wir ein s mit $\xi_1 = x^1(s)$ und $\xi_2 = x^2(s)$. Es gilt $\xi_1 - 4\xi_2 = -4x_2^0$ durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen und daher $x_2^0 = \frac{4\xi_2 - \xi_1}{4}$. Durch Addition dieser Gleichungen bekommt man $\xi_1 + 4\xi_2 = 4x_2^0 e^2$, also $e^s = \frac{4\xi_2+\xi_1}{4\xi_2-\xi_1}$. Schließlich

$$u(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{4\xi_2 - \xi_1}{4}\right)^2 \left(\frac{4\xi_2 + \xi_1}{4\xi_2 - \xi_1}\right)^2 = \frac{(\xi_1 + 4x_2)^2}{16}.$$

13.11 Bemerkung (Transformation des Randes). Das Gebiet U besitze einen C^1-Rand. Das bedeutet, dass zu jedem $x^0 \in \partial U$ Umgebungen W von x^0 und V von 0 sowie ein C^1-Diffeomorphismus $\Phi\colon W \to V$ mit $\Phi(x^0) = 0$ und $\Phi(W \cap \partial U) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ existieren. Wir bezeichnen die Inverse von Φ mit Ψ.

13.12 Satz. *Wenn $u \in C^1(W)$ das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} F(\nabla u, u, x) &= 0 && \text{in } W \cap U, \\ u &= g && \text{in } W \cap \partial U, \end{aligned}$$

löst, dann löst $v = u \circ \Psi$ eine Differentialgleichung erster Ordnung in $V \cap \mathbb{R}^n_+$ mit Anfangsbedingung $v = g \circ \Psi$ in $(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap V$ und umgekehrt.

13.13 Bemerkung. Wegen dieser Beobachtung konzentrieren wir uns im weiteren auf den Fall $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Für $(y, 0) \in \Gamma$ schreiben wir $g(y)$ anstelle von $g(y, 0)$.

13.14 Satz (Kompatibilitätsbedingungen). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $\Gamma \subset \partial U$ von der Form $\Gamma = W \cap \{x | x_n = 0\}$ für eine offene Menge W und es sei $g \in C^1(\Gamma)$. Es gebe ferner eine Lösung $u \in C^1(\overline{U})$ von*

$$\begin{aligned} F(\nabla u, u, x) &= 0 && \text{in } U, \\ u(x) &= g && \text{in } \Gamma. \end{aligned}$$

Dann existiert zu jedem $x^0 \in \Gamma$ ein $p^0 \in \mathbb{R}^n$, welches die folgenden Kompatibilitätsbedingungen erfüllt

$$\begin{aligned} p_i^0 &= g_{x_i}(x^0), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ F(p^0, g(x^0), x^0) &= 0. \end{aligned} \tag{13.4}$$

13.15 Beispiel. Für $U = \mathbb{R} \times]0, \infty[$ seien $\Gamma = \partial U$ und $g \equiv 1$. Ferner sei $F(p, z, x) = p_1 p_2 - z$. Wähle $x^0 = (0, 0)$. Die Kompatibilitätsbedingungen besagen $g(x^0) = 1$ und $p_1^0 = 0$, aber $F(p_1^0, p_2^0, g(x^0), x^0) = -1$. Es gibt also keine Lösung der Anfangswertaufgabe.

13.16 Definition. Es gelten die Voraussetzungen aus Bemerkung 13.13.

Ein Tripel $(p, z, x) \in \Gamma$ mit $z = g(x)$, welches die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt, heißt *zulässig.*

Ein zulässiges Tripel heißt *nicht-charakteristisch,* wenn $F_{p_n}(p, z, x) \neq 0$.

13.17 Lemma. *Es gelten die Voraussetzungen aus Bemerkung 13.13.*

Es seien F von der Klasse C^2 und g von der Klasse C^3 und es sei (p^0, z^0, x^0) nicht-charakteristisch. Dann existieren eine Umgebung $\widetilde{V} = V \times \{0\}$ von x^0 in Γ und eine eindeutig bestimmte C^2-Funktion $q\colon V \to \mathbb{R}^n$ mit $q(x^0) = p^0$, so dass für alle $y \in \widetilde{V}$ das Tripel $(q(y)), g(y), y)$ zulässig ist.

13.18 Lemma. *Es gelten die Voraussetzungen aus Bemerkung 13.13.*

Es seien F von der Klasse C^2 und g von der Klasse C^3, es sei (p^0, z^0, x^0) nicht-charakteristisch und es sei q wie im vorigen Lemma. Für y im Definitionsbereich von q werde mit $\big(p(y, \cdot), z(y, \cdot), x(y, \cdot)\big)$ die Lösung der gewöhnlichen Anfangswertaufgabe

$$
\begin{aligned}
\dot{p}(y, s) &= -D_x F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) - D_z F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) p(y, s), \\
\dot{z}(y, s) &= \langle D_p F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)), p(y, s) \rangle, \\
\dot{x}(y, s) &= D_p F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)), \\
p(y, 0) &= q(y), \\
z(y, 0) &= g(y), \\
x(y, 0) &= (y, 0)
\end{aligned}
\tag{13.5}
$$

bezeichnet. Dann existieren ein offenes Intervall I mit $0 \in I$, eine offene Umgebung $\widetilde{V} = V \times \{0\}$ von x^0 in Γ und eine offene Umgebung W von x^0 im $\mathbb{R}^n$, so dass die Abbildung

$$
\begin{aligned}
\Phi\colon V \times I &\to W, \\
(y, s) &\mapsto x(y, s),
\end{aligned}
$$

ein C^2-Diffeomorphismus ist.

13.19 Theorem. *Es gelten die Voraussetzungen aus Bemerkung 13.13.*

Es sei $\Phi\colon W \times I \to V$ wie im Lemma. Für $\xi \in V$ setzen wir $(y(\xi), s(\xi)) = \Phi^{-1}(\xi)$ und definieren

$$
\begin{aligned}
u(x) &= z(y(\xi), s(\xi)), \\
P(\xi) &= p(y(\xi), s(\xi)).
\end{aligned}
$$

Dann ist u *von der Klasse* C^2 *und löst die Differentialgleichung*

$$F(\nabla u(\xi), u(\xi), \xi) = 0, \quad \xi \in V$$

unter der Randbedingung

$$u(\xi) = g(\xi), \quad \xi \in V \cap \Gamma.$$

Im Beweis kommen zweite Ableitungen von u vor. Das ist der Grund für die Differenzierbarkeitsforderungen.

13.20 Beispiel (Skalare Erhaltungsgleichung). Wir haben eine Zeitvariable t, die wir auch als x_{n+1} bezeichnen. Wir setzen $U = \mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ und $\Gamma = \partial U$. Für ein $H \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$u_t + \operatorname{div}(H \circ u) = 0.$$

Die Divergenz wirkt nur auf die Raumvariablen. Die Differentialgleichung kann auch geschrieben werden als

$$u_t + \langle H'(u), \nabla u \rangle = 0.$$

Wir bezeichnen die Raumzeitvariablen mit $y = (x, t)$ und die zugehörigen Ableitungsvariablen mit $q = (p, p_{n+1})$ und setzen $F(q, z, y) = p_{n+1} + H'(z)p$. Wir stellen für diese quasilineare Differentialgleichung die charakteristischen Gleichungen auf

$$\begin{aligned} \dot{x}^i(s) &= (H^i)'(z(s)), \qquad && i = 1, \dots, n, \\ \dot{x}^{n+1}(s) &= 1. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass wir s und t identifizieren können. Die charakteristische Gleichung für z ist

$$\dot{z} = \langle H'(p), p \rangle + p_{n+1} = 0.$$

Also ist z konstant und x beschreibt eine Gerade. Das bedeutet

$$u(x^0 + H'(g(x^0))t, t) = g(x^0).$$

Es ist keineswegs ausgeschlossen, dass sich zwei solche Geraden schneiden. In diesem Fall existiert i. a. keine starke Lösung in ganz U. Man beachte, dass die Randebedingungen nicht-charakteristisch sind.

