

Über die Anspringwahrscheinlichkeit des Auslösenden Faktors in der Krankenversicherung

Jens Piontkowski*

22. September 2015

Zusammenfassung

Im Gegensatz zur traditionellen Lebensversicherung ist in der privaten Krankenversicherung die Mindestverzinsung der Sparbeiträge nicht über die gesamte Vertragslaufzeit garantiert, sondern kann bei einer Beitragsanpassung geändert werden, wenn abzusehen ist, dass das Versicherungsunternehmen die garantierte Höhe mittelfristig nicht mehr erzielen kann. Dies reduziert das Zinsrisiko eines Krankenversicherers deutlich. Allerdings darf eine Beitragsanpassung nur stattfinden, wenn der Auslösende Faktor angesprungen ist, d.h. wenn die für das nächste Jahr erwarteten Schäden die eingepreisten, kalkulatorischen Schäden deutlich übersteigen. Dadurch verbleibt ein Zinsrisiko bei geringer medizinischer Inflation. Um die Dauer zwischen zwei Beitragsanpassungen abschätzen zu können, werden hier die Anpassungshäufigkeiten in Abhängigkeit von der medizinischen Inflation berechnet. Dabei werden insbesondere die Zufallsschwankungen in den Schäden berücksichtigt, die durch die üblicherweise verwendete numerisch instabile Extrapolation das Ergebnis stark beeinflussen.

Die substitutive Krankenversicherung ist in Deutschland auf Lebenszeit ausgelegt. Änderten sich die Rechnungsgrundlagen nicht, würde ein Versicherter lebenslang die gleiche Prämie zahlen. Seine höheren Krankheitskosten im Alter werden durch einen Sparprozess in den jüngeren Jahren finanziert.

Der Gesetzgeber hat verfügt, dass für die erwarteten Schäden nur die Inflation des nächsten Jahres in die Prämien eingepreist werden soll. Dies führt dazu, dass nach einigen Jahren die Prämien nicht mehr ausreichend sind. Deshalb sind die Versicherungsunternehmen verpflichtet, die erwarteten Schäden jährlich nach folgenden Verfahren zu überprüfen:

Im Frühling eines Jahres werden auf Basis der Schadenerfahrung der letzten drei Jahre die Schäden für das folgende Jahr geschätzt und durch den kalkulatorischen Schaden geteilt. Dies ist der Auslösende Faktor. Weicht er um mehr als 10% von 100% ab, so muss nach den Vorschriften des VAG §12b der Tarif angepasst werden, falls die Veränderung nicht als kurzfristig angesehen werden kann. Meist sehen die AVB der Tarife vor, dass eine Beitragsanpassung schon bei einer Abweichung von 5% möglich ist.

Darüber hinaus gibt es noch eine Beitragsanpassung wegen Sterblichkeitsverbesserung. Von Bedeutung ist die in der Praxis nur für Pflgetarife wegen des

*ERGO Versicherungsgruppe AG, IRMEK, Aachener Strasse 300, 50933 Köln, Jens.Piontkowski@ergo.de

steilen Profils und für Tagegelder, die als Summenversicherung keiner Inflation unterliegen.

Bei einer Beitragsanpassung werden alle Rechnungsgrundlagen des Tarifes aktualisiert: die erwarteten Schäden, Kosten, Storno- und Sterbewahrscheinlichkeiten sowie der Rechnungszins. Im augenblicklichen Tiefzinsumfeld bei normaler Inflation bewirkt die Möglichkeit der Absenkung des Rechnungszinses eine deutliche Reduktion des Kapitalmarktrisikos einer Krankenversicherung gegenüber einer Lebensversicherung, die den Rechnungszins über die gesamte Vertragslaufzeit garantiert. Normalerweise ist jedoch die Inflationsrate an die Kapitalmarktzinsen gekoppelt. Man erwartet daher, dass bei tiefen Kapitalmarktzinsen Beitragsanpassungen seltener stattfinden. Dies bedeutet, dass die Rechnungszinsen gerade dann längerfristig in der Krankenversicherung garantiert werden, wenn sie schwieriger zu erwirtschaften sind!

Hier soll berechnet werden, wie häufig der Auslösende Faktor anspringt. Dabei sollen insbesondere neben der Inflation auch die zufallsbedingten Schwankungen der Schäden berücksichtigt werden. Zur Extrapolation der Schäden wird die in der KalV empfohlene lineare Extrapolation genutzt [KalV]. Von dieser Formel ist allgemein bekannt, dass sie numerisch instabil ist, folglich führen kleine Schwankungen in den Leistungen zu großen Schwankungen im Auslösenden Faktor. Insgesamt zeigt sich, dass durch die Zufallsschwankungen der Auslösende Faktor bei niedriger Inflation häufiger anspringt als allgemein erwartet.

1 Ein Modell für den Auslösenden Faktor

Der alters- und zeitabhängige erwartete Schaden eines Versicherten, der Kopfschaden $K_{x,t}$, wird in der Krankenversicherung als Produkt $K_{x,t} = k_x \bar{G}_t$ eines altersabhängigen Profils k_x und eines zeitabhängigen Grundkopfschaden \bar{G}_t modelliert.

