

Wachstumsfunktionen  
von  
Coxetergruppen und Bianchigruppen

I n a u g u r a l – D i s s e r t a t i o n

zur  
Erlangung des Doktorgrades der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von  
Sascha Rogmann  
aus Düsseldorf

Uedemerbruch  
2002

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. Fritz Grunewald  
Korreferent: Prof. Dr. Wilhelm Singhof

Tag der mündlichen Prüfung: 05.02.2002

meinen Eltern



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>vii</b>
<b>1 Wachstumsfunktionen</b>	<b>1</b>
1.1 Definitionen . . . . .	1
1.2 Wachstumsfunktion als Quotient zweier Determinanten . . . . .	2
1.3 Residuum einer Wachstumsfunktion . . . . .	4
1.4 Zur Literaturlage . . . . .	5
<b>2 Rechtwinklige Coxetergruppen</b>	<b>9</b>
2.1 Graphen und Coxetergruppen . . . . .	10
2.2 Knuth-Bendix-Regelsystem . . . . .	15
2.3 2-Wachstumsmatrix rechtwinkliger Coxetergruppen . . . . .	20
2.4 2-Wachstumsfunktionen rechtwinkliger Coxetergruppen . . . . .	23
2.5 2-Wachstumsfunktion von $L_k$ . . . . .	32
<b>3 Determinanten von Bandmatrizen</b>	<b>43</b>
3.1 Bandmatrix $(x, 1 + x, x)$ . . . . .	44
3.2 Bandmatrix $(x, x, 1 + x, x, x)$ . . . . .	48
3.3 Bandmatrix $(x, x, x, 1 + x, x, x, x)$ . . . . .	51
3.4 Diagonalmatrix $1 + x$ . . . . .	55
3.5 Bandmatrix $\{(a, a, b, a, a), (a, a, a, b, a, a, a)\}$ . . . . .	56
3.6 Zähler von $f_{L_k, \Sigma_{L_k}^2}(x)$ . . . . .	61
3.7 Nenner von $f_{L_k, \Sigma_{L_k}^2}(x)$ . . . . .	64
3.8 Algorithmus zur Determinantenberechnung . . . . .	76
<b>4 Residuen von Polyederkettenwachstumsfunktionen</b>	<b>79</b>
4.1 Geometrische und algebraische Wachstumsfunktionen . . . . .	80
4.2 Dodekaederketten . . . . .	80
4.3 Polyedertypen einer Dodekaederkette . . . . .	86
4.4 Zähler der 3-Wachstumsfunktion einer Dodekaederkette . . . . .	94
4.5 Zähler eines Residuums einer Dodekaederkette . . . . .	95
4.6 Dodekaederhäuser . . . . .	95
4.7 Residuen anderer Polyederketten . . . . .	97
<b>5 Bianchigruppen</b>	<b>99</b>
5.1 Oberer Halbraum $\mathbb{H}^3$ . . . . .	99
5.2 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ . . . . .	100
5.3 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ . . . . .	104
5.4 Visualisierung von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-3})$ . . . . .	110
5.5 Visualisierung von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$ . . . . .	111
5.6 Wachstumsfunktionen von Untergruppen . . . . .	111

<b>6</b>	<b>Cusp-Closing</b>	<b>115</b>
6.1	Cusp-Closings von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$	116
6.2	Cusp-Closings von $\Gamma <_2 \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$	120
6.3	Cusp-Closings von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$	124
6.4	Cusp-Closings von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$	126
6.5	Cusp-Closings von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-7})$	128
6.6	Quotienten von $\Gamma^d < \mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$	130
6.7	Weitere Gruppen	135
<b>7</b>	<b>Quotienten des Achterknotens</b>	<b>137</b>
7.1	Präsentierung $\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$	137
7.2	Präsentierung $xax^{-1} = aca, xcx^{-1} = ca$	139
7.3	Spezialfall $G_{2,k}$	141
7.4	Spezialfall $G_{3,k}$	142
7.5	Struktur von $G_{3,k}$ für gerades $k$	145
7.6	Residuen von Knotenkomplementen	156
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>165</b>

## Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}_0$	Die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{N}$	Die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$
$1_n$	$n \times n$ -Einheitsmatrix
$R[[z]]$	Der formale Potenzreihenring $\{\sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j \mid p_j \in R\}$ mit Koeffizienten in $R$ . In dieser Arbeit ist $R$ der Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ .
$G/\langle\langle r \rangle\rangle$	Quotient von $G$ zum von $r \in G$ erzeugten Normalteiler $\langle\langle r \rangle\rangle \leq G$ .
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl $z \leq x$ .

# Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit speziellen Wachstumsfunktionen rechtwinkliger Coxetergruppen und den Residuen an der Stelle 1 von Wachstumsfunktionen diskreter Untergruppen der Isometriegruppe des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes.

Sei  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe und  $\Sigma$  ein endliches Erzeugendensystem, das unter Inversenbildung abgeschlossen ist:  $s \in \Sigma \Rightarrow s^{-1} \in \Sigma$ . Jedem Element  $g \in G$  ist eine Länge  $l(g)$  zugeordnet:

$$l(1_G) := 0, \quad l(g) := \min\{n \mid g = h_1 \dots h_n \text{ mit } h_i \in \Sigma\}.$$

Es sei  $a_i$  die Anzahl der Elemente in  $G$  mit Länge  $i$ :

$$a_i := \#\{g \in G \mid l(g) = i\}.$$

Die *Wachstumsreihe* von  $(G, \Sigma)$  wird definiert durch

$$f_{G, \Sigma}(x) := \sum_{g \in G} x^{l(g)} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Die Wachstumsreihe ist in allen in dieser Arbeit betrachteten Fällen eine rationale Funktion und wird daher durchgehend mit *Wachstumsfunktion* bezeichnet.

Für eine Coxetergruppe  $G$  mit dem Standarderzeugendensystem  $\Sigma$  wird in [Bourbaki1968] gezeigt, daß die Wachstumsfunktion  $f_{G, \Sigma}(x)$  rational ist. Cannon beweist in [Cannon1984], daß die Wachstumsreihe  $f_{G, \Sigma}(x)$  rational ist, wenn  $G$  eine diskrete, kokompakte Gruppe von Isometrien des hyperbolischen Raumes und  $\Sigma$  ein beliebiges endliches Erzeugendensystem ist.

Interessant ist in vielen Fällen der Wert  $f_{G, \Sigma}(1)$  der Wachstumsfunktion an der Stelle 1. Serre zeigt in [Serre1971], daß

$$f_{G, \Sigma}(1) = 1/\chi(G),$$

wenn  $G$  eine Coxetergruppe mit dem Standarderzeugendensystem  $\Sigma$  ist. Mit  $\chi(G)$  wird die Euler-Charakteristik von  $G$  bezeichnet. Parry zeigt in [Parry1988], daß es Paare  $(G, \Sigma)$  gibt mit  $f_{G, \Sigma}(1) \neq 1/\chi(G)$ .

## Rechtwinklige Coxetergruppen

Eine rechtwinklige Coxetergruppe  $G$  besitzt nach Definition eine endliche Präsentation der Form

$$G = \langle g_1, \dots, g_k \mid g_1^2 = \dots = g_k^2 = 1, (g_i g_j)^{m_{i,j}} = 1 \text{ für } i < j \rangle$$

mit  $m_{i,j} \in \{0, 2\}$  für alle  $i < j$ . Es ist  $\Sigma_G := \{g_1, \dots, g_k\}$  das Standarderzeugendensystem von  $G$ .

Die Wachstumsfunktion  $f_{G, \Sigma_G}(x)$  zum Standarderzeugendensystem  $\Sigma_G$  bezeichnen wir als *1-Wachstumsfunktion von  $G$* . Wir definieren zwei weitere Erzeugendensysteme von  $G$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \Sigma_G^2 &:= \Sigma_G \cup \{g_i g_j \mid g_i g_j = g_j g_i\} \text{ und} \\ \Sigma_G^3 &:= \Sigma_G^2 \cup \{g_i g_j g_l \mid g_i g_j = g_j g_i, g_i g_l = g_l g_i, g_j g_l = g_l g_j\}. \end{aligned}$$





Wir untersuchen ferner die Koeffizienten von Determinanten, die einen Zähler der 2-Wachstumsfunktion von  $L_k$  liefern, genauer. Wir zeigen weiter, daß die Koeffizienten mit den Catalan-Zahlen in einem Zusammenhang stehen.

## Dodekaederketten

Nach dem Satz von Gauß–Bonnet ist das Volumen einer vollständigen hyperbolischen Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit endlichem Volumen proportional zur Euler-Charakteristik der Mannigfaltigkeit. Daher gibt es in vielen Fällen Zusammenhänge zwischen dem Wert an der Stelle 1 einer Wachstumsfunktion einer diskreten Gruppe in  $\text{Iso}(\mathbb{H}^n)$  und dem Kovolumen für gerades  $n$ . Bei ungerader Dimension ist die Euler-Charakteristik einer vollständigen Mannigfaltigkeit gleich 0. Für ungerades  $n$  besitzen sehr viele Wachstumsfunktionen diskreter Untergruppen von  $\text{Iso}(\mathbb{H}^n)$  eine Polstelle in der Stelle 1. Wir untersuchen das Residuum der Polstelle für diskrete Untergruppen von  $\text{Iso}(\mathbb{H}^3)$ . Wir konzentrieren uns dabei auf Gruppen, deren Kovolumen wir kennen.