14 Distributionskalkül

Bei der Untersuchung linearer Differentialgleichungen ist es häufig nützlich, den Funktionsbegriff zu verallgemeinern. Eine kurze Einführung, die aber immer noch viel mehr anthält als das, was ich mache, findet sich in dem Buch Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie von Kaballo.

Wie immer sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

14.1 Definition. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen setzen wir

$$C_c^\infty(U) = \{\varphi \in C^\infty(U) \mid \operatorname{Supp} \varphi \subset U \text{ und } \operatorname{Supp} \varphi \text{ kompakt}\}.$$

Die Elemente von $C_c^\infty(U)$ heißen *Testfunktionen*. Häufig schreibt man $\mathcal{D}(U)$ für $C_c^\infty(U)$ und $\mathcal{E}(U)$ für $C^\infty(U)$.

In §17 der Analysis III hatten wir gesehen, dass es ausreichend viele Testfunktionen gibt.

14.2 Satz (Analysis III, Satz 17.4). *Sei* $X \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt und seien* $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $X \subset A_1 \cup \dots \cup A_m$. *Dann existiert eine der Überdeckung* $A_1, \dots, A_m$ *untergeordnete Zerlegung* $(g_1, \dots, g_m)$ *der Eins.*

Das bedeutet $g_j \in \mathcal{D}(A_j)$, $g_j \geq 0$ und $\sum_{j=1}^m g_j(x) = 1$ für alle $x \in X$.

14.3 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}(U)$. Sie heißt *konvergent* gegen $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subset U$ gibt, so $\operatorname{Supp} \varphi_j \subset K$ für alle j und für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Folge $\left(\frac{\partial^\alpha \varphi_j}{\partial x^\alpha}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}$ konvergiert.

Bemerkung. Man kann eine Topologie auf $\mathcal{D}(U)$ angeben, welche diesen Konvergenzbegriff induziert. Diese Topologie ist nicht metrisch.

14.4 Definition. Ein lineares Funktional $T\colon \mathcal{D}(U) \to \mathbb{K}$ heißt *Distribution*, wenn es folgenstetig ist, wenn also gilt

> Für jede konvergente Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(U)$ mit Grenzwert φ gilt $\lim_{j\to\infty} T(\varphi_j) = T(\varphi)$.

Der Raum aller Distributionen wird mit $\mathcal{D}'(U)$ bezeichnet. Statt $T(\varphi)$ schreibt man $\langle T, \varphi\rangle$.

14.5 Beispiel. (a) Sei μ ein lokal endliches Borelmaß, das heißt ein Borelmaß, so dass $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten K. Dann wirkt μ als Distribution

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int_U \varphi \, d\mu.$$

(b) Ein Spezialfall hiervon ist das *Dirac-Maß* δ_x mit $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$. Bei den Physikern heißt $\delta_0 = \delta$ auch Diracsche Deltafunktion, obwohl δ keine Funktion ist.

(c) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $x_0 \in U$ ist

$$\langle T, \varphi \rangle = \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x_0)$$

eine Distribution.

14.6 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine messbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{K}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn für jede kompakte Teilmenge K von U gilt $\int_K |f| \, d\lambda_n < \infty$.

Lokal integrierbare Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, werden identifiziert. Der Raum aller lokal integrierbaren Funktionen auf U wird mit $L^1_{\text{loc}}(U)$ bezeichnet.

14.7 Bemerkung. $C(U) \subset L^1_{\text{loc}}(U)$.

14.8 Satz. $L^1_{\text{loc}}(U)$ *wird durch die folgende Vorschrift nach* $\mathcal{D}'(U)$ *eingebettet*

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_U f\varphi \, d\lambda_n, \qquad f \in L^1_{\text{loc}}(U),\ \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

14.9 Bemerkung. Für $f \geq 0$ ist Satz 14.8 ein Spezialfall von Beispiel 14.5 (a), angewandt auf das Maß

$$\mu(B) = \int_B f \, d\mu.$$

14.10 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Ein lineares Funktional* $T\colon \mathcal{D}(U) \to \mathbb{K}$ *ist genau dann eine Distribution, wenn für jede kompakte Teilmenge* $K \subset U$ *ein* $k \in \mathbb{N}_0$ *und ein* $C > 0$ *existieren, so dass* $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_k$ *für alle* $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ *mit* $\operatorname{Supp} \varphi \subset K$, *wobei* $\|\varphi\|_k = \sup\left\{\left|\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}\right| \,\middle|\, |\alpha| \leq k,\ x \in U\right\}$.

14.11 Bemerkung. Warum ist $\mathcal{D}(\Omega)$ nicht metrisierbar? (Die Antwort stammt aus math.stackexchange.)

Es sei $(\varphi_j)_j$ eine Folge in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, so dass $\varphi_j(x) = 1$ für $|x| \leq j$ and $\varphi_j(x) = 0$ für $|x| > j + 1$. Angenommen, es gebe eine mit der Vektorraumstruktur verträgliche Metrik d auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem j ein $c_j > 0$, so dass $d(c_j\varphi_j, 0) < \frac{1}{j}$. Also $\lim_{j\to\infty} d(c_j\varphi_j, 0) = 0$, obwohl $(c_j\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ divergiert, weil es keine kompakte Menge K gibt, so dass $\operatorname{Supp} \varphi_j \subseteq K$ für alle j.

14.12 Satz. *Seien* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $T \in \mathcal{D}'(U)$ *und* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$*. Dann wird durch*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \varphi^{(\alpha)} \right\rangle$$

eine Distribution erklärt. Wir bezeichnen sie als partielle Ableitung *von* T *zum Multiindex* α*.*

Wenn $f \in C^k(U)$ *und* $|\alpha| \leq k$*, dann ist die* α*-te Ableitung der zu* f *gehörigen Distribution gleich der zu* $f^{(\alpha)}$ *gehörigen Distribution.*

14.13 Beispiel. Wir leiten die Heaviside-Funktion H ab.

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0. \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Für jede Testfunktion φ gilt

$$-\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0).$$

Also $H' = \delta_0$ im Distributionssinn.

14.14 Satz. *Für* $g, h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *wird durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h \, d\lambda_1$$

eine Distributionslösung der eindimensionalen Wellengleichung gegeben.

14.15 Satz. *Es sei* Φ *die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung im* $\mathbb{R}^n$*, also*

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Dann $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \Phi = \delta_0$ *im Distributionssinn.*

14.16 Bemerkung. Wenn $L(D)$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten ist, dann bezeichnet man jede Distribution Φ mit $L(D)\Phi = \delta_0$ als *Fundamentallösung.*

Die Bedeutung von Fundamentallösungen skizziere ich jetzt kurz:

Für eine Funktion g definieren wir als $\check{g}$ die durch $\check{g}(x) = g(-x)$ gegebene Funktion. Dann wird die *Faltung* einer Distribution mit einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger gegeben durch

$$\langle T * g, \varphi \rangle = \langle T, \check{g} * \varphi \rangle .$$

Ist nun T eine Fundamentallösung von L(D), so gilt

$$\begin{aligned}\langle L(D)(T * g), \varphi\rangle &= \langle (L(D)T) * g, \varphi\rangle \\ &= \langle L(D)T, \check{g} * \varphi\rangle \\ &= \langle \delta_0, \check{g} * \varphi\rangle \\ &= (\check{g} * \varphi)(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \check{g}(0 - x)\varphi(x)\, d\lambda_n(x),\end{aligned}$$

wobei gleich im ersten Schritt zuerst nach ein Satz über die Distributionsableitung einer Faltung zu zeigen ist. Insgesamt haben wir gesehen, dass $L(D)(T * g) = g$, und daher die inhomogene Differentialgleichung gelöst.

Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle gf, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} (gf)\varphi\, d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} f(g\varphi)\, d\lambda_1 = \langle f, g\varphi\rangle\,.$$

Daher definieren wir:

14.17 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T \in \mathcal{D}'(U)$ und sei $g \in C^\infty(U)$. Dann definieren wir die Distribution gT durch

$$\langle gT, \varphi\rangle = \langle T, g\varphi\rangle\,.$$

14.18 Definition. Eine Folge $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}'(U)$ konvergiert genau dann gegen $T \in \mathcal{D}'(U)$, wenn für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} \langle T_j, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle\,.$$

Bemerkung. Damit ist die Topologie auf $\mathcal{D}'(U)$ nicht komplett beschrieben (siehe Meise und Vogt, Beispiel 24.37).

14.19 Satz. *Für* $j \in \mathbb{N}$ *sei* $T_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *die durch die* L^1_{loc}*-Funktion*

$$f_j \colon x \mapsto \left(\frac{j}{4\pi}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{jx^2}{4}\right)$$

gegebene Distribution. Dann $\lim_{j\to\infty} T_j = \delta_0$ *in* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

14.20 Beispiel. Für $n = 1$, f_j wie oben und H die Heaviside-Funktion gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle f_j H, \varphi\rangle = \langle H, f_j\varphi\rangle = \int_0^\infty f_j\varphi\, d\lambda_1$$

Wir setzen φH wie folgt zu einer geraden Funktion $\psi \in C(\mathbb{R})$ fort

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Dann folgt aus Theorem 7.6

$$\lim_{j\to\infty}\langle f_j H, \varphi\rangle = \lim_{j\to\infty}\int_0^\infty \Phi\left(x, \frac{1}{j}\right)\psi(x)dx = \frac{1}{2}\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \Phi\left(x, \frac{1}{j}\right)\psi(x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\psi(0) = \frac{1}{2}\varphi(0),$$

also $\lim_{j\to\infty} f_j H = \frac{1}{2}\delta_0$.

Wir werden in den Übungen aber folgendes zeigen

(a) Für $a_j(x) = H(x - j^{-1/4})$ gilt $\lim_{j\to\infty} a_j = H$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(b) $\lim_{j\to\infty}\langle f_j a_j, \varphi\rangle = 0$ für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Das bedeutet, dass man das Produkt der Distributionen δ_0 und H nicht sinnvoll erklären kann, denn sowohl $(f_j H)_{j\in\mathbb{N}}$ als auch $(f_j a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ müssten gegen dieses Produkt konvergieren.

Da es keine Produkte von Distributionen gibt, spielt der Distributionskalkül bei der Untersuchung nichtlinearer Differentialgleichungen keine Rolle.

14.21 Lemma. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $g \in L^1_{loc}(U)$ *mit* $\langle g, \varphi\rangle = 0$ *für alle* $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. *Dann* $g = 0$.

14.22 Beispiel. Für $0 < \delta < \epsilon$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ folgt aus dem Mittelwertsatz

$$\int_\delta^\epsilon \frac{|\varphi(x) - \varphi(-x)|}{x}dx \le (\epsilon - \delta)\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)|.$$

Daher folgt aus dem Cauchy-Kriterium die Konvergenz von

$$\int_{|x|>\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}dx$$

für $\epsilon \searrow 0$. Wenn der Träger von φ in $[-R, R]$ liegt, so zeigt die obige Rechnung, dass

$$\left|\lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right| \le R\sup_{|x|\le R}|\varphi'(x)|.$$

Das bedeutet, dass durch

$$\left\langle \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

eine Distribution gegeben wird, die man als *Cauchyschen Hauptwert* von $\frac{1}{x}$ bezeichnet.

15 Soboleworäume

Wiederholung. Für $1 \le p < \infty$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ messbar hatten wir definiert

$$L^p(U) = \{ f \colon U \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \|f\|_p < \infty \},$$

wobei

$$\|f\|_p = \left(\int_U |f|^p \, d\lambda_n \right)^{1/p}.$$

Wir hatten gezeigt, dass diese Räume Banachräume sind, also jede Cauchy-Folge konvergiert. Für $1 < p < \infty$ hatten wir die Höldersche Ungleichung gezeigt. Dabei ist q so zu wählen, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für $f \in L^p(U)$ und $g \in L^q(U)$

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

15.1 Lemma. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $1 \le p < \infty$. *Dann gilt* $L^p(U) \subset L^1_{\text{loc}}(U)$. *Insbesondere sind alle* L^p*-Funktionen für* $1 \le p < \infty$ *Distributionen.*

15.2 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und seien $u, v \in L^1_{\text{loc}}(U)$. Man sagt, v sei die *schwache Ableitung* von u zum Multiindex α, wenn für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt

$$\int_U u \, \varphi^{(\alpha)} \, d\lambda_n = (-1)^{|\alpha|} \int v \, \varphi \, d\lambda_n.$$

Man schreibt dann $v = D^\alpha u$.

Bemerkung. $v \in L^1_{\text{loc}}(U)$ ist also genau dann die schwache Ableitung von $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$, wenn die durch v gegebene Distribution gleich der Ableitung der durch u gegebenen Distribution ist.

15.3 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $k \in \mathbb{N}_0$ und sei $1 \le p < \infty$. Der *Sobolewraum* $W^{k,p}(U)$ besteht aus allen $u \in L^p(U)$, deren sämtliche Ableitungen $D^\alpha u$ mit $|\alpha| \le k$ im schwachen Sinne existieren und in $L^p(U)$ liegen.

Der Raum $W^{k,2}(U)$ wird auch mit $H^k(U)$ bezeichnet.

15.4 Bemerkung. (a) Um zu zeigen, dass eine L^1_{loc}-Funktion in $W^{1,p}$ liegt, müssen zwei Dinge überprüft werden:

(i) Die distributionellen ersten Ableitungen müssen durch L^1_{loc}-Funktionen gegeben sein

(ii) Diese Funktionen müssen im L^p liegen.

(b) Ein notwendiges Kriterium ist folgendes: Wenn $f \in W^{1,p}(U)$ und $V \subseteq U$ offen, dann $f|_V \in W^{1,p}(V)$.

Das ist nützlich, weil es sein kann, dass die distributionelle Ableitung von f_V durch eine L^1_{loc}-Funktion gegeben ist, die distributionelle Ableitung auf ganz U aber nicht.

(c) Eine Funktion $f \in W^{1,p}(U)$ liegt genau dann in $W^{2,p}(U)$, wenn alle ersten distributionellen Ableitungen in $W^{1,p}(U)$ liegen.

15.5 Beispiel. Die Funktion $f(x) = |x|$ liegt für jedes p in $W^{1,p}(]-1,1[)$, aber nicht in $W^{2,p}(]-1,1[)$.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$. Dann

$$\begin{aligned} -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)\,dx &= +\int_{-1}^{0} x\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{1} x\varphi'(x)\,dx \\ &= -\int_{-1}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{1} \varphi(x)\,dx = \left\langle H - \check{H}, \varphi \right\rangle, \end{aligned}$$

wobei H die Heavisidefunktion ist und $\check{H}(x) = H(-x)$. Wegen

$$\int_{-1}^{1} |-H(-x) + H(x)|^p\,dx = 2$$

gilt $-\check{H} + H \in L^p[-1,1]$ mit $\|-\check{H} + H\|_p = \sqrt[p]{2}$.

Die Distributionsableitung von $-\check{H} + H$ ist $2\delta_0$. Angenommen, δ_0 sei die zur L^1_{loc}-Funktion g gehörige Distribution. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,0[)$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ gelten $\langle \delta_0, \varphi \rangle = 0$. Würde δ_0 durch eine L^1_{loc}-Funktion dargestellt, so müsste diese auf $]-1,0[\cup]0,1[$ verschwinden, wäre also die Nullfunktion. □

15.6 Definition. Für $1 \leq p < \infty$ wird $W^{k,p}(U)$ versehen mit der Norm

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Das bedeutet, dass $\|u\|_{k,p}$ die ℓ^p-Norm des Tupels $(\|D^\alpha u\|_p)_{|\alpha| \leq k}$ ist.