Für unsere Untersuchungen nehmen wir an, dass der Grundkopfschaden eine Zufallsvariable ist, das Profil aber fest ist. Wir bezeichnen den Grundkopfschaden als Zufallsvariable mit G_t und seinen Erwartungswert mit $\mu_t := \bar{G}_t := E(G_t)$. Weiter nehmen wir an, dass das Kollektiv I der n Versicherten sich im beobachteten Zeitraum außer durch Alterung nicht verändert. Für einen Versicherten i sei $x_{i,t}$ sein Alter im Jahr t und $S_{i,t}$ die Zufallsvariable seiner Schadenzahlung. Nach den Voraussetzungen gilt

$$K_{x_{i,t},t} = E(S_{i,t}) = E(k_{x_{i,t}} G_t) = k_{x_{i,t}} E(G_t) = k_{x_{i,t}} \bar{G}_t$$

und folglich

$$\bar{G}_t = \frac{\sum_{i \in I} k_{x_{i,t}} \bar{G}_t}{\sum_{i \in I} k_{x_{i,t}}} = \frac{\sum_{i \in I} E(S_{i,t})}{\sum_{i \in I} k_{x_{i,t}}}.$$

Daher nutzt man beim Vorliegen der tatsächlichen Schadenerfahrungen $\tilde{S}_{i,t}$ den sogenannten beobachteten Grundkopfschaden

$$\hat{\mu}_t := \hat{G}_t := \frac{\sum_{i \in I} \tilde{S}_{i,t}}{\sum_{i \in I} k_{x_{i,t}}}$$

als Erwartungswertschätzer. Nach dem Zentralen Grenzwertsatz konvergiert er für großes n gegen eine Normalverteilung. Wir werden für diese Untersuchung daher annehmen, dass die Grundkopfschäden G_t normalverteilt sind.

Die KalV empfiehlt im Jahr $t + 1$ den Grundkopfschaden des Jahres $t + 2$ durch lineare Extrapolation aus den beobachteten Grundkopfschäden der letzten drei Jahre zu schätzen. Wir definieren entsprechend die Zufallsvariable des geschätzten Grundkopfschadens durch

$$\begin{aligned} G_{\text{est},t+2} &:= \frac{1}{3}(G_{t-2} + G_{t-1} + G_t) + \frac{3}{2}(G_t - G_{t-2}) \\ &= -\frac{7}{6}G_{t-2} + \frac{1}{3}G_{t-1} + \frac{11}{6}G_t. \end{aligned}$$

Eine analoge Formel ergibt sich für den Erwartungswertschätzer von $G_{\text{est},t+2}$.

Das Auftreten der hohen positiven und negativen Koeffizienten bewirkt eine numerische Instabilität der Extrapolation. Gleichzeitig ist der Koeffizient vor dem mittleren Grundkopfschaden sehr gering, so dass dieses Beobachtungsjahr kaum Einfluss hat.

Der Auslösende Faktor ist Quotient aus diesem Schätzwert und dem kalkulatorischen Schaden:

$$AF_{t+1} = \frac{G_{\text{est},t+2}}{G_{\text{kalk},t+1}}.$$

Um die Formel wahrscheinlichkeitstheoretisch weiter untersuchen zu können, nehmen wir an, dass die G_t bis auf einen Faktor die gleiche Verteilung haben, d.h. G_t ist verteilt wie $\lambda_t G$ mit $\lambda_t \in \mathbb{R}_{>0}$ und einer Normalverteilung G . Dieser Faktor beschreibt die medizinische Inflation, die wir hier vereinfachend als feste Größe und nicht als Zufallsvariable modellieren. Sei μ_G der Erwartungswert, σ_G die Standardabweichung und $v_G = \sigma_G/\mu_G$ der Variationskoeffizient von G . Da G_t ein Vielfaches von G ist, gilt $\mu_t := \mu_{G_t} = \lambda_t \mu_G$, $\sigma_t := \sigma_{G_t} = \lambda_t \sigma_G$ und $v_t := v_{G_t} = v_G$.

Wir treffen darüber hinaus die Annahme, dass der ganze Vektor $(G_t)_t$ multidimensional normalverteilt ist. Damit sind auch $G_{\text{est},t+2}$ und AF_{t+1} normalverteilt. Weiter sollen die Korrelationen der Kopfschäden nur von ihrem zeitlichem Abstand abhängen, d.h. die $\text{Cor}(G_t, G_{t+s})$ sind für alle t gleich einer Konstante ρ_s . Dieser Ansatz ist sinnvoll, weil die Korrelationen invariant unter Multiplikation der Grundkopfschäden mit festen positiven Zahlen sind — und damit von der Inflation. Fachlich bedeuten diese Annahmen, dass die Sequenz der Kopfschäden bis auf die medizinische Inflation invariant unter einer Zeitverschiebung ist.

Nun können wir für die Zufallsvariable $G_{\text{est},t+2}$ den Erwartungswert, die Varianz und den Variationskoeffizienten berechnen:

$$\mu_{\text{est},t+2} := \mathbb{E}(G_{\text{est},t+2}) = \left(-\frac{7}{6}\lambda_{t-2} + \frac{1}{3}\lambda_{t-1} + \frac{11}{6}\lambda_t\right) \mu_G$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{est},t+2}^2 &:= \text{Var}(G_{\text{est},t+2}) = \left[\left(-\frac{7}{6}\right)^2 \lambda_{t-2}^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \lambda_{t-1}^2 + \left(\frac{11}{6}\right)^2 \lambda_t^2 \right] \sigma_G^2 \\ &\quad + 2 \left[\left(-\frac{7}{6}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \lambda_{t-2} \lambda_{t-1} + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{11}{6}\right) \lambda_{t-1} \lambda_t \right] \varrho_1 \sigma_G^2 \\ &\quad + 2 \left(-\frac{7}{6}\right) \left(\frac{11}{6}\right) \lambda_{t-2} \lambda_t \varrho_2 \sigma_G^2 \\ &= \left[\frac{49}{36} \lambda_{t-2}^2 + \frac{1}{9} \lambda_{t-1}^2 + \frac{121}{36} \lambda_t^2 - \frac{7}{9} \lambda_{t-2} \lambda_{t-1} \varrho_1 + \frac{11}{9} \lambda_{t-1} \lambda_t \varrho_1 - \frac{77}{18} \lambda_{t-2} \lambda_t \varrho_2 \right] \sigma_G^2 \end{aligned}$$