Eine Gruppe, deren Kovolumen sich einfach kontrollieren läßt, ist die Coxetergruppe  $G_{r,5}$ , die durch die Spiegelungen an den Seitenflächen mehrerer aneinandergereihter Dodekaeder erzeugt wird. Das Kovolumen von  $G_{r,5}$  ist das  $r$ -fache des Kovolumens von  $G_{1,5}$ . Eine solche Dodekaederkette hat eine  $2\pi/5$ -Rotationssymmetrie. Lassen wir nicht nur Drehsymmetrie  $2\pi/5$ , sondern allgemeiner eine  $2\pi/s$ -Rotationssymmetrie mit  $s \geq 5$  zu, so erhalten wir eine rechtwinklige Coxetergruppe  $G_{r,s}$ . Die Gruppe  $G_{r,s}$  wird präsentiert durch

$$G_{r,s} = \langle g_0, \dots, g_{(r+1)s+1} \mid g_0^2 = \dots = g_{(r+1)s+1}^2 = 1, (g_i g_j)^2 = 1 \text{ für } (i, j) \in K_{r,s} \rangle.$$

Die Kantenmenge  $K_{r,s}$  lautet

$$\begin{aligned} K_{r,s} = & \bigcup_{j=0}^{s-1} \{ (0, 1+j) \} \\ & \cup \bigcup_{i=0}^{r-1} \bigcup_{j=0}^{s-1} \{ (is+1+j, is+1+(j+1)\bmod s), \\ & \quad (is+1+j, (i+1)s+1+j), \\ & \quad (is+1+j, (i+1)s+1+(j-1)\bmod s) \} \\ & \cup \bigcup_{j=0}^{s-1} \{ (rs+1+j, rs+1+(j+1)\bmod s), (rs+1+j, (r+1)s+1) \}. \end{aligned}$$

In Kapitel 4 geben wir auf Basis geometrischer Argumente eine Matrix  $A_{r,s} \in M_{5r+8}(\mathbb{Z})$  und einen Vektor  $v_{r,s} \in \mathbb{Z}^{5r+8}$  an, die eine Wachstumsfunktion der Dodekaederkettengruppe als Quotient zweier Determinanten liefern:

$$f_{r,s}(x) = \frac{\det(1_{5r+8} + (v_{r,s} - A_{r,s})x)}{\det(1_{5r+8} - A_{r,s}x)}.$$

Für kleine  $r$  können wir diese Determinanten explizit mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms bestimmen und erhalten folgenden Satz.

**Satz 2** Für  $s \geq 5$  und  $1 \leq r \leq 30$  ist  $f_{r,s}(x) = -f_{r,s}(1/x)$ . Die 3-Wachstumsfunktion  $f_{r,s}(x)$  besitzt eine einfache Polstelle bei  $x = 1$ , und der Kehrwert des Residuums lautet

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{res}_1(f_{r,s})} &= \frac{s-4}{8} + \frac{3rs}{40} + \frac{(s-4)^2 s}{10} \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(L_k s - L_{k+2})(L_{k+1} s - L_{k+3})} \\ &= \frac{s-4}{8} + \frac{3rs}{40} - \frac{(s-4)sF_r}{10(L_r s - L_{r+2})}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $L_0 := 1$ ,  $L_1 := 3$ ,  $L_k := L_{k-1} + L_{k-2}$  für  $k \geq 2$  die Folge der Lucas-Zahlen und  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$  die Folge der Fibonacci-Zahlen.

Wir vermuten, daß diese Formel auch für beliebig großes  $r$  gilt. Die Matrix  $A_{r,s}$  besitzt die Form einer Bandmatrix, die aus  $5 \times 5$ -Blöcken besteht.

Mit Hilfe der selbstentwickelten Software zum Berechnen von Determinanten von Bandmatrizen haben wir versucht, eine Matrix zur Generierung der Determinanten zur Generierung des Zählers des Residuums an der Stelle 1 der 3-Wachstumsfunktion einer Dodekaederkette zu finden. Das Programm fand 42465 Gleichungen, konnte aufgrund von Speicherplatzmangel aber keine  $42465 \times 42465$ -Matrix mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}[x]$  generieren. Wir vermuten, daß es Matrizen gibt, die Zähler- und Nennerpolynome der 3-Wachstumsfunktionen der Dodekaederketten liefern.

## Bianchigruppen

In Kapitel 5 betrachten wir Bianchigruppen. Sei  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  ein imaginär-quadratischer Zahlkörper ( $D \in \mathbb{N}$  quadratfrei) und  $\mathcal{O}_{-D}$  der Ring der ganzen Zahlen in  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ . Dann ist  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-D})$  eine diskrete Untergruppe der Isometriegruppe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^3)$  des hyperbolischen Raumes. Die Gruppe  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-D})$  wird *Bianchigruppe* genannt.

Wir geben einige Präsentierungen von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  und  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  an und erläutern die Operation der Gruppen auf dem  $\mathbb{H}^3$ . Zu  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  geben wir eine Wachstumsfunktion an, deren Erzeugendensystem dem Erzeugendensystem der 3-Wachstumsfunktion einer rechtwinkligen Coxetergruppe entspricht.

Die Gruppe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  besitzt 34 Untergruppen vom Index  $\leq 6$ . Das Programm **GAP** liefert uns zu jeder dieser Untergruppen eine Präsentation. Mit Hilfe des Softwarepakets **KBMAG** (siehe [KBMAG2000]) können wir daraus eine Wachstumsfunktion dieser Präsentation gewinnen. Diese Wachstumsfunktionen besitzen sämtlich eine Polstelle in 1. Wir listen die Residuen dieser Polstellen auf. Ebenso listen wir Residuen der 68 Untergruppen vom Index  $\leq 6$  in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  für zwei verschiedene Präsentierungen auf.

## Cusp-Closings

In Kapitel 6 betrachten wir Cusp-Closings von Bianchigruppen. Die beiden Matrizen

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  erzeugen den zu  $\mathbb{Z}^2$  isomorphen Stabilisator des Punktes  $\infty \in \partial\mathbb{H}^3$  im Unendlichen.  $T$  und  $U$  erzeugen einen Repräsentanten der Spitze von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ . Mit  $k, l \in \mathbb{N}_0$  können wir das Element  $T^k U^l$  aus dieser Spitze bzw.  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  herausteilen:

$$G_{k,l} := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) / \langle\langle T^k U^l \rangle\rangle.$$

Mittels des Softwarepakets **KBMAG** können wir eine Wachstumsfunktion des Quotienten  $G_{k,l}$  berechnen. Es stellt sich heraus, daß das Residuum an der Stelle 1 dieser Wachstumsfunktion für wachsendes  $k+l$  gegen ein Residuum von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  selbst zu konvergieren scheint:

$$\lim_{k+l \rightarrow \infty} \mathrm{res}_1(f_{G_{k,l}, \Sigma}) = \mathrm{res}_1(f_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]), \Sigma}).$$

Dieses Verhalten tritt auch bei den von uns betrachteten Quotienten der Bianchigruppen  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ ,  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$  und  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-7})$  als auch bei zwei Untergruppen vom Index 2 von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  auf. Wir geben für viele Residuen Vermutungen über den expliziten Wert an. Wir vermuten zum Beispiel, daß folgende Formel für die betrachteten Residuen der Quotienten  $G_{k,l}$  von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  gilt:

$$\mathrm{res}_{2k-i, i} = \mathrm{res}_{i, 2k-i} = 8 \cdot \frac{k(k+6) - 3i}{(3k-2)(k+6) - 10i}$$

für  $k \geq 3$  und  $0 \leq i \leq k$ .

## Quotienten des Achterknotens

Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus F_8)$  des Achterknotenkomplements in der  $\mathbb{S}^3$  ist eine Untergruppe vom Index 12 der Bianchigruppe  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-3})$ . In Kapitel 7 untersuchen wir zwei Quotienten des Achterknotens. Wir zeigen, daß diese endlich sind, und bestimmen ihre Gruppenstruktur. Da diese Quotienten endlich sind, ist die Wachstumsfunktion ein Polynom und besitzt somit keine Polstelle in 1.

Am Schluß des Kapitels 7 berechnen wir mit Hilfe des Programms `SnapPea` für alle Knoten mit bis zu 10 Überkreuzungen eine Präsentierung. Zu jeder Präsentierung können wir anschließend mit `KBMAG` eine Wachstumsfunktion bestimmen. Sofern `KBMAG` eine Wachstumsfunktion gefunden hat, können wir das Residuum an der Stelle 1 berechnen. Fast alle Knotenkomplemente besitzen eine hyperbolische Struktur. Für diese Knoten finden wir eine ungefähre Übereinstimmung zwischen dem hyperbolischen Volumen und dem 5.6-fachen des Kehrwerts des Residuums an der Stelle 1.

## Software

Zur Erstellung dieser Arbeit wurden unter `Linux` folgende Programme eingesetzt: `GAP`, einige `GNU-Utilities`, `KBMAG`, `LATEX`, `Maple`, `mathematica`, `Nauty`, `PARI`, `POV-Ray` und `SnapPea`, sowie selbstentwickelte Perl-Skripte und C/C++-Programme. Wertvolle Anregungen lieferte das Programm `groups.lsp` von Michael Stoll, siehe [Stoll1994].

## Dank

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. Fritz Grunewald für dieses interessante Thema, das mir sehr viel Freude bereitet hat, und für seine fruchtbaren Denkanstöße während unserer Gespräche.

Ohne die Unterstützung durch die Studienstiftung des deutschen Volkes hätte die Arbeit in dieser Form nicht entstehen können.

Herrn Dr. Wolfgang Huntebrinker und Herrn Dr. Jens Hoekstra danke ich für die guten Ratschläge und das Korrekturlesen meiner Arbeit.

Herrn Prof. Dr. Fritz Grunewald und Herrn Prof. Dr. Wilhelm Singhof danke ich für die schönen Vorlesungen im Zyklus WS 1992/93 ff, die vom Hauptsatz über Torsionsmoduln bis in die Tiefen der Topologie reichten. Diese Zeit habe ich sehr genossen.

Herrn Dipl.-Komponist und Journalist Heiner Frost danke ich dafür, daß er mir Funktionentheorie und andere Gebiete erklärte.



# Kapitel 1

## Wachstumsfunktionen

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels definieren wir die Wachstumsfunktion einer Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem.

Im zweiten Abschnitt leiten wir eine Formel her, die gewisse Wachstumsfunktionen als Quotient zweier Determinanten darstellt:

$$f_{A,v}(x) = \frac{\det(1_n + (v - A)x)}{\det(1_n - Ax)}.$$

Diese Formel benutzen wir in den Kapiteln 2 und 4 zur Berechnung von Wachstumsfunktionen.

Im dritten Abschnitt beweisen wir eine Formel zur Berechnung des Residuums gewisser Wachstumsfunktionen an der Stelle  $x = 1$ :

$$\operatorname{res}_{x=1}(f_{A,v}) = \frac{\det(1_n + v - A)}{\operatorname{Spur}(\operatorname{adj}(A - 1_n))}.$$

Auch diese Formel besteht nur aus Determinanten, denn der Ausdruck  $\operatorname{Spur}(\operatorname{adj}(A - 1_n))$  ist eine Summe von Determinanten von Untermatrizen der Matrix  $A - 1_n$ .