$H^k(U)$ wird versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^k(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(U)}.$$

15.7 Lemma. *Eine Folge* $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *in* $W^{k,p}(U)$ *konvergiert genau dann gegen* $u \in W^{k,p}(U)$*, wenn für jedes* α *mit* $|\alpha| \leq k$ *die Folge* $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *in* $L^p(U)$ *gegen* $D^\alpha u$ *konvergiert. Sie ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn für jedes* α *mit* $|\alpha| \leq k$ *die Folge* $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* $L^p(U)$ *ist.*

15.8 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Für jedes* $k \in \mathbb{N}_0$ *und jedes* $p \in [1, \infty[$ *ist* $W^{k,p}(U)$ *ein Banachraum und* $H^k(U)$ *ein Hilbertraum.*

15.9 Beispiel. Für welche $\beta > 0$ ist $u(x) = |x|^{-\beta}$ in $W^{1,p}(B_1(0))$?

Für $x \in B_1(0) \setminus \{0\}$ existieren alle Ableitungen im klassischen Sinne, nämlich

$$u_{x_i}(x) = -\frac{\beta x_i}{|x|^{\beta+2}}.$$

Notwendig für $u \in W^{1,p}$ ist daher

$$\int_{B_1(0)} \left(\frac{|x_i|}{|x|^{\beta+2}}\right)^p d\lambda_n < \infty$$

für $i = 1, \ldots, n$. Beachte

$$|x|^p = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{p/2} \leq \left(n \max_{1\leq i\leq n} x_i^2\right)^{p/2} = n^{p/2} \max_{1\leq i\leq n} |x_i|^p \leq n^{p/2} \sum_{i=1}^n |x_i|^p.$$

Daher folgt

$$\infty > \int_{B_1(0)} \frac{|x|^p}{|x|^{(\beta+2)p}} d\lambda_n = \int_{B_1(0)} |x|^{-(\beta+1)p} d\lambda_n = \int_0^1 \int_{\partial B_r(0)} r^{-(\beta+1)p} d\sigma\, dr$$
$$= n\alpha(n) \int_0^1 r^{n-1-(\beta+1)p} dr.$$

Dieses Integral ist genau dann endlich, wenn $n > (\beta + 1)p$.

Wir zeigen nun, dass unter dieser Voraussetzung die schwache Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ in der Tat durch $-\beta x_i |x|^{-\beta-2}$ gegeben wird. Dass diese Funktion in $L^p(B_1(0))$ liegt, haben wir soeben gezeigt. Wir wenden dazu für ein beliebiges $\varphi \in \mathcal{D}(B_1(0))$ den Divergenzsatz auf das Vektorfeld $F = u\varphi e_i$ an. Außerhalb des Ursprungs gilt

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\beta x_i}{|x|^{\beta+2}}\varphi + |x|^{-\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Daher besagt der Divergenzsatz für $\epsilon > 0$

$$\int_{B_1(0)\setminus B_\epsilon(0)} u_{x_i}\varphi d\lambda_n = -\int_{B_1(0)\setminus B_\epsilon(0)} u\varphi_{x_i} d\lambda_n - \int_{\partial B_\epsilon(0)} u\varphi \nu_i\, d\sigma,$$

wobei ν_i die i-te Komponente der äußeren Normale ist, also $\nu_i = \frac{x_i}{\|x\|}$. Wir betrachten die Grenzwerte für $\epsilon \to 0$ einzeln.

$$\int_{B_\epsilon(0)} |u_{x_i}\varphi| d\lambda_n \leq C_1 \int_0^\epsilon \int_{\partial B_\epsilon(0)} r^{-\beta-1} d\sigma\, dr = C_1 n\alpha(n) \int_0^\epsilon r^{n-\beta-2} dr$$
$$= \frac{C_1 n\alpha(n)}{n-\beta-1}\epsilon^{n-\beta-1} \to 0,$$

denn aus $n > (\beta+1)p$ folgt $n > \beta + 1$. Außerdem

$$\int_{B_\epsilon(0)} |u\varphi_{x_i}| d\lambda_n \le C_2 \int_{B_\epsilon(0)} |x|^{-\beta} d\lambda_n \to 0.$$

Schließlich

$$\int_{\partial B_\epsilon(0)} |u\varphi\nu_i| d\sigma \le C_2 \int_{\partial B_\epsilon(0)} \epsilon^{-\beta} d\sigma = C_2 n\alpha(n)\epsilon^{n-1-\beta} \to 0.$$

Damit haben wir alles zusammen, was wir brauchen, um zu zeigen, dass der Gradient tatsächlich die schwache Ableitung ist, obwohl er nur in $B_1(0) \setminus \{0\}$ definiert ist:

$$\begin{aligned} -\int_{B_1(0)} u\varphi_{x_i} = -\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{B_1(0)\setminus B_\epsilon(0)} u\varphi_{x_i} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{B_1(0)\setminus B_\epsilon(0)} u_{x_i}\varphi + \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(0)} u\varphi\nu_i \\ = \int_{B_1(0)} u_{x_i}\varphi. \end{aligned}$$

15.10 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt, sei* $1 \le p < \infty$*, sei* $k \in \mathbb{N}_0$*, sei* $u \in W^{k,p}(U)$ *und sei* $\varphi \in C^\infty(\overline{U})$*. Dann* $\varphi u \in W^{k,p}(U)$ *und für alle* α *mit* $|\alpha| \le k$ *gilt*

$$D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi \, D^{\alpha-\beta} u.$$

Für unbeschränktes $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt der Satz, falls $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gefordert wird.

15.11 Lemma. *Es sei* $1 \le p < \infty$ *und es sei* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*. Dann existiert zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ *mit kompaktem Träger, so dass* $\|f - \varphi\|_p < \epsilon$*.*

15.12 Bezeichnung. Es sei $\chi \in \mathcal{D}(B_1(0))$ eine beliebige Funktion mit $0 \le \chi$ und $\int_{B_1(0)} \chi \, d\lambda_n = 1$, z. B.

$$\chi(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

Für $\epsilon > 0$ setzen wir

$$\chi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Dann ist $\chi_\epsilon \in \mathcal{D}(B_\epsilon(0))$ und es gilt $\int_{B_\epsilon(0)} \chi_\epsilon d\lambda_n = 1$. Die Funktionen χ_ϵ bezeichnet man als *Glättungsfunktionen* (engl. *mollifier*).

Wir zitieren Satz 12.8 aus der Analysis III im WS 2021/22.

15.13 Satz. *Sei* $k \in \mathbb{N}_0$ *oder* $k = \infty$*, sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und sei* $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$*. Dann* $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *und es gilt für* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *mit* $|\alpha| \le k$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(f*g)}{\partial y^\alpha} = f * \left(\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial y^\alpha}\right).$$

15.14 Lemma. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und es sei $u \in C(\mathbb{R}^n)$ mit Träger in U. Für $\epsilon > 0$ setzen wir $u^\epsilon = \chi_\epsilon * u$. Dann $\lim_{\epsilon \searrow 0} u^\epsilon = u$ gleichmäßig.*

15.15 Lemma. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, es sei $k \in \mathbb{N}_0$, es sei $1 \leq p < \infty$ und es sei $u \in W^{k,p}(U)$. Wir setzen*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in U, \\ 0, & x \notin U, \end{cases}$$

und für jedes $\epsilon > 0$ setzen wir $u^\epsilon = \chi_\epsilon * \tilde{u}$. Dann $u^\epsilon \in C^\infty(U)$ und für jedes $x \in U$ und jedes α mit $|\alpha| \leq k$ gilt für alle ϵ mit $B_{2\epsilon}(x) \subset U$

$$D^\alpha u^\epsilon(x) = (D^\alpha u)^\epsilon(x).$$

Beweis. Zu beliebigem $x \in U$ sei $\epsilon_0 > 0$ so gewählt, dass $B_{2\epsilon_0}(x) \subset U$. Für $\epsilon < \epsilon_0$ und $y \in B_\epsilon(x)$ gilt $u^\epsilon(y) = \chi_\epsilon * v$, wobei

$$v(z) = \begin{cases} u(z), & z \in B_{2\epsilon(x)}, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Aus der Hölderschen Ungleichung folgt $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und daher folgt der erste Teil der Behauptung aus Satz 15.13. Aus diesem Satz erhalten wir ferner die Vertauschbarkeit von Ableitung und Faltung und daher für ϵ mit $B_{2\epsilon}(x) \subset U$

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\epsilon(x) &= (D^\alpha \chi_\epsilon) * v(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha \chi_\epsilon(x-y) v(y) \, d\lambda_n(y) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U D_y^\alpha \chi_\epsilon(x-y) u(y) \, d\lambda_n(y) \\ &= \int_U \chi_\epsilon(x-y) D^\alpha u(y) \, d\lambda_n(y) \\ &= (D^\alpha u)^\epsilon(x). \end{aligned}$$

□

15.16 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 15.15 gilt*

$$\|u^\epsilon\|_p \leq \|u\|_p$$

für alle $\epsilon > 0$.