$$v_{\text{est},t+2} := \frac{\sigma_{\text{est},t+2}}{\mu_{\text{est},t+2}} = \frac{\sqrt{\frac{49}{36} \lambda_{t-2}^2 + \frac{1}{9} \lambda_{t-1}^2 + \frac{121}{36} \lambda_t^2 - \frac{7}{9} \lambda_{t-2} \lambda_{t-1} \varrho_1 + \frac{11}{9} \lambda_{t-1} \lambda_t \varrho_1 - \frac{77}{18} \lambda_{t-2} \lambda_t \varrho_2}}{-\frac{7}{6} \lambda_{t-2} + \frac{1}{3} \lambda_{t-1} + \frac{11}{6} \lambda_t} v_G$$

Durch die Inflation erscheint diese Formel sehr kompliziert. Bei Vernachlässigung der Inflation, d.h. $\lambda_t \equiv 1$, ergibt sich zeitunabhängig

$$\begin{aligned} \mu_{\text{est}} &= \mu_G \\ \sigma_{\text{est}}^2 &= \left(\frac{29}{6} + \frac{4}{9} \varrho_1 - \frac{77}{18} \varrho_2\right) \sigma_G^2 = (4.8\bar{3} + 0.\bar{4} \varrho_1 - 4.2\bar{7} \varrho_2) \sigma_G^2 \\ v_{\text{est}} &= v_G \sqrt{\frac{29}{6} + \frac{4}{9} \varrho_1 - \frac{77}{18} \varrho_2}. \end{aligned}$$

Man erkennt hier deutlich, dass der Einfluss der Korrelation von aufeinander folgenden Schäden, ϱ_1 , viel geringer ist als die Korrelation von um ein Jahr getrennten Schäden, ϱ_2 .

Nun kann die Ansprungwahrscheinlichkeit des Auslösenden Faktors beim Überschreiten der oberen Grenze $1 + \alpha_o$ oder Unterschreiten der unteren Grenze $1 - \alpha_u$ ermittelt werden. Wir unterdrücken in den folgenden Rechnungen den Zeitindex, falls er sich eindeutig aus dem Kontext ergibt. Sei β so gewählt, dass $G_{\text{kalk}} = (1 - \beta)\mu_{\text{est}}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(AF \geq 1 + \alpha_o \vee AF \leq 1 - \alpha_u) = 1 - \mathbb{P}(1 - \alpha_u < AF < 1 + \alpha_o) \\ &= 1 - \mathbb{P}((1 - \alpha_u)G_{\text{kalk}} < G_{\text{est}} < (1 + \alpha_o)G_{\text{kalk}}) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{(1 - \alpha_u)G_{\text{kalk}} - \mu_{\text{est}}}{\sigma_{\text{est}}} < \frac{G_{\text{est}} - \mu_{\text{est}}}{\sigma_{\text{est}}} < \frac{(1 + \alpha_o)G_{\text{kalk}} - \mu_{\text{est}}}{\sigma_{\text{est}}}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{((1 - \alpha_u)(1 - \beta) - 1)\mu_{\text{est}}}{\sigma_{\text{est}}} < \frac{G_{\text{est}} - \mu_{\text{est}}}{\sigma_{\text{est}}} < \frac{((1 + \alpha_o)(1 - \beta) - 1)\mu_{\text{est}}}{\sigma_{\text{est}}}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{-\beta - \alpha_u(1 - \beta)}{v_{\text{est}}} < \frac{G_{\text{est}} - \mu_{\text{est}}}{\sigma_{\text{est}}} < \frac{-\beta + \alpha_o(1 - \beta)}{v_{\text{est}}}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{-\beta - \alpha_u(1 - \beta)}{v_{\text{est}}} < N(0, 1) < \frac{-\beta + \alpha_o(1 - \beta)}{v_{\text{est}}}\right). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Nichtanspringens entspricht also der Wahrscheinlichkeit, dass eine standardnormalverteilte Zufallsvariable innerhalb des Intervalls $]\frac{-\beta - \alpha_u(1 - \beta)}{v_{\text{est}}}, \frac{-\beta + \alpha_o(1 - \beta)}{v_{\text{est}}}[$ bleibt. Das Intervall hat die