Abschnitt 1.4 enthält einen kleinen Überblick zur Literaturlage über Wachstumsfunktionen.

### 1.1 Definitionen

**Definition:** Sei  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe und  $\Sigma$  ein endliches Erzeugendensystem, das unter Inversenbildung abgeschlossen ist:  $s \in \Sigma \Rightarrow s^{-1} \in \Sigma$ . Jedem Element  $g \in G$  wird eine Länge  $l(g)$  zugeordnet, das neutrale Element  $1_G$  besitzt Länge 0:

$$l(1_G) := 0, \quad l(g) := \min\{n \mid g = h_1 \dots h_n \text{ mit } h_i \in \Sigma\}.$$

Es sei  $a_i$  die Anzahl der Elemente in  $G$  mit Länge  $i$ :

$$a_i := \#\{g \in G \mid l(g) = i\}.$$

Die *Wachstumsreihe* von  $(G, \Sigma)$  wird definiert durch

$$f_{G,\Sigma}(x) := \sum_{g \in G} x^{l(g)} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Nach der Definition ist eine Wachstumsreihe zunächst eine formale Potenzreihe. Alle Wachstumsreihe, die in dieser Arbeit vorkommen, sind jedoch rationale Funktionen. Wir sprechen daher durchgehend von *Wachstumsfunktionen*.

In einigen Artikeln wird die Wachstumsreihe definiert durch

$$b_i := \#\{g \in G \mid l(g) \leq i\}$$

für alle  $i \geq 0$  und

$$g_{G,\Sigma}(x) := \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i.$$

Diese Wachstumsreihe unterscheidet sich von unserer Definition durch den Faktor  $1-x$ , denn aus  $b_i = \sum_{j=0}^i a_j$  folgt

$$g_{G,\Sigma}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i a_j x^i = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=j}^{\infty} x^i \right) a_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{1-x} a_j = \frac{1}{1-x} \cdot f_{G,\Sigma}(x),$$

siehe auch [Wagreich1982].

Die Begriffe 1-, 2- und 3-Wachstumsfunktion definieren wir für rechtwinklige Coxetergruppen im Abschnitt 2.1. Dort definieren wir neben dem Standarderzeugendensystem  $\Sigma_G$  einer Coxetergruppe  $G$  zwei weitere Erzeugendensysteme  $\Sigma_G^2$  und  $\Sigma_G^3$ . Die zugehörigen Wachstumsfunktionen bezeichnen wir als 2-Wachstumsfunktion bzw. 3-Wachstumsfunktion von  $G$ .

**Lemma 1.1.1** *Es seien  $(G_l, \Sigma_l)$  endlich erzeugte Gruppen für  $1 \leq l \leq s$ . Dann gilt für die Wachstumsfunktion des freien Produkts  $G_1 * \dots * G_s$  mit dem Erzeugendensystem  $\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_s$ :*

$$\frac{1}{f_{G_1 * \dots * G_s, \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_s}(x)} - 1 = \sum_{l=1}^s \left( \frac{1}{f_{G_l, \Sigma_l}(x)} - 1 \right).$$

**Beweis:** Dies folgt mit vollständiger Induktion über  $s$  unter Zuhilfenahme der Formel

$$\frac{1}{f_{G_1 * G_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2}(x)} - 1 = \frac{1}{f_{G_1, \Sigma_1}(x)} - 1 + \frac{1}{f_{G_2, \Sigma_2}(x)} - 1$$

aus [Harpe2000, Kap. VI]. □

Wachstumsfunktionen von Amalgamen werden in [Alonso1991] betrachtet. Alonso gibt eine hinreichende Bedingung für ein Amalgam  $G = G_1 *_A G_2$  zweier Gruppen an, so daß

$$\frac{1}{f_G(z)} = \frac{1}{f_{G_1}(z)} + \frac{1}{f_{G_2}(z)} - \frac{1}{f_A(z)}$$

gilt.

## 1.2 Wachstumsfunktion als Quotient zweier Determinanten

Die Spalten einer  $n$ -spaltigen Matrix  $A$  werden im Folgenden mit  $A_1, \dots, A_n$  bezeichnet. Seien ferner  $w_1, \dots, w_n$  Vektoren der Dimension  $n$ . Dann sei  $(w_1, \dots, w_n)$  die quadratische Matrix, deren Spalten aus eben diesen Vektoren bestehen. Im Matrizenkontext bezeichnen wir mit  $w$  die quadratische Matrix  $(w, \dots, w)$ , deren Spalten aus Kopien eines Vektors  $w$  bestehen.

**Definition:** Sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Wir definieren die *Wachstumsfunktion zu  $A$  und  $v$*  durch

$$f_{A,v}(x) := 1 + (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} A^{i-1} x^i \cdot v. \quad (1.2.1)$$

Wir nennen  $A$  eine *Wachstumsmatrix* und  $v$  einen *Initialvektor*.

**Satz 1.2.1** Sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$f_{A,v}(x) = \frac{\det(1_n + (v - A)x)}{\det(1_n - Ax)}. \quad (1.2.2)$$

Im Beweis von Satz 1.2.1 benutzen wir das folgende Lemma.

**Lemma 1.2.2** Sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  eine quadratische Matrix und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\det(A_1 + v, \dots, A_n + v) = \det(A) + \sum_{i=1}^n \det(A_1, \dots, \hat{v}^i, \dots, A_n), \quad (1.2.3)$$

wobei  $(A_1, \dots, \hat{v}^i, \dots, A_n)$  die Matrix bezeichnet, die durch Ersetzen der  $i$ -ten Spalte in  $A$  durch  $v$  entsteht.

**Beweis (Lemma 1.2.2):**

$$\begin{aligned} \det(A_1 + v, \dots, A_n + v) &= \det(v, A_2 + v, \dots, A_n + v) + \det(A_1, A_2 + v, \dots, A_n + v) \\ &= \det(v, A_2, \dots, A_n) + \det(A_1, A_2 + v, \dots, A_n + v) \\ &= \det(v, A_2, \dots, A_n) + \det(A_1, v, A_3 + v, \dots, A_n + v) \\ &\quad + \det(A_1, A_2, A_3 + v, \dots, A_n + v) \\ &= \det(v, A_2, \dots, A_n) + \det(A_1, v, A_3, \dots, A_n) \\ &\quad + \det(A_1, A_2, A_3 + v, \dots, A_n + v) \\ &= \dots \\ &= \det(v, A_2, \dots, A_n) + \det(A_1, v, A_3, \dots, A_n) + \dots \\ &\quad + \det(A_1, \dots, A_{n-1}, v) + \det(A_1, \dots, A_n). \end{aligned}$$

□

**Beweis (Satz 1.2.1):** Wir gehen aus von

$$\begin{aligned} f_{A,v}(x) &= 1 + (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (Ax)^i \cdot vx \\ &= 1 + (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1) (1_n - Ax)^{-1} vx. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Cramerschen Regel bestimmen wir  $(1_n - Ax)^{-1} vx$ . Dazu betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$(1_n - Ax) \cdot y = vx.$$

Gesucht ist der Vektor  $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ . Es sei  $(B_1, \dots, B_n) := (1_n - Ax)$ . Nach der Cramerschen Regel lautet die  $i$ -te Komponente von  $y$ :

$$y_i = \frac{\det(B_1, \dots, \hat{v}^i x, \dots, B_n)}{\det(B_1, \dots, B_n)},$$

es ist  $\det(B_1, \dots, B_n) \in 1 + x \cdot \mathbb{Z}[x]$ . Jetzt können wir Lemma 1.2.2 anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} f_{A,v}(x) &= 1 + \sum_{i=1}^n y_i \\ &= \frac{1}{\det(B_1, \dots, B_n)} \cdot \left( \det(B_1, \dots, B_n) + \sum_{i=1}^n \det(B_1, \dots, \hat{v}^i x, \dots, B_n) \right) \\ &= \frac{\det(B_1 + vx, \dots, B_n + vx)}{\det(B_1, \dots, B_n)} = \frac{\det(1_n - Ax + vx)}{\det(1_n - Ax)} \\ &= \frac{\det(1_n + (v - A)x)}{\det(1_n - Ax)}. \end{aligned}$$

□

### 1.3 Residuum einer Wachstumsfunktion

**Definition:** Es sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  eine quadratische Matrix. Für  $1 \leq k, l \leq n$  sei

$$\text{adj}_{k,l}(A) := (-1)^{k+l} \det(\text{del}(A, k, l))$$

die Determinante der Matrix  $A$ , nachdem Zeile  $k$  und Spalte  $l$  gestrichen worden sind und der Vorfaktor  $(-1)^{k+l}$  hinzugefügt wurde. Es sei  $\text{adj}(A) := (\text{adj}_{l,k}(A))_{k,l}$  die zu  $A$  adjungierte Matrix.