15.17 Satz. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, es sei $k \in \mathbb{N}_0$, es sei $1 \leq p < \infty$ und es sei $u \in W^{k,p}(U)$. Ferner sei $V \subset U$ eine beschränkte, offene Menge mit $\overline{V} \subset U$. Dann*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} u^\epsilon|_V = u|_V \quad \text{in } W^{k,p}(V).$$

15.18 Theorem. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt, sei* $k \in \mathbb{N}_0$ *und sei* $1 \leq p < \infty$. *Zu jedem* $u \in W^{k,p}(U)$ *gibt es eine Folge* $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *in* $W^{k,p}(U) \cap C^\infty(U)$, *die in* $W^{k,p}(U)$ *gegen* u *konvergiert.*

15.19 Theorem. *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt mit* C^1*-Rand. Ferner seien* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $1 \leq p < \infty$. *Dann existiert zu jedem* $u \in W^{k,p}(U)$ *eine Folge* $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *in* $C^\infty(\overline{U})$, *welche in* $W^{k,p}(U)$ *gegen* u *konvergiert.*

Für den Beweis benötigen wir zuerst das folgende Resultat.

15.20 Lemma. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine Menge mit* C^1*-Rand und sei* $x_0 \in \partial U$ *ein Punkt, an dem für die äußere Normale* ν *die Ungleichung* $\langle \nu, e_n \rangle < 0$ *gilt. Dann gibt es* $r, \lambda, \epsilon_0 > 0$, *so dass*

$$\forall 0 < \epsilon < \epsilon_0 \forall x \in U \cap B_{r/2}(x_0) : B_\epsilon(x^\epsilon) \subset U \cap B_r(x_0),$$

wobei $x^\epsilon := x + \lambda \epsilon e_n$.

Bemerkung. Der Satz gilt auch noch, wenn der Rand nur stetig ist. Zitate findet man in Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmotth Domains*, Abschnitt 1.4.2. Der Satz gilt also auch für Polytope.

15.21 Satz (Formel des Faà di Bruno). *Die* Bell-Polynome *sind definiert als*

$$B_{m,k}(x_1, \dots, x_{m-k+1}) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_k=m \\ j_i \geq 1}} \frac{m!}{j_1! \dots j_k!} x_{j_1} \cdots x_{j_k}.$$

Es seien I, J *zwei Intervalle, ferner* $f \in C^m(I)$ *und* $g \in C^m(J)$ *mit* $f(I) \subseteq J$. *Dann gilt*

$$\frac{d^m(g \circ f)}{dt^m}(t) = \sum_{k=1}^m g^{(k)}(f(t)) B_{m,k}(f'(t), f''(t), \dots, f^{(m-k+1)}(t)).$$

Einen Beweis findet man im Amer. Math. Monthly 109 (2002), 217–234.

15.22 Korollar. *Seien* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt. Es gebe offene Obermengen* $U_1 \supset \overline{U}$ *und* $V_1 \supset \overline{V}$ *sowie einen* C^k*-Diffeomorphismus* $\Phi \colon U \to V$, *so dass* Φ *Einschränkung einer Abbildung in* $C^k(U_1)$ *und* Φ^{-1} *Einschränkung einer Abbildung in* $C^k(V_1)$ *ist. Dann wird durch*

$$u \mapsto u \circ \Phi$$

ein Isomorphismus zwischen $W^{k,p}(V)$ *und* $W^{k,p}(U)$ *gegeben.*

Den folgenden Spursatz und seine Folgerungen findet man in § 5.5 des Buchs von Evans.

15.23 Theorem (Spursatz (engl.: trace theorem)). *Es sei $1 \le p < \infty$ und es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Dann existieren $C > 0$ und ein stetiger linearer Operator*

$$T\colon W^{1,p}(G) \to L^p(\partial G),$$

so dass

$$\begin{aligned} Tu &= u|_{\partial G} && \textit{falls } u \in C^1(\overline{G}), \\ \|Tu\|_{L^p(\partial G)} &\le C\|u\|_{W^{1,p}(G)} && \textit{falls } u \in W^{1,p}(G). \end{aligned}$$

15.24 Definition. Man bezeichnet Tu als *Spur* von u auf dem Rand.

15.25 Bemerkung. Man kann Sobolewräume auch für nicht-ganze Exponenten erklären. In Taylor, *Partial Differential Equations I*, wird das für $p = 2$ gemacht. Dort wird als Proposition 4.4.5 gezeigt, dass der Spuroperator stetig von $H^s(U)$ nach $H^{s-1/2}(\partial U)$ abbildet, falls $s > \frac{1}{2}$ und der Rand von U genügend regulär ist.

Mittels Iteration nach der Dimension sieht man, dass für $s > \frac{n}{2}$ und $u \in H^s(G)$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x \in G$ der Funktionswert $u(x)$ definiert ist. Es gilt sogar der folgende Satz.

15.26 Theorem (Sobolev-Lemma, Taylor, Proposition 4.4.3). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, es sei $x \in U$ und es sei $s > \frac{n}{2}$. Dann besitzt jedes Element $u \in H^s(U)$ einen in $\overline{U}$ stetigen Repräsentanten.*

15.27 Beispiel. In Beispiel 15.9 hatten wir gesehen, dass die Funktion $|x|^{-\beta}$ genau dann in $W^{1,p}(B_1(0))$ ist, wenn $n > (\beta + 1)p$. Wenn nun $1 < \frac{n}{p}$, so existiert $\beta > 0$, so dass $n > (\beta + 1)p$. Das bedeutet, dass $W^{1,p}(B_1(0))$ für $1 < \frac{n}{p}$ unstetige Funktionen enthält.

15.28 Theorem (Divergenzsatz). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge mit C^1-Rand, sei $1 \le p < \infty$.*

(a) Es sei $u \in W^{1,p}(U)$. Dann gilt für $j = 1, \dots, n$

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_j} d\lambda_n = \int_{\partial U} u\nu_j d\sigma,$$

wobei ν_j die j-te Komponente der äußeren Einheitsnormalen ist.

(b) Es sei $u \in W^{1,p}(U, \mathbb{R}^n)$, d. h. die Komponenten von u seien in $W^{1,p}(U)$. Dann gilt

$$\int_U \operatorname{div} u \, d\lambda_n = \int_{\partial U} \langle u, \nu \rangle \, d\sigma.$$

Entsprechend bekommt man dann die Greenschen Formeln für Funktionen in $W^{2,p}$.

15.29 Theorem. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge mit C^1-Rand und sei $1 \leq p < \infty$. Seien $f, g \in W^{2,p}(U)$ und $h \in W^{1,p}(U)$. Dann*

(a)

$$\int_U h\, \Delta \overline{g}\, d\lambda_n = -\int_U \langle \nabla h, \nabla g \rangle\, d\lambda_n + \int_{\partial U} h \langle \nabla \overline{g}, \nu \rangle\, d\sigma.$$

(b)

$$\int_U (f\, \Delta g - g\, \Delta f) d\lambda_n = \int_{\partial U} (f \langle \nabla g, \nu \rangle - g \langle \nabla f, \nu \rangle)\, d\sigma.$$

15.30 Definition. Mit $W_0^{k,p}(U)$ wird der Abschluss von $\mathcal{D}(U)$ in $W^{k,p}(U)$ bezeichnet. Statt $W_0^{k,2}(U)$ schreibt man auch $H_0^k(U)$.