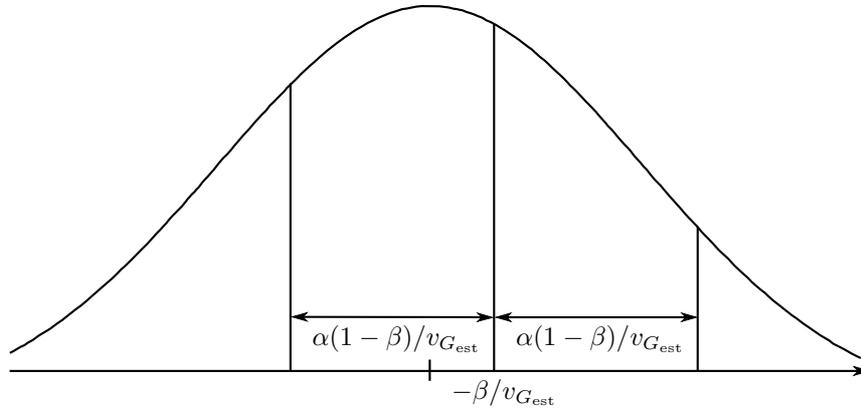


Abbildung 1: Dichte der Normalverteilung mit Intervall des Nichtanspringens

Länge $(\alpha_u + \alpha_o)(1 - \beta)/v_{est}$ und den Mittelpunkt $(\alpha_o - \alpha_u)(1 - \beta)/2v_{est} - \beta/v_{est}$. Lässt man den Auslösenden Faktor praxisüblich symmetrisch bei $\alpha := \alpha_u = \alpha_o$ anspringen, so ergibt sich ein Intervall der Länge $2\alpha(1 - \beta)/v_{est}$ mit Mittelpunkt $-\beta/v_{est}$, wie es in Abbildung 1 dargestellt ist.

Aus der Glockenform der Normalverteilungsdichte folgt, dass die Wahrscheinlichkeit von Intervallen gleicher Länge um so größer ist, je besser sie um 0 zentriert sind. Das Intervall für das symmetrische Nichtauslösen ist für $\beta = 0$ am längsten und vollständig zentriert. Daher ist dort die Wahrscheinlichkeit für das Anspringen des Auslösenden Faktor am kleinsten. Dies ist anschaulich klar, denn $\beta = 0$ bedeutet, dass der kalkulierte Schaden dem erwarteten entspricht.

2 Empirische Bestimmung des Variationskoeffizienten und der Korrelationen

Um die Auslösewahrscheinlichkeiten berechnen zu können, müssen die Variationskoeffizienten und Korrelationen der Grundkopfschäden bestimmt werden. Wir beschreiben das naheliegende Verfahren ohne Glättung, für fortgeschrittene Techniken bzgl. des Variationskoeffizienten siehe die Artikel von Siegel [S1, S2].

Die Gesamtheit der n Versicherten I wird nach dem Alter in Teilmengen $I_{x,t}$ der Größe $n_{x,t}$ zerlegt. Man nimmt an, dass die Schäden der Versicherten unabhängig sind und innerhalb von $I_{x,t}$ die gleiche Verteilung haben, die wir als Zufallsvariable mit $S_{x,t}$ bezeichnen. In der Praxis können diese Annahmen wegen der Krankenvorgeschichte der Versicherten bzw. Epidemien verletzt sein.

Auf Basis der Schadenerfahrung der letzten Jahre werden innerhalb der $I_{x,t}$ Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der Grundkopfschäden geschätzt. Vor der Analyse sollten die Daten von Ausreißern durch Großschäden befreit werden.

Die statistischen Größen der Zufallsvariablen G_t werden auf Basis der folgenden Identitäten abgeleitet:

$$\mathbb{E}(G_t) = \mathbb{E} \left(\frac{\sum_{i \in I} S_{i,t}}{\sum_{i \in I} k_{x_{i,t}}} \right) = \frac{\sum_{i \in I} \mathbb{E}(S_{i,t})}{\sum_{i \in I} k_{x_{i,t}}} = \frac{\sum_x \sum_{i \in I_{x,t}} \mathbb{E}(S_{i,t})}{\sum_x \sum_{i \in I_{x,t}} k_{x_{i,t}}} = \frac{\sum_x n_{x,t} \mathbb{E}(S_{x,t})}{\sum_x n_{x,t} k_x}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(G_t, G_{t+s}) &= \text{Cov} \left(\frac{\sum_{i \in I} S_{i,t}}{\sum_{i \in I} k_{x_{i,t}}}, \frac{\sum_{i \in I} S_{i,t+s}}{\sum_{i \in I} k_{x_{i,t+s}}} \right) = \frac{\sum_{i \in I} \text{Cov}(S_{i,t}, S_{i,t+s})}{(\sum_{i \in I} k_{x_{i,t}}) (\sum_{i \in I} k_{x_{i,t+s}})} \\ &= \frac{\sum_x n_{x,t} \text{Cov}(S_{x,t}, S_{x+s,t+s})}{(\sum_x n_{x,t} k_x) (\sum_x n_{x+s,t+s} k_{x+s})} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(G_t) = \text{Cov}(G_t, G_t) = \frac{\sum_x n_{x,t} \text{Var}(S_{x,t})}{(\sum_x n_{x,t} k_x)^2}$$

$$v_{G_t} = \frac{\sqrt{\text{Var}(G_t)}}{\mathbb{E}(G_t)} = \frac{\sqrt{\sum_x n_{x,t} \text{Var}(S_{x,t})}}{\sum_x n_{x,t} \mathbb{E}(S_{x,t})}$$

$$\varrho_s = \frac{\text{Cov}(G_t, G_{t+s})}{\sqrt{\text{Var}(G_t) \text{Var}(G_{t+s})}} = \frac{\sum_x n_{x,t} \text{Cov}(S_{x,t}, S_{x+s,t+s})}{\sqrt{(\sum_x n_{x,t} \text{Var}(S_{x,t})) (\sum_x n_{x+s,t+s} \text{Var}(S_{x+s,t+s}))}}$$

Für die Schätzung dieser Größen werden die entsprechenden Formeln genutzt, wobei jeweils im rechten Term die üblichen Schätzer für die Zufallsvariablen $S_{x,t}$ auf Basis der beobachteten Schäden herangezogen werden.