Falls  $\det(A) \neq 0$ , kann  $\text{adj}(A)$  zur Berechnung des Inversen von  $A$  benutzt werden:

$$A^{-1} = \text{adj}(A) / \det(A).$$

**Lemma 1.3.1** *Das charakteristische Polynom einer quadratischen Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  besitzt folgende Ableitung:*

$$\frac{\partial \det(A - 1_n \cdot x)}{\partial x} = -\text{Spur}(\text{adj}(A - 1_n \cdot x)). \quad (1.3.4)$$

**Beweis:** Es sei  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$  das Kronecker-Symbol.  $\mathbf{S}_n$  sei die Gruppe der Permutationen der Länge  $n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det(A - 1_n \cdot x)}{\partial x} &= \frac{\partial \det(a_{ij} - \delta_{ij} \cdot x)_{i,j}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^n (a_{i,\sigma_i} - \delta_{i,\sigma_i} x) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \varepsilon_\sigma \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial (a_{j,\sigma_j} - \delta_{j,\sigma_j} x)}{\partial x} \cdot \prod_{i \neq j} (a_{i,\sigma_i} - \delta_{i,\sigma_i} x) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \varepsilon_\sigma \sum_{j=1}^n \left( (-\delta_{j,\sigma_j}) \cdot \prod_{i \neq j} (a_{i,\sigma_i} - \delta_{i,\sigma_i} x) \right) \\ &= - \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \left( \varepsilon_\sigma \delta_{j,\sigma_j} \cdot \prod_{i \neq j} (a_{i,\sigma_i} - \delta_{i,\sigma_i} x) \right) \\ &= - \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n, \sigma_j=j} \left( \varepsilon_\sigma \prod_{i \neq j} (a_{i,\sigma_i} - \delta_{i,\sigma_i} x) \right) \\ &= - \sum_{j=1}^n \det(\text{del}(A - 1_n \cdot x, j, j)) = -\text{Spur}(\text{adj}(A - 1_n \cdot x)). \end{aligned}$$

□

**Satz 1.3.2** *Sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Es sei  $\det(1_n + v - A) \neq 0$ , das Polynom  $\det(1_n - A \cdot x)$  habe eine einfache Nullstelle in  $x = 1$ . Ferner gelte  $\det(1_n - A \cdot x) = -\det(A - 1_n \cdot x)$ . Dann erhalten wir das Residuum von  $f_{A,v}(x)$  an der Stelle  $x = 1$  durch*

$$\text{res}_{x=1}(f_{A,v}) = \frac{\det(1_n + v - A)}{\text{Spur}(\text{adj}(A - 1_n))}. \quad (1.3.5)$$

**Beweis:** Dies folgt aus Satz 1.2.1 und Lemma 1.3.1:

$$\begin{aligned} \text{res}_{x=1}(f_{A,v}) &= \frac{\det(1_n + (v - A)x)|_{x=1}}{\frac{\partial \det(1_n - Ax)}{\partial x}|_{x=1}} = \frac{\det(1_n + (v - A))}{-\frac{\partial \det(A - 1_n \cdot x)}{\partial x}|_{x=1}} = \frac{\det(1_n + (v - A))}{\text{Spur}(\text{adj}(A - 1_n \cdot x))|_{x=1}} \\ &= \frac{\det(1_n + (v - A))}{\text{Spur}(\text{adj}(A - 1_n))}. \end{aligned}$$

□



**Lemma 1.3.3** *Es sei  $H$  eine Gruppe mit einem Erzeugendensystem  $\Sigma_H$ , so daß die Wachstumsreihe  $f_{H,\Sigma_H}(x)$  rational ist und keine Null- oder Polstelle in 1 hat. Ferner sei  $G = \mathbb{Z} \rtimes H$  ein semidirektes Produkt,  $\Sigma_G = \Sigma_H \cup \{u, u^{-1}\}$  ein Erzeugendensystem von  $G$  und  $\mathbb{Z} = \langle u \mid \rangle$  die Menge der von  $u$  erzeugten ganzen Zahlen. Dann besitzt die Wachstumsfunktion*

$$f_{G,\Sigma_G}(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot f_{H,\Sigma_H}(x) \quad (1.3.6)$$

eine einfache Polstelle bei  $x = 1$  mit dem Residuum

$$\text{res}_1(f) = -2f_{H,\Sigma_H}(1).$$

**Beweis:** Die Wachstumsfunktion von  $\mathbb{Z} = \langle u \mid \rangle$  zum Erzeugendensystem  $\{u, u^{-1}\}$  lautet

$$f_{\mathbb{Z},\{u,u^{-1}\}}(x) = \frac{1+x}{1-x},$$

siehe [Wagreich1982]. Weil  $\mathbb{Z}$  der Normalteiler des semidirekten Produktes  $\mathbb{Z} \rtimes H$  ist, gibt es eine Abbildung  $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$ , so daß  $h \cdot u = \varphi_h(u) \cdot h$  für alle  $h \in H$  und  $u \in \mathbb{Z}$ . Damit gilt für alle  $h \in H$

$$h\{u, u^{-1}\}h^{-1} = \{u, u^{-1}\}.$$

Nach [Wagreich1982, Prop. 3.4] gilt deshalb

$$f_{G,\Sigma_G}(x) = f_{\mathbb{Z},\{u,u^{-1}\}}(x) \cdot f_{H,\Sigma_H}(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot f_{H,\Sigma_H}(x).$$

Daraus folgt  $\text{res}_1(f) = -2f_{H,\Sigma_H}(1)$ . □

**Corollar 1.3.4** *Sei  $H$  eine Gruppe mit einem Erzeugendensystem  $\Sigma$  und einer Wachstumsfunktion mit  $f_{H,\Sigma}(1) = 1/\chi(H) \neq \infty$ . Ist  $G = \mathbb{Z} \rtimes H$  ein semidirektes Produkt, so gilt*

$$\text{res}_1(f_{G,\Sigma \cup \{u,u^{-1}\}}) = \frac{-2}{\chi(H)}.$$

**Beweis:**

$$\text{res}_1(f_{G,\Sigma \cup \{u,u^{-1}\}}) = \text{res}_1\left(\frac{(1+x) \cdot f_{H,\Sigma_H}(x)}{1-x}\right) = -(1+1) \cdot f_{H,\Sigma_H}(1) = \frac{-2}{\chi(H)}.$$

□

## 1.4 Zur Literaturlage

Das Wachstum einer endlich erzeugten Gruppe wurde zuerst in der Differentialgeometrie betrachtet, siehe beispielsweise [Efremovic1953], [Svarc1955], [Milnor1968] und [Milnor1968c]. Untersucht wurde das asymptotische Verhalten der  $a_i$ , das auch als *Wachstumsrate* bezeichnet wird. Bei geeigneter Definition der Wachstumsrate ist diese unabhängig vom Erzeugendensystem und damit eine Invariante der Gruppe. Milnor und Wolf ([Milnor1968b], [Wolf1968]) bewiesen, daß eine auflösbare Gruppe entweder virtuell nilpotent von polynomialem Wachstum ist oder exponentielles Wachstum besitzt, siehe auch [Bass1972]. Gromov [Gromov1981] zeigte, daß genau die virtuell nilpotenten Gruppen polynomiales Wachstum besitzen. Grigorchuk [Grigorchuk1983] konstruierte eine Gruppe, die weder polynomiales noch exponentielles Wachstum besitzt, sondern ein sogenanntes Zwischenwachstum (*intermediate growth*) aufweist.

Cannon [Cannon1984] bewies, daß die Wachstumsreihe  $f_{G,\Sigma}(x)$  rational ist, wenn  $G$  eine diskrete, kokompakte Gruppe von Isometrien des hyperbolischen Raumes und  $\Sigma$  ein beliebiges endliches Erzeugendensystem ist.

Thurston entdeckte, daß die rekursiven Prozesse, die Cannon zum Berechnen der Wachstumsfunktionen nutzte, auch mit *endlichen Automaten* (*finite state automaton, FSA*) beschrieben werden können. Dies führte zur Theorie der automatischen Gruppen. Eine automatische Gruppe besitzt endliche Automaten, welche die Gruppenmultiplikation beschreiben und das Wortproblem dieser Gruppe lösen, siehe auch [ECHLPT1992].

Eine diskrete Untergruppe der Isometriegruppe  $\text{Iso}(\mathbb{H}^n)$  des hyperbolischen Raumes  $\mathbb{H}^n$  heißt *geometrisch endlich*, wenn es einen konvexen Fundamentalbereich mit endlich vielen Seiten gibt. Ein Fundamentalbereich einer solchen Gruppe ist möglicherweise nicht-kompakt. Neumann und Shapiro zeigten in [NeuSha1995], daß jede geometrisch endliche hyperbolische Gruppe  $G$  ein Erzeugendensystem  $\Sigma$  besitzt, so daß die zugehörige Wachstumsreihe  $f_{G,\Sigma}(x)$  rational ist. Zum Beweis betrachteten Neumann und Shapiro *automatische Strukturen* auf  $G$ . Weitere Artikel, die sich mit automatischen Gruppen und Wachstumsfunktionen befassen, sind [NeuSha1994] und [EpIa-F1Zw1996].

Die Wachstumsfunktion  $f_{G,\Sigma}(x)$  einer Coxetergruppe  $G$  mit dem Standarderzeugendensystem  $\Sigma$  ist nach [Bourbaki1968, Chap. 4–6] rational. Serre ([Serre1971]) zeigte, daß

$$f_{G,\Sigma}(1) = 1/\chi(G),$$

wobei  $\chi(G)$  die Euler-Charakteristik von  $G$  bezeichnet. Wenn  $G$  endlich ist, so gilt

$$f_{G,\Sigma}(1) = \#G = 1/\chi(G).$$

Wenn  $G$  eine kompakte hyperbolische Coxetergruppe oder irreduzible Euklidische Coxetergruppe und  $\Sigma$  das Standarderzeugendensystem von  $G$  ist, so gilt nach Serre

$$f(1/x) = \pm f(x),$$

und die Polstellen von  $f_{G,\Sigma}(x)$  sind algebraische Einheiten.

Wachstumsfunktionen von Coxetergruppen zum Standarderzeugendensystem, in dieser Arbeit auch 1-Wachstumsfunktionen genannt, werden in vielen Arbeiten betrachtet. Dazu zählen beispielsweise die Arbeiten [Solomon1966], [Wagreich1982], [Al Al-Ha Al-Sa1988], [Jaeschke1990], [ChaDa1991], [Chiswell1992], [Floyd1992], [Parry1993], [Heckman1995], [Johnson1998] und [Worthington1998].

Sei  $G$  die Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche,  $\Sigma$  ein geometrisches Erzeugendensystem von  $G$  und  $G$  nur durch eine Relation präsentiert. Dann ist  $f$  reziprok (d. h.  $f(x) = f(1/x)$ ),  $f(1) = 1/\chi(G)$ , der Zähler von  $f$  ein Produkt von Kreisteilungspolynomen und der Nenner von  $f$  das Produkt eines Salem-Polynoms und von Kreisteilungspolynomen ([Cannon1983], [Cannon1984]). Weitere Artikel, die sich mit den Fundamentalgruppen von geschlossenen Flächen oder anderen Gruppen befassen, die auf der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}^2$  operieren, sind [FIP11988], [Floyd1993], [FIP11994] und [Mamagani1995].

Ist  $G$  eine endliche Erweiterung von  $\mathbb{Z}^n$  und  $\Sigma$  ein beliebiges Erzeugendensystem, so ist die Wachstumsfunktion  $f_{G,\Sigma}(x)$  nach Benson rational ([Benson1983]) und hat einen Pol der Ordnung  $n$  an der Stelle  $x = 1$ .