15.31 Beispiel. (a) $W_0^{0,p}(U) = W^{0,p}(U) = L^p(U)$.

(b) $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Den Beweis des folgenden Satzes findet man ebenfalls in Abschnitt 5.5 des Buchs von Evans.

15.32 Theorem. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge mit C^1-Rand und sei*

$$T \colon W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

der Spuroperator. Dann gilt

$$W_0^{1,p}(U) = \ker T.$$

15.33 Beispiel. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge mit C^1-Rand. Dann $W_0^{1,p}(U) \neq W^{1,p}(U)$.

16 Energiemethoden

16.1 Bezeichnung. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $f \in H^1(U)$. Die Abbildung

$$I\colon H^1(U) \to \mathbb{R}, \quad I(w) = \int_U \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\right) d\lambda_n,$$

bezeichnet man als *Energiefunktional.*

16.2 Lemma. *Sei* $1 \leq p < \infty$ *und sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine beschränkte offene Menge mit* C^1*-Rand, sei* $u \in W^{2,p}(U)$ *und sei* $w \in W^{1,p}(U)$*. Ferner sei* $\nabla u = 0$ *in* ∂U *oder* $w = 0$ *in* ∂U*. Dann*

$$-\int_U (\Delta u) w \, d\lambda_n = \int_U \langle \nabla u, \nabla w \rangle \, d\lambda_n.$$

16.3 Satz. *Sei* $1 \leq p < \infty$ *und sei* $u \in W^{2,p}(U)$ *mit* $u|_{\partial U} = 0$ *oder* $\nabla u|_{\partial U} = 0$*. Ferner gebe es ein* $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit* $\Delta u = \lambda u$*. Dann* $\lambda \leq 0$*.*

16.4 Theorem (Dirichletsches Prinzip). *Sei* $1 \leq p < \infty$ *und sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine beschränkte offene Menge mit* C^1*-Rand. Sei* $f \in L^p(U)$*, sei* $g \in C(\partial U)$ *und sei* $\mathcal{A} = \{w \in W^{2,p}(U) \mid w = g \text{ in } \partial U\}$*. Dann ist* $u \in \mathcal{A}$ *genau dann die Lösung von*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \textit{in } U \\ u &= g && \textit{in } \partial U \end{aligned}$$

wenn

$$I(u) = \min\{I(w) \mid w \in \mathcal{A}\}.$$

Bemerkung. Das Dirichletsche Prinzip liefert keinen Existenzbeweis, weil $\mathcal{A}$ nicht kompakt ist. Noch nicht einmal die Einheitskugel in $W^{2,p}(U)$ ist kompakt.

Die Eindeutigkeit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung hatten wir schon mit dem Maximumprinzip gezeigt. Wir machen es noch einmal mit einer Energiemethode.

16.5 Bezeichnung. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge mit C^1-Rand und sei $T > 0$. Wir setzen $U_T = U \times (0, T]$ und $\Gamma_T = \overline{U}_T \setminus U_T$, also $\Gamma_T = \{(x, t) \in \partial U_T \mid t \neq T\}$.

16.6 Theorem. *Seien* $f \in C(U_T)$ *und* $g \in C(\Gamma_T)$*. Dann besitzt das gemischte Anfangs- und Randwertproblem*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \textit{in } U_T \\ u &= g && \textit{in } \Gamma_T \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung in $C^2(\overline{U}_T)$*.*

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit der Lösung der Rückwärtsdiffusionsgleichung.

16.7 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine beschränkte offene Menge mit* C^1*-Rand, sei* $T > 0$, $f \in C(U_T)$ *und sei* $g \in C(\Gamma_T)$. *Dann gibt es höchstens eine Lösung* $u \in C^2(\overline{U}_T)$ *des kombinierten Anfangs- und Randwertproblems für die Rückwärtsdiffusionsgleichung*

$$\begin{aligned} u_t + \Delta u &= f && \textit{in } U_T \\ u &= g && \textit{in } \Gamma_T \end{aligned}$$

16.8 Satz. *Zu jedem* $T > 0$ *gibt es* $g \in C(U)$ *mit* $g|_{\partial U} = 0$, *so dass das Anfangs- und Randwertproblem*

$$\begin{aligned} u_t + \Delta u &= 0 && \textit{in } U_T \\ u &= g && \textit{in } U \times \{0\} \\ u &= 0 && \textit{in } \partial U \times (0, T) \end{aligned}$$

keine Lösung $u \in C^2(\overline{U}_T)$ *besitzt.*

17 Die Euler-Lagrange Gleichung

17.1 Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Eine *Lagrange-Funktion* ist eine C^1-Funktion $L\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U} \to \mathbb{R}$. Die Variablen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U}$ werden mit $(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n) = (p, z, x)$ bezeichnet.

Das Funktional

$$I(w) = \int_U L\big(w_{x_1}(x), \dots, w_{x_n}(x), w(x), x_1, \dots, x_n\big)\, d\lambda_n(x) \\ = \int_U L\big(\nabla w(x), w(x), x\big)\, d\lambda_n(x)$$

bezeichnet man als *Energiefunktional.*

Beispiel. Im Beispiel 16.1 war $L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2 - z\, f(x)$.

17.2 Bemerkung. Für $g \in W^{1,p}(\partial U)$ sei

$$\mathcal{A} = \{w \in W^{2,p}(U) \mid w = g \text{ in } \partial U\}.$$

Es gebe ein $u \in \mathcal{A}$ mit $I(u) = \min\{I(w) \mid w \in \mathcal{A}\}$. Fixiere $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Dann besitzt die Funktion

$$h(\tau) = I(u + \tau\varphi)$$

ein Minimum in $\tau = 0$. Ihre Ableitung ist

$$h'(\tau) = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u + \tau\nabla\varphi, u + \tau\varphi, x)\varphi_{x_i} + L_z(\nabla u + \tau\nabla\varphi, u + \tau\varphi, x)\varphi\, d\lambda_n(x).$$

Also

$$0 = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x)\varphi_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)\varphi\, d\lambda_n(x).$$

Wir wenden den Divergenzsatz 15.28 an auf das Vektorfeld $F = L_{p_i}(\nabla u, u, x)\varphi e_i$. Da φ kompakten Träger in U hat, folgt

$$\int_U \sum_{i=1}^n \big(L_{p_i}(\nabla u, u, x)\big)_{x_i}\, \varphi\, d\lambda_n + \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x)\varphi_{x_i}\, d\lambda_n = 0$$

und daher

$$0 = \int_U \Big(-\sum_{i=1}^n \big(L_{p_i}(\nabla u, u, x)\big)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)\Big)\varphi\, d\lambda_n(x).$$

Da dies für alle $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt, folgt die *Euler-Lagrange Gleichung*

$$-\sum_{i=1}^{n} \big(L_{p_i}(\nabla u, u, x)\big)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \quad \text{in } U. \tag{17.1}$$

17.3 Beispiel. (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand, sei $f \in C(\overline{U})$. Setze

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2 - zf.$$

wie in Beispiel 16.1. Dann $L_{p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_n^2) = p_i$ und daher

$$(L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} = (u_{x_i})_{x_i} = u_{x_i x_i}.$$

Ferner $L_z(p, z, x) = -f$. Die Euler-Lagrange Gleichung lautet also

$$-\Delta u - f = 0.$$

Das ist die Poisson-Gleichung.