Man kann diese Größen umschreiben in Terme mit der Gesamtzahl von Versicherten n und deren Altersverteilung $(n_{x,t}/n = n_{x+s,t+s}/n)_x$. Fixiert man die Altersverteilung, dann ist ϱ_s unabhängig von n und v_G proportional zu $1/\sqrt{n}$. Daher wurde von Siegel der Begriff des bestandsunabhängigen Variationskoeffizienten $w_G = \sqrt{n} v_G$ eingeführt. Dieser ermöglicht Vergleiche bei unterschiedlichen Bestandsgrößen.

Nach den Untersuchungen von Siegel liegen die bestandsunabhängigen Variationskoeffizienten zwischen 1 und 7, wobei die Stationär- und GKV Zusatztarife im oberen Bereich zu finden sind. Die Untersuchungen des Autors an den Tarifen der DKV bestätigen dies weitgehend. Abweichend wurden einige weniger volatile Zusatztarife beobachtet und sehr volatile Kranken- und Krankenhaustagegelder deren bestandsunabhängigen Variationskoeffizienten zweistellige Höhen erreichen. Die nicht von Siegel untersuchte Pflegeversicherung erreicht Werte bis in gerade zweistelliger Höhe. Die genaue Höhe hängt selbstverständlich von den einzelnen Tarifmerkmalen ab. Die spezielle Gestaltung des Tarifes kann auch eine wichtige Rolle spielen, zum Beispiel bekommt ein GKV Zusatztarif durch die Erstattung von Heilpraktikerkosten Züge eines ambulanten Vollversicherungstarifes. Tarife mit einem älteren Versichertenkollektiv sind tendenziell volatiler, weil dort häufiger Einzelpersonen mit hohen Schäden auftreten. Empirisch wurde auch ein Einfluss der Berufsgruppe festgestellt.

Insgesamt zeichnet sich folgendes Bild ab: Die Ambulant-, Zahn- und Kompakttarife weisen eine geringe Volatilität auf, weil ihre Auszahlung von häufigen, geringen Schäden dominiert werden. Tagegelder, Pflege- und Stationär tarife weisen eine höhere Volatilität auf, weil dort mehr als 80% der Versicherten schadenfrei sind und daher die Verteilung der Schäden sehr ungleichmäßig ist.

In nächsten Abschnitt werden wir unsere Analysen auf Tarife beschränken, deren Grundkopfschaden einen Varianzkoeffizienten kleiner gleich 5% hat, weil darüber die Volatilität schon sehr groß ist. Dies kann man als Forderung an die Bestandsgröße auffassen: $5\% \leq v_G = w_G/\sqrt{n} \iff n \geq 400w_G^2$. Dies bedeutet nach den obigen empirischen Ergebnissen zum Beispiel, dass ein Stationär tarif mit $w_G = 5$ einen Bestand von mindestens 10000 haben muss, während für einen Ambulanttarif mit $w_G = 1.5$ bereits 900 reichen.

Vom Autor wurden die Korrelationen ρ_1, ρ_2, ρ_3 bei den Tarifen der DKV untersucht. Auf Basis dieser Erfahrungen werden wir beispielhaft die folgenden Fälle betrachten:

Korrelation	ρ_i
unkorreliert	0
leicht	$0.25/i$
mittel	$0.5/i$
stark	$0.7/i$

Dabei weisen nur die Pflegetarife eine starke Korrelation auf, Ambulanttarife eine mittlere und die restlichen Tarife ohne die Kompakttarife eine leichte Korrelation, die auch in Richtung unkorreliert gehen kann. Die Kompakttarife nehmen folglich eine Mittelstellungen zwischen leicht und mittel korreliert ein.

3 Quantitative Ergebnisse

Da wir nun ein Gefühl für die Größe der auftretenden Werte haben, können wir die Formeln beispielhaft auswerten. Wir werden dabei von einer festen geometrischen Inflation ausgehen, d.h. $\lambda_t \sim (1 + \iota)^t$. Alternativ hätte man auch eine lineare Inflation nutzen können, d.h. $\lambda_{t+1} = \lambda_t + \iota$. Dies ist jedoch nur über eine kurze Zeitspanne sinnvoll, denn mit diesem Ansatz konvergiert die relative jährliche Inflation in jedem Fall gegen Null, was der Erfahrung widerspricht. Über kurze Zeitspannen unterscheiden sich die Ansätze wegen der dort geltenden Approximation $(1 + \iota)^t \approx 1 + t\iota$ nur wenig, so dass wir die lineare Inflation nicht weiter betrachten werden.

Wir starten mit der Berechnung des Verhältnisses der Variationskoeffizienten des geschätzten Grundkopfschadens $G_{\text{est},t+2}$ zu dem irgendeines Grundkopfschadens G in Abhängigkeit von der Inflation und der Stärke der Korrelation, siehe Abbildung 2.