Parry zeigte in [Parry1988], daß es Paare  $(G, \Sigma)$  mit  $f_{G,\Sigma}(x) \neq 1/\chi(G)$  gibt. Andere Artikel, die sich mit Wachstumsfunktionen und der Euler-Charakteristik befassen, sind z. B. [Smythe1984], [FIP11987], [Chiswell1992] und [Grigorchuk1995].

Ist  $U$  eine Untergruppe einer Gruppe  $G$  mit einem endlichen Erzeugendensystem  $\Sigma$ , so können wir die *relative Wachstumsfunktion von  $U$  in  $(G, \Sigma)$*  definieren:

$$f_{G,U,\Sigma}(x) := \sum_{g \in U \subseteq G} z^{l(g)} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{U,\Sigma}(n) z^n,$$

wobei

$$\gamma_{U,\Sigma}(n) := \#(S_{\Sigma}(n) \cap U),$$

$S_{\Sigma}(n)$  sei die Menge aller Worte in  $G$  mit Länge  $n$ . Anstatt  $S_{\Sigma}(n)$  wird manchmal die Menge  $B_{\Sigma}(n)$  aller Worte in  $G$  mit Länge kleiner oder gleich  $n$  verwendet. Relative Wachstumsfunktionen werden beispielsweise in [Weber1989], [Stoll1993], [GriHar1997] und [Sharp1998] behandelt.

Sei  $G = \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_s \rangle$  eine endlich präsentierte Gruppe. Wir definieren die von den  $g_i$  erzeugte freie Gruppe  $F := \langle g_1, \dots, g_k \rangle$  und den von den  $r_j$  erzeugten Normalteiler  $N := \langle\langle r_1, \dots, r_s \rangle\rangle$  in  $F$ . Es ist  $G = F/N$ . Dann ist die *Kowachstumsfunktion von  $(G, \Sigma)$*  (*cogrowth function*) definiert als die relative Wachstumsfunktion von  $N$  in  $(F, \Sigma)$ :

$$g_{G,\Sigma}(x) := f_{F,N,\Sigma}(x) = \sum_{g \in N \subseteq F} x^{l_F(g)} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{N,\Sigma}(n) x^n.$$

Siehe auch [Grigorchuk1980], [Cohen1982], [Szwarc1998], [GriHar1997] und [Kuksov1999].

Grigorchuk und Nagnibeda definieren in [GriNag1997] die *vollständige Wachstumsfunktion* (*complete growth function*) einer Gruppe  $G$  mit einem Erzeugendensystem  $\Sigma$  durch

$$F_{G,\Sigma}(z) := \sum_{g \in G} gz^{|g|} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathbb{Z}[G][[z]],$$

wobei  $A_n$  die Summe aller Elemente von  $G$  mit Länge  $n$  im Gruppenring  $\mathbb{Z}[G]$  ist:

$$A_n = \sum_{g \in G, |g|=n} g \in \mathbb{Z}[G].$$

Siehe auch [Liardet1996] und [GriHar1997].

Übersichten über Literatur zum Thema „Wachstumsfunktionen“ bieten die beiden Autoren Grigorchuk und de la Harpe in [Grigorchuk1990], [GriHar1997] und [Harpe2000].



## Kapitel 2

# Rechtwinklige Coxetergruppen

In diesem Kapitel behandeln wir rechtwinklige Coxetergruppen, siehe [Coxeter1934], [Coxeter1935], [CoxMo1957] und [Humphreys1990]. Ziel ist ein besseres Verständnis der 2-Wachstumsfunktion rechtwinkliger Coxetergruppen.

Im ersten Abschnitt stellen wir eine Bijektion zwischen den rechtwinkligen Coxetergruppen und den endlichen Graphen her und definieren 1-, 2- und 3-Wachstumsfunktionen. Um Gesetzmäßigkeiten in der 2-Wachstumsfunktion einer rechtwinkligen Coxetergruppe zu finden, definieren wir die Gruppen  $S_k$ ,  $C_k$  und  $L_k$ . Zum Vergleich berechnen wir zunächst die jeweilige 1-Wachstumsfunktion dieser Gruppen. Wir stellen fest, daß die 1-Wachstumsfunktionen von  $S_k$  und  $L_{k+1}$  übereinstimmen, obwohl  $S_k$  und  $L_{k+1}$  für  $k \geq 3$  als Gruppen nicht isomorph zueinander sind. Anschließend bestimmen wir die 2-Wachstumsfunktionen von  $S_k$  und  $C_k$ .

Im Abschnitt 2.2 definieren wir für rechtwinklige Coxetergruppen, deren zugehöriger Graph kein Dreieck enthält, ein Knuth-Bendix-Regelsystem (siehe [KB1970], [ECHLPT1992]), das unter anderem das Wortproblem der zugehörigen Gruppe löst.

Im Abschnitt 2.3 generieren wir aus dem Knuth-Bendix Regelsystem eine Wachstumsmatrix, die uns eine Formel zur Berechnung der Wachstumsmatrix liefert.

Im Abschnitt 2.4 präsentieren wir eine Liste der 2-Wachstumsfunktionen von rechtwinkligen Coxetergruppen mit bis zu sechs Erzeugern und zusammenhängendem Graphen.

In dieser Liste ist auf den ersten Blick keine Abhängigkeit der 2-Wachstumsfunktion vom jeweiligen Graphen zu sehen. Daher betrachten wir gezielt den Graphen  $L_k$  – ein einfacher Baum mit  $k$  Knoten ohne Verzweigungen – und seine zugehörige rechtwinklige Coxetergruppe

$$L_k := \langle g_1, \dots, g_k \mid g_i^2 = 1, g_i g_{i+1} = g_{i+1} g_i \text{ für } 1 \leq i \leq k-1 \rangle.$$

Mit Hilfe der in den Abschnitten 2.2 und 2.3 entwickelten Formel können wir Matrizen angeben, deren Determinanten Zähler und Nenner der 2-Wachstumsfunktion von  $L_k$  liefern. Diese Determinanten rechnen wir im Kapitel 3 explizit aus.

Im Abschnitt 2.5 betrachten wir die Zählerpolynome der 2-Wachstumsfunktionen der  $L_k$  genauer und beweisen die Identität

$$b_{k+1,j} = \sum_{i=0}^j \lambda_i b_{k-i,j-i}$$

für  $k \geq j+1$  über Koeffizienten  $b_{k,j}$  der Zählerpolynome. Die  $\lambda_j$  sind einfache Vielfache der Catalan-Zahlen:

$$\lambda_{2j} := \frac{-(-1)^j}{j+1} \binom{2j}{j}, \quad \lambda_{2j+1} := \frac{2(-1)^j}{j+1} \binom{2j}{j}.$$

## 2.1 Graphen und Coxetergruppen

**Definition:** Eine Gruppe  $G$  heißt *Coxetergruppe*, falls es ein  $k \in \mathbb{N}$  und für jedes  $1 \leq i < j \leq k$  ein  $m_{i,j} \in \mathbb{N}_0$  gibt, so daß die Gruppe  $G$  folgende Präsentation besitzt

$$\langle g_1, \dots, g_k \mid g_1^2 = \dots = g_k^2 = 1, (g_i g_j)^{m_{i,j}} = 1 \forall i < j \rangle. \quad (2.1.1)$$

Wir nennen  $G$  eine *rechtwinklige Coxetergruppe*, falls  $m_{i,j} \in \{0, 2\}$  für alle  $i < j$ .

Wir könnten eine Coxetergruppe auch für nicht-endliche Erzeugendensysteme definieren. In dieser Arbeit werden aber nur endlich-präsentierte Coxetergruppen betrachtet.

Im Folgenden stellen wir eine Bijektion zwischen den rechtwinkligen Coxetergruppen und den endlichen Graphen her. Unter einem endlichen Graphen verstehen wir in dieser Arbeit einen ungerichteten Graphen mit endlich vielen Knoten, ohne mehrfache Kanten und ohne Schleifen.

**Definition:** Sei  $G$  eine rechtwinklige Coxetergruppe mit der Präsentation (2.1.1). Dann sei  $\Gamma_G$  der Graph mit den Knoten  $g_1, \dots, g_k$  und der Kantenmenge

$$\{(g_i, g_j) \mid m_{i,j} = 2\}.$$

Die Abbildung  $G \mapsto \Gamma_G$  zwischen den rechtwinkligen Coxetergruppen und den endlichen Graphen ist bijektiv. Der einelementigen Gruppe ist der leere Graph zugeordnet.

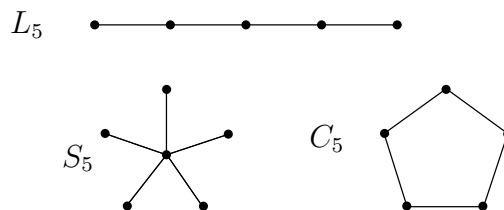
Der Graph einer rechtwinkligen Coxetergruppe ist in dieser Arbeit das Komplement des Coxetergraphen, der in Werken wie z. B. [Humphreys1990] einer Coxetergruppe zugeordnet wird.

Wir können den Graph  $\Gamma_G$  einer rechtwinkligen Coxetergruppe  $G$  auch auffassen als Graph-Produkt von Gruppen. Jedem Knoten  $g_i$  des Graphen ordnen wir die Gruppe  $G_i := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  zu. Das Graph-Produkt ist definiert als der Quotient des freien Produkts  $\bigstar_{i=1}^k G_i$  geteilt durch den Normalteiler, der von allen  $[G_i, G_j]$  der Kanten  $m_{i,j} = 2$  erzeugt wird. Wachstumsfunktionen von diesen oder anderen Graph-Produkten von Gruppen werden beispielsweise in [Chiswell1992], [Chiswell1994] und [NeuSha1994] betrachtet.

**Definition:** Sei  $k \in \mathbb{N}_0$ .

- Dann sei der Graph  $L_k$  der Graph mit  $k$  Knoten  $g_1, \dots, g_k$  und den Kanten  $(g_i, g_{i+1})$  für  $1 \leq i < k$ .
- Es sei  $S_k$  der sternförmige Graph mit den  $k + 1$  Knoten  $g_0, \dots, g_k$  und den Kanten  $(g_0, g_i)$  für  $1 \leq i \leq k$ . Die Gruppe  $S_k$  ist nicht zu verwechseln mit der symmetrischen Gruppe  $\mathbf{S}_k$  (Ausnahme:  $S_0 = \mathbf{S}_2$ ).
- Für  $k \geq 3$  sei  $C_k$  der kreisförmige Graph mit den  $k$  Knoten  $g_1, \dots, g_k$  und den Kanten  $(g_i, g_{i+1})$  für  $1 \leq i \leq k$ ,  $g_{k+1} := g_1$ .