(b) Sei U ein beschränktes Intervall, sei $f \in C(\mathbb{R})$ und sei F eine Stammfunktion von f. Wir setzen

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2 - F(z).$$

Dann $(L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} = u_{x_i x_i}$ wie oben und $L_z(p, z, x) = -f(z)$. Die Euler-Lagrange Gleichung lautet

$$-\Delta u - f(u) = 0.$$

Das ist eine *nichtlineare Poisson-Gleichung.*

(c) Sei nun

$$L(p, z, x) = \sqrt{1 + |p|^2}.$$

Dann ist

$$L_{p_i} = \frac{p_i}{\sqrt{1 + |p|^2}}.$$

Die Euler-Lagrange Gleichung ist dann

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0.$$

Das ist die *Minimalflächengleichung.* Bei der linken Seite handelt es sich um die mittlere Krümmung des Graphen von u.

18 Existenz eines Minimierers

Dieses Kapitel orientiert sich an Abschnitt 8.2 des Buchs von Evans. Dort findet man auch die Beweise.

18.1 Lemma. *Für ein* q *mit* $1 \leq q < \infty$ *erfülle die Lagrange-Funktion* L *die Abschätzung*

$$\exists \alpha > 0, \beta \geq 0 \,\forall p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in U : L(p, z, x) \geq \alpha |p|^q - \beta. \tag{18.1}$$

Dann gibt es $\delta > 0$*, so dass mit* $\gamma = \beta \lambda_n(U)$ *gilt*

$$I(w) \geq \delta \|\nabla w\|^q_{L^q(U)} - \gamma. \tag{18.2}$$

Die Abschätzung (18.2) bezeichnet man als *Koerzivitätsbedingung*. Wir werden sehen, dass die Koerzivitätsbedingung sicherstellt, dass jede Folge $(w_j)_j$, für die $I(w_j)$ gegen das Infimum konvergiert, beschränkt ist.

18.2 Bemerkung. Wir hatten die folgenden Lagrange-Funktionen betrachtet:

(a) $L = \frac{1}{2}|p|^2 - zf$. Sie ist offenbar koerziv, $q = 2$.

(b) $L = \frac{1}{2}|p|^2 - F(z)$. Sie ist offenbar koerziv, $q = 2$.

(c) $L = \sqrt{1 + |p|^2}$. Ebenfalls koerziv, $q = 1$ (was für die weiteren Schlüsse allerdings nicht ausreichen wird).

18.3 Definition. Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Sei *Dualraum* E' besteht aus allen stetigen, linearen Abbildungen $y\colon E \to \mathbb{K}$. Die Norm auf E' ist die Operatornorm

$$\|y\| = \sup\{|\langle y, x\rangle| \mid x \in E,\ \|x\| = 1\}.$$

18.4 Beispiel. Für $1 < p < \infty$ ist der Dualraum des $L^p(U)$ der $L^q(U)$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Das wird in der Funktionalanalysis gezeigt. Für den $x \in \ell^p$ und $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ gilt $\langle T, x\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$.

In der Funktionalanalysis werden wir sehen, dass jeder Banachraum E in natürlicher Weise Unterraum des Dualraums seines Dualraums ist. Wenn diese Einbettung sogar surjektiv ist, ist E *reflexiv*. Wir werden zeigen, dass Hilberträume reflexiv sind. Wenn wir für $p > 1$ zeigen, dass $L^q(U)$ der Dualraum des $L^p(U)$ ist, werden wir dabei auch die Reflexivität des $L^p(U)$ zeigen. Der $L^1(U)$ ist dagegen nicht reflexiv.

Man zeigt ferner, dass für $q > 1$ die Sobolewräume $W^{k,q}(U)$ ebenfalls reflexiv sind.

18.5 Definition. Es sei E ein Banachraum. Eine Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in E *konvergiert schwach* gegen $u \in E$, wenn $\lim_{j\to\infty} \langle y, u_j\rangle = \langle y, u\rangle$ für alle $y \in E'$.

18.6 Beispiel. $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine schwache Nullfolge in ℓ^p, obwohl $\|e_j\|_p = 1$ für alle j.

Der folgende Satz von Hilbert (für Hilberträume) und Banach (für Banachräume) wird in der Funktionalanalysis gezeigt

18.7 Theorem. *In einem reflexiven Raum besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

Der nächste Satz ist eine Folgerung aus dem Prinzip von der gleichmäßigen Beschränkheit, welches ebenfalls in der Funktionalanalysis gezeigt wird.

18.8 Satz. *Jede schwach konvergente Folge in einem Banachraum ist beschränkt in der Normtopologie.*

18.9 Satz (Satz von Mazur). *Sei E ein normierter Raum, sei $A \subset E$ konvex und abgeschlossen und sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die schwach gegen $u \in E$ konvergiert. Dann $u \in A$.*

Das bedeutet, dass jede konvexe, abgeschlossene Menge schwach abgeschlossen ist. Beispiel 18.6 zeigt, dass es abgeschlossene Mengen gibt, die nicht schwach abgeschlossen sind.

18.10 Bezeichnung. (a) Im folgenden sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand und es sei $1 < q < \infty$. Bei Resultaten, die keine Theoreme sind, wird diese Voraussetzung nicht wiederholt.

(b) Es sei $g \in L^q(\partial U)$ und es sei $T\colon W^{1,q}(U) \to L^q(U)$ die Spurabbildung. Wir bezeichnen die Elemente von

$$\mathcal{A} = \{u \in W^{1,q}(U) \mid T(u) = g\}$$

als *zulässige* Funktionen.

18.11 Theorem (Poincaré-Ungleichung, Evans 5.8.1). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und sei $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $C > 0$, so dass für alle $u \in W_0^{1,p}(U)$ gilt*

$$\|u\|_{L^p(U)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(U)}.$$

18.12 Satz. *Sei I das Energiefunktional zu einer Lagrange-Funktion L, welche die Koerzivitätsbedingung zu $q \in \,]1,\infty[$ erfüllt. Dann existiert eine schwach konvergente Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$, so dass der schwache Limes in $\mathcal{A}$ liegt und $\lim_{k\to\infty} I(u_k) = \inf\{I(w) \mid w \in \mathcal{A}\}$.*

Bemerkung. Es gibt keinen Grund zu der Annahme, dass I schwach stetig ist. Daher ist nicht klar, dass der schwache Grenzwert ein Minimierer ist.

18.13 Definition. Eine Funktion $I\colon E \to (-\infty, \infty]$ auf einem normierten Raum E ist *schwach unterhalb folgenstetig*, wenn für jede schwach konvergente Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit schwachem Grenzwert u gilt

$$I(u) \leq \liminf_{k\to\infty} I(u_k).$$

Den folgenden Satz zeigen wir ebenfalls in der Funktionalanalysis.

18.14 Theorem (Satz von Rellich, Evans 5.7). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit C^1-Rand und sei $1 \leq p < \infty$. Jede beschränkte Folge in $W^{1,p}(U)$ besitzt eine in $L^p(U)$ konvergente Teilfolge.*

18.15 Theorem (Satz von Egorow). *Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge in $W^{1,q}(U)$. Dann existiert eine Teilfolge $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass zu jedem $\epsilon > 0$ eine messbare Teilmenge $E_\epsilon \subset U$ mit $\lambda_n(U \setminus E_\epsilon) \leq \epsilon$ existiert, für welche die Folge der Einschränkungen $(u_{j_k}|_{E_\epsilon})_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf E_ϵ konvergiert.*

18.16 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f \in C^2(U)$ konvex. Dann gilt für $y, z \in U$*

$$f(y) \geq f(z) + \langle \nabla f(z), y - z \rangle .$$

18.17 Satz. *Es sei L eine von unten beschränkte Lagrange-Funktion, so dass für alle Wahlen von $z \in \mathbb{R}$ und $x \in \overline{U}$ die Funktion $p \mapsto L(p, z, x)$ konvex ist. Dann ist das zugehörige Energiefunktional I schwach unterhalb folgenstetig.*

18.18 Theorem. *Sei L eine Lagrange-Funktion, welche die Koerzivitätsbedingung (18.2) erfüllt und konvex in den p-Variablen ist. Die Menge $\mathcal{A}$ der zulässigen Funktionen sei nicht leer. Dann gibt es mindestens eine Funktion $u \in \mathcal{A}$ mit $I(u) = \min\{I(w) \mid w \in \mathcal{A}\}$.*

Man bezeichnet u als *Minimierer* des Lagrange-Funktionals.