Die Reduktion der Volatilität des geschätzten Grundkopfschadens bei Anstieg der Korrelationen zwischen den Grundkopfschäden war zu erwarten, weil dies den Einfluss des Zufalls reduziert. Die Asymmetrie bezüglich Inflation und

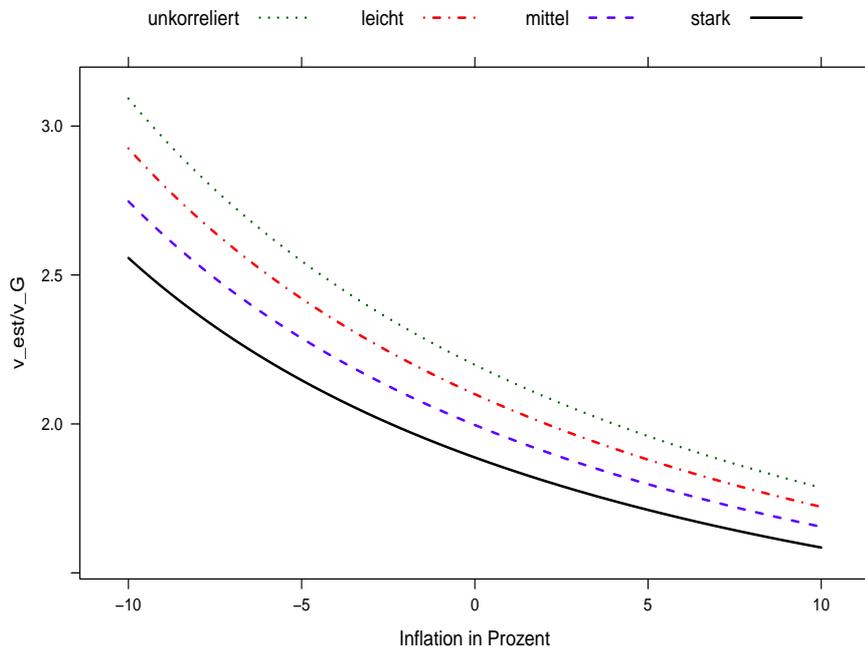


Abbildung 2: v_{est}/v_G in Abhängigkeit von Inflation und Korrelation

Deflation ist auf den ersten Blick überraschend. Inflation reduziert die Volatilität, Deflation erhöht sie. Dies wird verständlich, wenn man sich die Extrapolationsformel in Erinnerung ruft:

$$G_{est,t+2} = -\frac{7}{6}G_{t-2} + \frac{1}{3}G_{t-1} + \frac{11}{6}G_t.$$

In moderater Höhe bewirkt Deflation, dass sich die Terme $-\frac{7}{6}G_{t-2}$ und $\frac{11}{6}G_t$ stärker gegeneinander aufheben und die Volatilität damit steigt. Inflation verstärkt die schon vorhandene Dominanz der Terms $\frac{11}{6}G_t$ noch weiter und führt damit zu einer Stabilisierung.

Nun plotten wir die Anspringwahrscheinlichkeiten des Auslösenden Faktors in Abhängigkeit vom Variationskoeffizienten von G , wobei als Auslösegrenzen $\alpha = \alpha_o = \alpha_u = 5\%$ gewählt wurden. Wichtig ist die Wahl von $\beta = 1 - \mu_{est}/G_{kalk}$, die angibt in wie weit der Erwartungswert des extrapolierten Schadens den kalkulierten übersteigt. Wir betrachten die Fälle $\beta = 0\%, 3\%, 5\%$ in Abwesenheit von Inflation, siehe Abbildung 3.

Bei Graphen $\beta = 0$ entspricht der kalkulierte Schaden genau dem Erwartungswert des extrapolierten Grundkopfschadens. Bis zu einem Variationskoeffizienten von 1% werden die Auslösegrenzen selten überschritten, ab da steigt die Wahrscheinlichkeit steil an, um bereits bei einem Variationskoeffizienten von 5% die 60 Prozent zu überschreiten.

Die Änderung auf $\beta = 3\%$ bewirkt, dass der steile Anstieg früher beginnt.

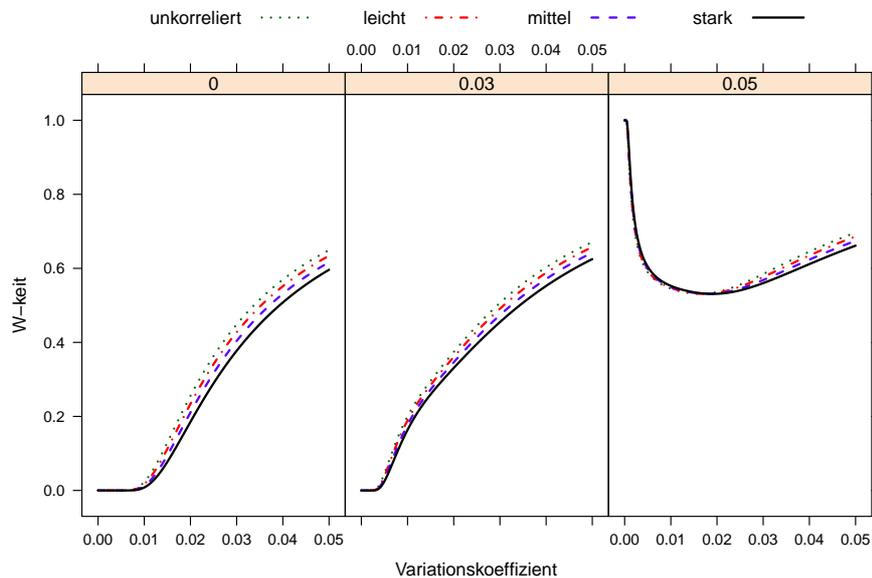


Abbildung 3: Wahrscheinlichkeit der Überschreitung der Auslösegrenzen von 5% ohne Inflation bei verschiedenen β

Bei $\beta = 5\%$ gilt $(1 + \alpha)G_{\text{kalk}} = (1 + \alpha)(1 - \beta)E(G_{\text{est}}) = 0.9975E(G_{\text{est}})$, d.h. ohne Zufallseffekte liegt G_{est} etwas oberhalb der oberen Grenze, daher beginnen die Kurven nun bei der Wahrscheinlichkeit 1. Die Zufallseffekte sorgen nun dafür, dass der Auslösende Faktor nicht anspringt.