**Beispiel:** Das folgende Bild zeigt die Graphen  $L_5$ ,  $S_5$  und  $C_5$ .



Zu einer rechtwinkligen Coxetergruppe definieren wir nun zwei Wachstumsfunktionen, indem wir verschiedene Erzeugendensysteme verwenden.

**Definition:**  $G$  sei eine rechtwinklige Coxetergruppe mit der Präsentation (2.1.1).

- $\Sigma_G := \{g_i \mid 1 \leq i \leq k\}$  ist ein Erzeugendensystem von  $G$ , das sogenannte *Standarderzeugendensystem* von  $G$ . Die *1-Wachstumsfunktion*  $f_{G, \Sigma_G}(x)$  definieren wir als die Wachstumsfunktion von  $G$  zum Erzeugendensystem  $\Sigma_G$ .
- Es sei  $\Sigma_G^2$  das Erzeugendensystem

$$\Sigma_G^2 = \{g_i \mid 1 \leq i \leq k\} \cup \{g_i g_j \mid m_{i,j} = 2\}.$$

Die Bedingung  $m_{i,j} = 2$  ist wegen  $g_i^2 = g_j^2 = 1$  äquivalent damit, daß  $g_i$  und  $g_j$  kommutieren, d. h.  $g_i g_j = g_j g_i$ . Die *2-Wachstumsfunktion* von  $G$  definieren wir als die Wachstumsfunktion  $f_{G, \Sigma_G^2}(x)$  von  $G$  zum Erzeugendensystem  $\Sigma_G^2$ .

- Es sei  $\Sigma_G^3$  das Erzeugendensystem

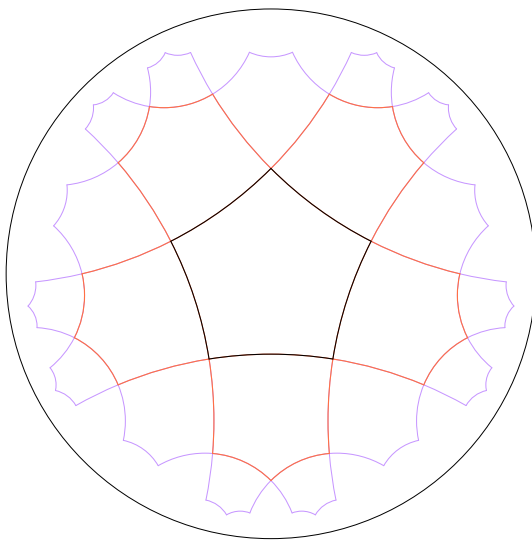
$$\Sigma_G^3 = \Sigma_G^2 \cup \{g_i g_j g_l \mid m_{i,j} = m_{i,l} = m_{j,l} = 2\}.$$

Die Bedingung  $m_{i,j} = m_{i,l} = m_{j,l} = 2$  ist äquivalent damit, daß  $g_i$ ,  $g_j$  und  $g_l$  paarweise kommutieren. Die *3-Wachstumsfunktion* von  $G$  ist definiert als die Wachstumsfunktion  $f_{G, \Sigma_G^3}(x)$  von  $G$  zum Erzeugendensystem  $\Sigma_G^3$ .

Die Bezeichnung  $d$ -Wachstumsfunktion wird gewählt, weil bei einer Operation einer rechtwinkligen Coxetergruppe auf dem hyperbolischen Raum  $\mathbb{H}^d$  die  $d$ -Wachstumsfunktion mit von Fundamentalbereichskopien gebildeten konvexen Teilmengen des  $\mathbb{H}^d$  in Zusammenhang steht.

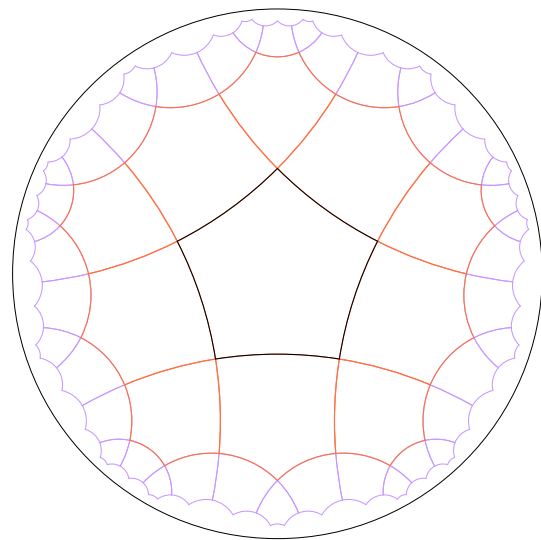
Betrachten wir beispielsweise die rechtwinklige Coxetergruppe  $C_5$ , die auf der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}^2$  operiert. Ein rechtwinkliges reguläres Fünfeck ist ein Fundamentalbereich von  $C_5$ . Das Standarderzeugendensystem von  $C_5$  besteht aus den fünf Spiegelungen an den Kanten des Fünfecks. Beim 2-Erzeugendensystem kommen noch die fünf  $180^\circ$ -Drehungen an den Ecken des Fünfecks hinzu. Die Kopien des Fundamentalbereichs, die den Elementen von  $G$  der Länge  $\leq n$  entsprechen, bilden beim 2-Erzeugendensystem eine konvexe Teilmenge des  $\mathbb{H}^2$ .

In den beiden Bildern entsprechen die roten Fünfecke den Elementen von  $G$  der Länge 1 und die blauen Fünfecke den Elementen der Länge 2.



$$f_{C_5, \Sigma_{C_5}}(x) = 1 + 5x + 15x^2 + \dots$$

1-Wachstumsfunktion von  $C_5$



$$f_{C_5, \Sigma_{C_5}^2}(x) = 1 + 10x + 40x^2 + \dots$$

2-Wachstumsfunktion von  $C_5$

Zur Berechnung der Wachstumsfunktion zum Standarderzeugendensystem einer Coxetergruppe gibt es Formeln, siehe beispielsweise [Bourbaki1968]. In [Chiswell1994] ist der Kehrwert einer Wachstumsfunktion

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{\Delta} \prod_{v \in V(\Delta)} \left( \frac{1}{A_v(x)} - 1 \right)$$

eines Graph-Produkts  $G\Gamma$  von Gruppen  $A_v$  angegeben, wobei die Summe über alle vollständigen Teilgraphen  $\Delta$  von  $\Gamma$  läuft.  $A_v(x)$  ist eine Wachstumsfunktion der Gruppe  $A_v$  im Knoten  $v$  und  $V(\Delta)$  die Menge der Knoten eines Teilgraphen  $\Delta$ . Als Spezialfall folgt aus dieser Formel mit  $A_v = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $A_v(x) = 1 + x$  der Kehrwert der 1-Wachstumsfunktion einer rechtwinkligen Coxetergruppe  $G$ :

$$\frac{1}{f_{G, \Sigma_G}(x)} = \sum_{i=0}^w n_i \left( \frac{-x}{1+x} \right)^i, \quad (2.1.2)$$

wobei  $w$  die Anzahl der Knoten des größten vollständigen Teilgraphen von  $\Gamma_G$  ist und  $n_k$  die Anzahl vollständiger Teilgraphen von  $\Gamma_G$  mit  $k$  Knoten ist. Im folgenden Lemma berechnen wir die 1-Wachstumsfunktion der rechtwinkligen Coxetergruppen  $L_k$ ,  $C_k$  und  $S_k$ .

**Lemma 2.1.1** *Es gelten*

$$\begin{aligned} f_{L_k, \Sigma_{L_k}}(x) &= \frac{(1+x)^2}{1-(k-2)x} && \text{für } k \geq 1, \\ f_{C_3, \Sigma_{C_3}}(x) &= (1+x)^3, \\ f_{C_k, \Sigma_{C_k}}(x) &= \frac{(1+x)^2}{1-(k-2)x+x^2} && \text{für } k \geq 4, \\ f_{S_k, \Sigma_{S_k}}(x) &= \frac{(1+x)^2}{1-(k-1)x} && \text{für } k \geq 0. \end{aligned}$$

**Beweis:** Zum Beweis benutzen wir die Formel (2.1.2) aus [Chiswell1994]. Es ist immer  $n_0 = 1$ , weil jeder Graph genau einen leeren Teilgraphen besitzt.

- Sei  $k \geq 1$ . Der Graph  $L_k$  enthält  $k$  Knoten und  $k-1$  Kanten, daher ist  $n_1 = k$  und  $n_2 = k-1$ . Da es keine Dreiecke oder größere vollständige Teilgraphen in  $L_k$  gibt, ist  $w = 2$  und

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{L_k, \Sigma_{L_k}}(x)} &= 1 \cdot 1 + k \cdot \frac{-x}{1+x} + (k-1) \cdot \frac{x^2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{(1+x)^2 - kx(1+x) + (k-1)x^2}{(1+x)^2} = \frac{1 + (2-k)x}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

- $C_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  operiert als Spiegelungsgruppe auf der Sphäre  $\mathbb{S}^2$ . Ein Dreieck mit drei rechten Winkeln ist ein Fundamentalbereich. Es gilt  $f_{C_3, \Sigma_{C_3}}(x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ .
- Sei  $k \geq 4$ . Wir betrachten den Kreis  $C_k$  der Länge  $k$ . Dann gelten  $n_1 = k$  und  $n_2 = k$ . Es gibt keine Dreiecke, daher ist  $w = 2$ .

$$\frac{1}{f_{C_k, \Sigma_{C_k}}(x)} = \frac{(1+x)^2 - kx(1+x) + kx^2}{(1+x)^2} = \frac{1 + (2-k)x + x^2}{(1+x)^2}.$$

- Sei  $k \geq 0$ . Der Graph  $S_k$  besitzt  $n_1 = 1+k$  Knoten und  $n_2 = k$  Kanten. Da es keine Dreiecke oder größere vollständige Graphen gibt, gilt  $w = 2$ .

$$\frac{1}{f_{S_k, \Sigma_{S_k}}(x)} = \frac{(1+x)^2 - (1+k)x(1+x) + kx^2}{(1+x)^2} = \frac{1 + (1-k)x}{(1+x)^2}.$$

□



Interessanterweise stimmen die 1-Wachstumsfunktionen von  $L_{k+1}$  und  $S_k$  überein. Dies halten wir im folgenden Satz fest.