Man kann zeigen (Evans, Theorem 3 in §8.3)

18.19 Theorem. *Wenn die Lagrange-Funktion nicht von z abhängt und die folgende, gleichmäßige Konvexitätsbedingung erfüllt*

$$\exists \theta > 0 \,\forall p \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n, x \in U : \sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i,p_j}(p, x)\xi_i\xi_j \geq \theta\|\xi\|^2,$$

dann gibt es höchstens einen Minimierer.

19 Regularität von Minimierern

Dieses Kapitel orientiert sich an den Abschnitten 8.2.3 und 8.3 des Buchs von Evans. Dort findet man auch die Beweise.

Da Minimierer bloß in $W^{1,q}(U)$ zu liegen brauchen, ist nicht klar, ob und in welchem Sinn sie die Euler-Lagrange Gleichung lösen.

Wir verwenden dieselben Bezeichnungen und Annahmen wie im vorigen Kapitel.

19.1 Bemerkung. Für dieses Kapitel setzen wir voraus, dass es $C > 0$ gibt, so dass für alle $p \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ und $x \in U$ gilt

$$\begin{aligned} |L(p,z,x)| &\le C(|p|^q + |z|^q + 1), \\ |\nabla_p L(p,z,x)| &\le C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1), \\ |L_z(p,z,x)| &\le C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1). \end{aligned} \tag{19.1}$$

Falls es einen Minimierer $u \in C^2(\overline{U})$ gibt, hatten wir in Bemerkung 17.2 gesehen, dass für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt

$$0 = \int_U \left(\sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x)\varphi_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)\varphi \right) d\lambda_n(x).$$

Da $u \in W^{1,q}(U)$, ist für jedes i die Funktion $L_{p_i}(\nabla u(x), u(x), x)$ in $L^{q'}(U)$, wobei $q' = \frac{q}{q-1}$; das folgt, wenn man (19.1) wie folgt hinschreibt

$$|\nabla_p L(p,z,x)| \le C \max(|p|^{q-1}, |z|^{q-1}, 1).$$

Dasselbe gilt für L_z. Sei nun $v \in W_0^{1,q}(U)$. Dann existiert eine Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(U)$, die in $W^{1,q}(U)$ gegen v konvergiert. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} &\int_U \left(\sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x)v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)v \right) d\lambda_n(x) \\ &= \int_U \left(\sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x)(v_{x_i} - (\varphi_j)_{x_i}) + L_z(\nabla u, u, x)(v - \varphi) \right) d\lambda_n(x) \\ &\le \sum_{i=1}^n \|L_{p_i}(\nabla u, u, x)\|_{L^{q'}(U)} \|v_{x_i} - (\varphi_j)_{x_i}\|_{L^q(U)} + \|L_z(\nabla u, u, x)\|_{L^{q'}(U)} \|v - \varphi_j\|_{L^q(U)} \\ &\to 0, \quad j \to \infty. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die linke Seite verschwindet.

19.2 Definition. Eine Funktion $u \in W^{1,q}(U)$ ist eine *schwache Lösung* des Randwertproblems

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(L_{p_i}(\nabla u, u, x)\right)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \qquad \text{in } U$$
$$u = g \qquad \text{in } \partial U$$

wenn $u \in \mathcal{A}$ und

$$0 = \int_U \left(\sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(\nabla u, u, x) v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) v \right) d\lambda_n(x)$$

für alle $v \in W_0^{1,q}(U)$.

19.3 Lemma (Youngsche Ungleichung). *Für* $a, b > 0$ *und* $p, q > 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt*

$$a^{1/p} b^{1/q} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

19.4 Theorem. *Die Lagrange-Funktion* L *erfülle die Ungleichungen (19.1) und für* $u \in \mathcal{A}$ *gelte* $I(u) = \min\{I(w) \mid w \in \mathcal{A}\}$. *Dann ist* u *eine schwache Lösung des Randwertproblems 19.2.*

In Bemerkung 17.2 hatten wir eine schwächere Version dieses Satzes behandelt, bei der $u \in W^{2,q}(U)$ vorausgesetzt ist. Der Beweis ist ähnlich, man muss aber bei der Ableitung unter dem Integral besser achtb geben.

Unter Zusatzvoraussetzungen gilt auch die Umkehrung

19.5 Satz. *Für jedes* $x \in U$ *sei die Abbildung* $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $(p, z) \mapsto L(p, z, x)$ *konvex. Dann gilt für jede schwache Lösung* u *des Randwertproblems 19.2*

$$I(u) = \min\{I(w) \mid w \in \mathcal{A}\}.$$

19.6 Bezeichnung. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $V \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\overline{V} \subset U$. Für $0 < |h| < \operatorname{dist}(V, \partial U)$, $x \in V$, $k = 1, \ldots, n$ und $u \in L^q(U)$ definieren wir den *Differenzenquotienten* als

$$D_k^h u(x) = \frac{1}{h}(u(x + he_k) - u(x)).$$

19.7 Lemma (Partielle Integration für Differenzenquotienten). *Sei* $u \in L^q(U)$ *und sei* $\varphi \in \mathcal{D}(V)$. *Dann gilt für hinreichend kleine* $h \neq 0$

$$\int_U u \, D_k^h \varphi \, d\lambda_n = -\int_U \varphi \, D_k^{-h} u \, d\lambda_n.$$

19.8 Satz. *Sei* $1 \leq q < \infty$ *und* $u \in W^{1,q}(U)$. *Dann gilt für jede beschränkte, offene Menge* V *mit* $\overline{V} \subset U$ *und für alle Wahlen* $k = 1, \ldots, n$ *und* $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial U)$

$$\|D_k^h u\|_{L^q(V)} \leq \|u_{x_k}\|_{L^q(U)}.$$

19.9 Satz. *Sei* $1 < q < \infty$, *sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $V \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt mit* $\overline{V} \subset U$ *und sei* $u \in L^q(U)$. *Es gebe eine Konstante* $C > 0$, *so dass*

$$\|D_k^h u\|_{L^q(V)} \leq C$$

für alle $k = 1, \ldots, n$ *und* $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial U)$. *Dann* $u \in W^{1,q}(V)$.

19.10 Bezeichnung. Mit $H^2_{\mathrm{loc}}(U)$ bezeichnen wir die Menge aller messbaren Abbildungen $f\colon U \to \mathbb{R}$, so dass für alle beschränkten, offenen Mengen V mit $\overline{V} \subset U$ die Einschränkung $f|_V$ in $H^2(V)$ liegt.

19.11 Lemma. *Für* $a, b, \epsilon > 0$

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2.$$

19.12 Theorem. *Die Lagrange-Funktion* L *habe die Gestalt* $L(p, z, x) = \widetilde{L}(p) - zf(x)$, *wobei* $f \in L^2(U)$ *und* L *für ein* $C > 0$ *die folgenden Ungleichungen erfüllt*

$$\begin{aligned} |\nabla_p L(p)| &\leq C(1 + |p|) && \text{für alle } p \in \mathbb{R}^n \\ |L_{p_i, p_j}| &\leq C && \text{für alle } p \in \mathbb{R}^n,\ i, j = 1, \ldots, n, \\ C \sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i, p_j}(p) \xi_i \xi_j &\geq |\xi|^2 && \text{für alle } p, \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{19.2}$$

Ist nun $u \in H^1(U)$ *eine schwache Lösung des Randwertproblems 19.2, so gilt* $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(U)$.

Bemerkung. Die dritte Ungleichung von (19.2) ist die *starke Konvexitätsbedingung.* Ihretwegen können wir das Ergebnis nur im Hilbertraumfall zeigen.