Alle Graphen nähern sich asymptotisch 1, weil mit steigender Volatilität die Wahrscheinlichkeit, in einem festen Intervall zu bleiben, gegen 0 geht.

Um die Anspringswahrscheinlichkeit für eine Einzelbetrachtung in der Praxis zu bestimmen, muss der Parameter β aus den Daten geschätzt werden. Ist man am langfristigen Verhalten des Auslösenden Faktors bei einer festen Inflation ι interessiert, kann durch Monte-Carlo-Simulation die langfristige Verteilung von β gefunden werden bzw. die Anspringswahrscheinlichkeit kann direkt ermittelt werden.

Entscheidend dabei sind zwei Beobachtungen, die man bei einer langfristigen Simulation von beobachteten Schäden und entsprechenden Beitragsanpassungen macht: Erstens ist die Höhe des kalkulatorischen Grundkopfschadens bei Start nach der ersten Beitragsanpassung ohne Bedeutung für die weitere Simulation und zweites verschieben sich die Zeitpunkte der Beitragsanpassungen zufallsbedingt im Vergleich der verschiedenen Simulationen zueinander, so dass schließlich alle Größen eine jährliche Grenzverteilung besitzen.

Das genaue Vorgehen für jede einzelne der Monte-Carlo-Simulationen ist wie folgt:

1. Ermittle eine zufällige Realisation $(\tilde{G}_t)_t, t \geq 0$, des Vektor der Grundkopfschäden. Normieren wir ihn mit $E(G_0) = 1$, dann ist er per Annahme

multidimensional normalverteilt mit Erwartungswert $((1+\iota)^t)_t$ und Varianz $((1+\iota)^t(1+\iota)^s v_G^2 \varrho_{|t-s|})_{s,t}$ und kann mit Standardtools erzeugt werden.

2. (a) Wähle $G_{\text{kalk},t}$ für $t = 0, 1, 2, 3$ beliebig, z.B. gleich 1.
- (b) Für $t \geq 3$ berechne iterativ:
 - i. den extrapolierten Grundkopfschaden $\tilde{G}_{\text{est},t+2}$ aus den Grundkopfschäden $\tilde{G}_{t-2}, \tilde{G}_{t-1}, \tilde{G}_t$
 - ii. den Auslösenden Faktor $AF_{t+1} = \tilde{G}_{\text{est},t+2}/G_{\text{kalk},t+1}$
 - iii. den kalkulatorischen Grundkopfschaden $G_{\text{kalk},t+2}$ als $G_{\text{kalk},t+1}$, falls der Auslösende Faktor nicht anspringt, d.h. für $1 - \alpha_u < AF_{t+1} < 1 + \alpha_o$, sonst führe eine Betragsanpassung durch und setze $G_{\text{kalk},t+2} = BAP_{t+1}(\tilde{G}_0, \dots, \tilde{G}_t)$.

In der Praxis ist der Prozess der Betragsanpassung kompliziert. Es ist naheliegend für den neuen Grundkopfschaden den geschätzten Grundkopfschaden zu wählen, also $BAP_{t+1}(\tilde{G}_0, \dots, \tilde{G}_t) = \tilde{G}_{\text{est},t+2}$. Dies vernachlässigt, dass die KalV für jede Rechnungsgrundlage Sicherheiten vorschreibt. Da aber deren Höhen nicht quantifiziert werden und sie in der Praxis bei jeder Betragsanpassung zwischen Verantwortlichem Aktuar und Treuhänder abgesprochen werden, setzen wir hier vereinfachend keine an und nutzen die obige Formel. Weiter werden wir $\alpha_u = \alpha_o = 5\%$ wählen.

Nun führt man so viele Simulationen und über so viele Jahre durch, dass in den letzten Jahren die Größen stabil bleiben. Hier wurden 10000 Simulation durchgeführt. Das Erreichen einer zeitlich stabilen Verteilung von AF_{t+1} hängt stark von der Volatilität, v_G , und etwas von der Inflation ab. Der Grund dafür ist, dass wegen der Initialisierung 2 (a) alle Simulationen gleich starten. Erst durch die Zufallseffekte in den \tilde{G}_t entwickeln sich die Größen AF_{t+1} und $G_{\text{kalk},t+2}$ in den einzeln Simulationen verschieden. Je stärker der Zufallseffekt in den \tilde{G}_t , um so schneller ist der gleichartige Start nicht mehr erkennbar. Durch häufiges Anspringen des Auslösenden Faktors und den damit verbundenen Sprüngen in $G_{\text{kalk},t+2}$ bei positiver oder negativer Inflation wird dieser Effekt verstärkt. Empirisch sieht man, dass bei $v_G \geq 0.5\%$ und leichter Inflation in den meisten Fällen nach 60 Jahren eine stabilen Verteilung AF_{t+1} erreicht wird. Die Wahrscheinlichkeit des Anspringens des Auslösenden Faktors bei einer Inflation von 0%, 2%, 4%, 5%, 6% oder 8% kann man der Abbildung 4 entnehmen.