**Satz 2.1.2** *Die Gruppen  $L_{k+1}$  und  $S_k$  sind nicht zueinander isomorph für  $k \geq 3$ , besitzen aber identische 1-Wachstumsfunktionen:*

$$L_{k+1} \not\cong S_k, \quad f_{L_{k+1}, \Sigma_{L_{k+1}}}(x) = f_{S_k, \Sigma_{S_k}}(x), \quad k \geq 3.$$

**Beweis:** Radcliffe zeigt in [Radcliffe2001], daß rechtwinklige Coxetergruppen rigide sind. Dies bedeutet, daß eine rechtwinklige Coxetergruppe genau eine Präsentation der Form (2.1.1) besitzt. Die rechtwinkligen Coxetergruppen  $L_{k+1}$  und  $S_k$  besitzen verschiedene Präsentierungen für  $k \geq 3$  und sind somit nicht isomorph.

Die Wachstumsfunktionen werden in Lemma 2.1.1 bestimmt.  $\square$

Aus der Rigidität einer rechtwinkligen Coxetergruppe, die wir im Beweis von Satz 2.1.2 ausgenutzt haben, folgt, daß die 1-, 2- und 3-Wachstumsfunktion einer rechtwinkligen Coxetergruppe unabhängig von der Präsentation ist.

Gibt es auch für die 2-Wachstumsfunktionen von rechtwinkligen Coxetergruppen eine direkte oder rekursive Formel? Wenn es solch eine Formel gibt, so ist sie anders aufgebaut als die Formel für die 1-Wachstumsfunktionen. Der Zähler einer 1-Wachstumsfunktion einer rechtwinkligen Coxetergruppe ist immer von der Form  $(1+x)^n$ , denn nach (2.1.2) ist der Nenner des Kehrwerts der 1-Wachstumsfunktion von der Form  $(1+x)^n$ . Zähler und Nenner der 2-Wachstumsfunktion einer rechtwinkligen Coxetergruppe sind dagegen oft viel komplizierter aufgebaut.

In Abschnitt 2.4 befindet sich eine vollständige Liste der 2-Wachstumsfunktionen von rechtwinkligen Coxetergruppen mit bis zu sechs Erzeugern und zusammenhängendem Graphen.

Im folgenden Satz bestimmen wir die 2-Wachstumsfunktionen der Gruppen  $C_k$  und  $S_k$ . Die Berechnung der 2-Wachstumsfunktion von  $L_k$  ist wesentlich komplizierter, siehe Abschnitt 2.5 und Kapitel 3.

**Satz 2.1.3** 1. *Die 2-Wachstumsfunktion von  $C_k$  lautet für  $k \geq 4$ :*

$$f_{C_k, \Sigma_{C_k}^2}(x) = \frac{1 + 6x + x^2}{1 - 2(k-3)x + x^2}.$$

2. *Die 2-Wachstumsfunktion von  $S_k$  lautet für  $k \geq 0$ :*

$$f_{S_k, \Sigma_{S_k}^2}(x) = \frac{1 + (k+2)x - (k-1)x^2}{1 - (k-1)x}.$$

**Beweis:**

1. In [Rogmann1997, §1.2, S. 9] wird dies wie folgt geometrisch gezeigt: Ein rechtwinkliges reguläres  $k$ -Eck in der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}^2$  ist ein Fundamentalbereich von  $C_k$ , siehe die Illustration zu  $k = 5$  auf Seite 11. Für  $k = 4$  ist der Fundamentalbereich ein Quadrat in der Euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Die Worte der Länge  $n$  für  $n \geq 1$  bilden „Schalen“ in der  $k$ -Eck-Pflasterung in  $\mathbb{H}^2$  (oder  $\mathbb{R}^2$  für  $k = 4$ ). Wir definieren zwei Typen von  $k$ -Ecken. Typ 1 hat eine Kante mit der vorigen Schale gemeinsam, Typ 2 hat nur eine Ecke mit der vorigen Schale gemeinsam. An einem  $k$ -Eck vom Typ 1 befinden sich in der nächsten Schale  $k-3$  Polygone vom Typ 1 und  $k-4$  Polygone vom Typ 2. An einem  $k$ -Eck vom Typ 2 befinden sich in der nächsten Schale  $k-2$  Polygone vom Typ 1 und  $k-3$  Polygone vom Typ 2. In der ersten Schale befinden sich  $k$  Polygone vom

Typ 1 und  $k$  Polygone vom Typ 2. Damit erhalten wir als Wachstumsmatrix  $A$  und Initialvektor  $v$ :

$$A = \begin{pmatrix} k-3 & k-2 \\ k-4 & k-3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}.$$

Mit Satz 1.2.1 gilt demnach

$$\begin{aligned} f_{C_k, \Sigma_{C_k}^2}(x) &= \frac{\det(1_2 + (v - A)x)}{\det(1_2 - Ax)} \\ &= \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 1+3x & 2x \\ 4x & 1+3x \end{pmatrix}\right)}{\det\left(\begin{pmatrix} 1-(k-3)x & -(k-2)x \\ -(k-4)x & 1-(k-3)x \end{pmatrix}\right)} \\ &= \frac{1+6x+x^2}{1-2(k-3)x+x^2}. \end{aligned}$$

2. Die Gruppe  $S_k$  besitzt die Präsentation

$$\begin{aligned} S_k &= \langle g_0, g_1, \dots, g_k \mid g_0^2 = 1, g_i^2 = 1, (g_0 g_i)^2 = 1, 1 \leq i \leq k \rangle \\ &= \langle g_0, g_1, \dots, g_k \mid g_0^2 = 1, g_i^2 = 1, g_0 g_i = g_i g_0, 1 \leq i \leq k \rangle. \end{aligned}$$

$g_0$  kommutiert mit allen anderen Erzeugern und liegt daher im Zentrum von  $S_k$ . Wir sehen, daß es sich bei  $S_k$  um ein direktes Produkt von  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $\tilde{F}_k$ , dem  $k$ -fachen freien Produkt von  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  mit sich selbst, handelt.

$$\begin{aligned} S_k &= \langle g_0 \mid g_0^2 = 1 \rangle \times \langle g_1, \dots, g_k \mid g_i^2 = 1 \rangle \\ &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \tilde{F}_k \\ &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \left( \bigast_{j=1}^k \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right). \end{aligned}$$

Die 2-Wachstumsfunktion von  $\tilde{F}_k$  lautet

$$f_{\tilde{F}_k, \{g_1, \dots, g_n\}}(x) = \frac{1+x}{1-(k-1)x}.$$

Diese Formel folgt aus Lemma 1.1.1 und wird angewendet auf die Gruppen  $\Gamma_i = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  mit  $s = k$  und  $f_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(x) = 1+x$ . Eine Darstellung einer Operation von  $\tilde{F}_k$  als Spiegelungsgruppe auf der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}^2$  befindet sich in [Rogmann1997, §1.4]. Weil  $S_k$  ein direktes Produkt mit der 2-elementigen Gruppe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist und weil  $\{g_0 g_1, \dots, g_0 g_k\}$  im Erzeugendensystem  $\Sigma_{S_k}^2$  enthalten ist, sehen wir, daß die Wachstumsmatrix folgenden Aufbau besitzt:

$$\begin{aligned} f_{S_k, \Sigma_{S_k}^2}(x) &= 2f_{\tilde{F}_k, \{g_1, \dots, g_k\}}(x) - 1 + x \\ &= 2 \frac{1+x}{1-(k-1)x} - 1 + x \\ &= \frac{2+2x+(x-1)(1-(k-1)x)}{1-(k-1)x} \\ &= \frac{1+(k+2)x-(k-1)x^2}{1-(k-1)x}. \end{aligned}$$

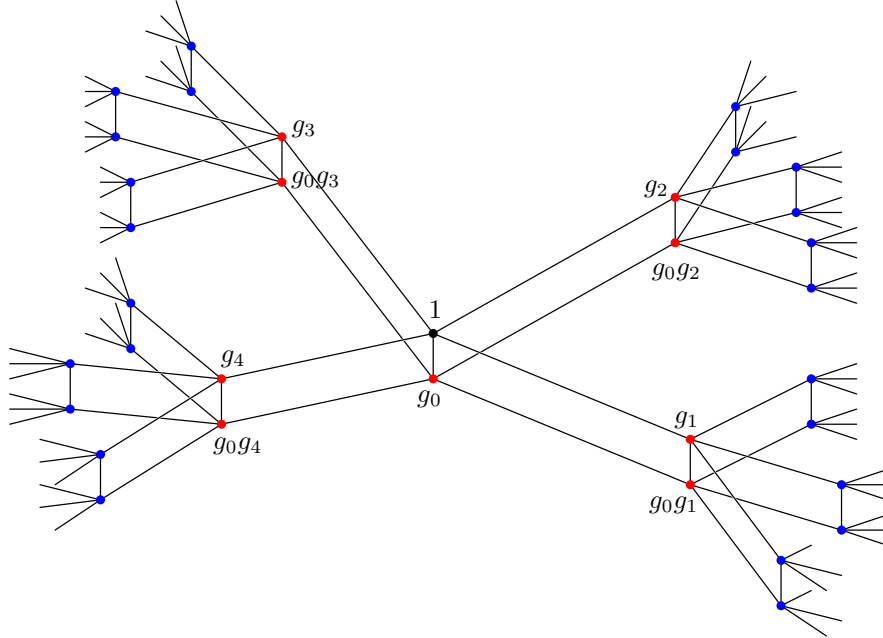
□

Der Cayleygraph von  $\tilde{F}_k$  ist ein Baum, in dem jeder Knoten genau den Grad  $k$  hat. Der Cayleygraph von  $(S_k, \Sigma_{S_k}^2)$  besteht aus zwei Kopien dieses Baumes, einer „oberen“ und einer „unteren“. Die Endpunkte jeder senkrechten Kante  $(g, g \cdot g_0)$  haben immer dieselbe Wortlänge

$$l(g) = l(g \cdot g_0),$$

eine Ausnahme bildet nur die Kante  $(1, g_0)$ . Die Kante  $(1, g_0)$  begründet daher auch den Korrekturterm  $-1 + x$  in der Wachstumsfunktion.