Hier wurde die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit des Anspringens in den Jahren 60 bis 120 geplottet. Wegen der oben beschriebenen Zeitkonstanz ist die Durchschnittsbildung in den meisten Fällen irrelevant. Wichtig ist sie im ebenfalls dargestellten Grenzfall $v_G = 0$, dem Fehlen eines Zufallseinflusses. Dort verlaufen alle Simulationen gleich, die angegebenen Werte sind daher der Anteil der Jahre in denen der Auslösende Faktor jeweils in einer einzigen Simulation anspringt. Beachtenswert ist der Resonanzeffekt der Inflation von 5% zu $\alpha = 5\%$ beim Fehlen des Zufallseinflusses, der zu dem Knick in den entsprechenden Kurven führt.

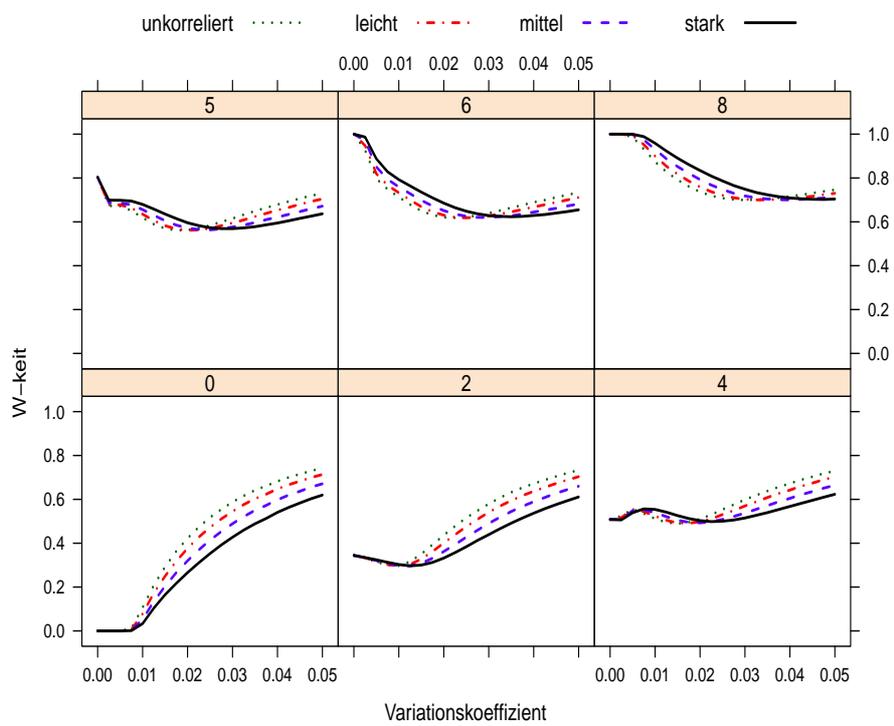


Abbildung 4: Wahrscheinlichkeit der Überschreitung der Auslösegrenzen von 5% bei verschiedenen Inflationen durch Monte-Carlo-Simulation

Die Graphen fassen die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen. Üblicherweise werden in Modellen, zum Beispiel bei der stochastischen Unternehmensbewertung, die Zufallsschwankungen in den Schäden vernachlässigt. Dort werden deshalb Anspringswahrscheinlichkeiten des Auslösenden Faktors simuliert, die einem Variationskoeffizienten von Null entsprechen, d.h. den linken Enden der Graphen. Durch Berücksichtigung des Zufalls springt der Auslösende Faktor bei geringer Inflation deutlich häufiger an. Zum Beispiel kann selbst bei Abwesenheit von Inflation ein mittelvolatiler Tarif im Durchschnitt alle drei Jahre angepasst werden! Dabei finden die Anpassungen natürlich meist abwechselnd nach oben und unten statt. In der Praxis wird man versuchen, dies zu verhindern. Weiter erschweren die Zufallsschwankungen Anpassungen bei höheren Inflationen. Bei einer 6-prozentigen Inflation sollte jedes Jahr angepasst werden, aber der Auslösende Faktor springt mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 20% nicht an.

4 Fazit für Beitragsanpassungen

Der Auslösende Faktor ist auf Grund der verwendeten, numerisch instabilen Extrapolation unerwartet hohen Zufallsschwankungen unterworfen. Dies führt sowohl dazu, dass er bei geringen Inflationen zu häufig, als auch bei hohen zu selten anspringt. Letzteres führt unmittelbar zu Schadenverlusten für das Versicherungsunternehmen. Ersteres sollte während der Beitragsanpassung bei einer Beurteilung nach VAG §12b, ob ein Schadentrend vorübergehend ist, bedacht werden. Zum Beispiel kann man bei Betrachtung der Entwicklung der empirischen Grundkopfschäden den des vorletzten Jahres stärker berücksichtigen, weil er in den Auslösenden Faktor nur mit einem geringen Anteil einging. Am besten lässt sich das Problem angehen, indem man bei der Berechnung der Auslösenden Faktoren die Schadenerfahrung ähnlicher Tarife über Stütztarife zusammenfasst, um durch den größeren Bestand die Volatilität zu reduzieren.

Literatur

- [KalV] *Verordnung über die versicherungsmathematischen Methoden zur Prämienkalkulation und zur Berechnung der Alterungsrückstellung in der privaten Krankenversicherung (Kalkulationsverordnung — KalV)*, <http://www.gesetze-im-internet.de/kalv/> (2013).
- [S1] Siegel, G.: *Varianzschätzungen von Kopfschäden*. Blätter der DGVMF **23** (1997), 147–172.
- [S2] Siegel, G.: *Signifikanztest für Kopfschadenprofile*. Blätter der DGVMF **25** (2002), 585–616.