**Beispiel:**  $k = 4$ . Das folgende Bild zeigt den Cayleygraphen von  $S_4$ . Die roten Punkte kennzeichnen die Elemente der Länge 1, also die Elemente des Erzeugendensystems  $\Sigma_{S_4}^2$ . Die blauen Punkte markieren die Elemente der Länge 2.



Der Cayleygraph illustriert die Formel

$$f_{S_k, \Sigma_{S_k}^2}(x) = 2f_{\tilde{F}_k, \{g_1, \dots, g_k\}}(x) - 1 + x.$$

## 2.2 Knuth-Bendix-Regelsystem

Eine rechtwinklige Coxetergruppe  $G$  sei präsentiert durch

$$\langle g_1, \dots, g_n \mid g_1^2 = \dots = g_n^2 = 1, (g_i g_j)^{m_{i,j}} = 1 \forall i < j \rangle.$$

Der Graph  $\Gamma_G$  besitze genau  $r$  Kanten. Wir numerieren die Kanten. Die Eckpunkte von Kante  $i$  seien  $a_i$  und  $b_i$ . Für  $i \in \{1, \dots, r\}$  sei  $h_i := g_{a_i} g_{b_i}$ . Damit erhalten wir das Erzeugendensystem

$$\Sigma_G^2 = \{g_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{h_i \mid 1 \leq i \leq r\}$$

und die Präsentation

$$G = \left\langle g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_r \mid \begin{array}{l} g_1^2 = \dots = g_n^2 = 1, h_1^2 = \dots = h_r^2 = 1, \\ h_1 = g_{a_1} g_{b_1}, \dots, h_r = g_{a_r} g_{b_r} \end{array} \right\rangle.$$

**Definition:** Wir nennen den Graphen  $\Gamma_G$  von  $G$  *dreiecksfrei*, falls  $\Gamma_G$  keinen Kreis der Länge 3 enthält. Für die Gruppe  $G$  bedeutet dies, daß es keine drei Erzeuger  $g_i, g_j$  und  $g_k$  gibt, die paarweise kommutieren.

Falls  $G$  keine zu  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  isomorphe Untergruppe enthält, so ist  $\Gamma_G$  dreiecksfrei.

Wir setzen für den Rest des Abschnittes voraus, daß  $\Gamma_G$  dreiecksfrei ist.

**Definition:** Es sei  $\mathcal{A}$  eine Menge von Buchstaben, z. B. die Elemente eines Erzeugendensystems  $\Sigma_G^2$ . Dann sei

$$\mathcal{A}^* := \{ a_1 a_2 \dots a_n \mid n \in \mathbb{N}_0, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A} \}$$

die Menge der Worte mit Buchstaben in  $\mathcal{A}$ . Mit 1 bezeichnen wir das leere Wort, also das Wort mit 0 Buchstaben.

In diesem Unterkapitel stellen wir ein System  $E$  von Ersetzungsregeln auf, das uns ermöglicht, jedes Element in  $g \in G$ , das als ein Wort in  $\Sigma_G^{2,*}$  gegeben ist, in eine Normalform umzuwandeln. Zur Bestimmung der Normalform wenden wir die Regeln aus  $E$  sukzessive solange auf Teilworte des zu vereinfachenden Wortes an, bis keine weitere Vereinfachung möglich ist.

**Definition:** Es seien  $\mathcal{A}$  ein Alphabet und  $u, v \in \mathcal{A}^*$  zwei Worte,  $u \neq 1$ . Dann bezeichnen wir mit  $u \Rightarrow v$  die Regel, die es uns erlaubt, in einem Wort  $wuy \in \mathcal{A}^*$  das Teilwort  $u$  durch  $v$  zu ersetzen. Wir schreiben dies dann in der Form  $wuy \rightarrow wvy$ . Falls wir mehrere Regeln nacheinander anwenden, so benutzen wir das Zeichen  $\rightarrow^*$ .

Im folgenden Satz leiten wir ein Knuth-Bendix-Regelsystem für rechtwinklige Coxetergruppen mit dreiecksfreiem Graphen her. Hermiller stellt in [Hermiller1994] ein Regelsystem für eine allgemeinere Klasse von Coxetergruppen auf.

**Satz 2.2.1**  *$G$  sei eine rechtwinklige Coxetergruppe mit obiger Präsentierung und  $\Gamma_G$  dreiecksfrei. Dann ist das Regelsystem  $E$  mit den Regeln*

- a)  $g_i^2 \Rightarrow 1, \quad 1 \leq i \leq n,$
- b)  $h_i^2 \Rightarrow 1, \quad 1 \leq i \leq r,$
- c)  $g_l g_m \Rightarrow h_i, \quad \{l, m\} = \{a_i, b_i\},$
- d)  $g_l h_i \Rightarrow g_m, \quad \{l, m\} = \{a_i, b_i\},$
- e)  $h_i g_l \Rightarrow g_m, \quad \{l, m\} = \{a_i, b_i\},$
- f)  $h_i g_p \Rightarrow g_l h_j, \quad i \neq j, \{l, m\} = \{a_i, b_i\} \wedge \{m, p\} = \{a_j, b_j\},$
- g)  $h_i h_j \Rightarrow g_l g_p, \quad i \neq j, \exists m \in \{a_i, b_i\} \cap \{a_j, b_j\} : \{a_i, b_i\} = \{l, m\} \wedge \{a_j, b_j\} = \{m, p\},$

*Knuth-Bendix-vollständig.*

**Beweis:** Nach [EHLPT1992, Lemma 6.2.4] ist zu zeigen, daß die beiden folgenden Bedingungen für alle Worte  $u, y, v \in \Sigma_G^{2,*}$  erfüllt sind.

1. Wir nehmen an, daß  $y \neq 1$  und daß  $uy \Rightarrow u'$  und  $yv \Rightarrow v'$  Regeln aus  $E$  sind. Dann gibt es ein  $t \in \Sigma_G^{2,*}$  und Reduktionen

$$uyv \rightarrow u'v \rightarrow^* t \quad \text{und} \quad uyv \rightarrow uv' \rightarrow^* t.$$

2. Seien  $y \Rightarrow y'$  und  $uyv \Rightarrow y''$  Regeln von  $E$ . Dann gibt es ein Wort  $t \in \Sigma_G^{2,*}$  und Reduktionen

$$uyv \rightarrow uy'v \rightarrow^* t \quad \text{und} \quad uyv \rightarrow y'' \rightarrow^* t.$$

Punkt 2 brauchen wir im Folgenden nicht zu betrachten, weil im Regelsystem  $E$  keine Regel der Form  $uyv \Rightarrow y''$  mit nicht-leeren Worten  $u, y$  und  $v$  vorhanden ist. Der Fall, daß  $u$  oder  $v$  leer sind, wird in Punkt 1 erfaßt.

Punkt 1 kann angewendet werden, wenn die Worte der linken Seiten zweier Regeln ein gemeinsames nicht-leeres Teilwort besitzen, das auf der linken Seite einer Regel am rechten Wortrand und auf der linken Seite der anderen Regel am linken Wortrand steht.

Hinsichtlich Punkt 1 ist zu beachten, daß die Worte  $u$  oder  $v$  durchaus leere Worte sein können.

Wir gehen zuerst davon aus, daß mindestens eines der beiden Worte  $u$  und  $v$  nicht leer ist. Das Wort  $y$  besteht dann ebenso wie die Worte  $u$  und  $v$  jeweils aus genau einem Buchstaben. Wir unterscheiden 49 Fälle, da die Regel  $uy \Rightarrow u'$  von der Form  $a)-g)$  und Regel  $yv \Rightarrow v'$  von der Form  $a)-g)$  sein kann.

Folgende Fälle können wir ausschließen, da der Anfangsbuchstabe des Wortes der linken Seite der rechten Regel nicht identisch ist mit dem Endbuchstaben des Wortes der linken Seite der linken Regel:

$$\begin{aligned} & ab), ae), af), ag), ba), bc), bd), \\ & cb), ce), cf), cg), da), dc), dd), \\ & eb), ee), ef), eg), \\ & fb), fe), ff), fg), ga), gc), gd). \end{aligned}$$

Die restlichen Fälle sind:

$$aa) \quad g_i \cdot g_i \Rightarrow 1 \text{ und } g_i \cdot g_i \Rightarrow 1.$$

Reduktionen:

$$g_i \cdot g_i \cdot g_i = g_i^2 \cdot g_i \xrightarrow{a)} 1 \cdot g_i = g_i \quad \text{und} \quad g_i \cdot g_i \cdot g_i = g_i \cdot g_i^2 \xrightarrow{a)} g_i \cdot 1 = g_i.$$

$$ac) \quad g_l \cdot g_l \Rightarrow 1 \text{ und } g_l \cdot g_m \Rightarrow h_i \text{ mit } \{l, m\} = \{a_i, b_i\}.$$

Reduktionen:

$$g_l \cdot g_l \cdot g_m \xrightarrow{a)} 1 \cdot g_m = g_m \quad \text{und} \quad g_l \cdot g_l \cdot g_m \xrightarrow{c)} g_l \cdot h_i \xrightarrow{d)} g_m.$$

$$ad) \quad g_l \cdot g_l \Rightarrow 1 \text{ und } g_l \cdot h_i \Rightarrow g_m \text{ mit } \{l, m\} = \{a_i, b_i\}.$$

Reduktionen:

$$g_l \cdot g_l \cdot h_i \xrightarrow{a)} 1 \cdot h_i = h_i \quad \text{und} \quad g_l \cdot g_l \cdot h_i \xrightarrow{d)} g_l \cdot g_m \xrightarrow{c)} h_i.$$

bb) Analog zu aa).

$$be) \quad h_i \cdot h_i \Rightarrow 1 \text{ und } h_i \cdot g_l \Rightarrow g_m \text{ mit } \{l, m\} = \{a_i, b_i\}.$$

Reduktionen:

$$h_i \cdot h_i \cdot g_l \xrightarrow{b)} 1 \cdot g_l = g_l \quad \text{und} \quad h_i \cdot h_i \cdot g_l \xrightarrow{e)} h_i \cdot g_m \xrightarrow{e)} g_l.$$

$$bf) \quad h_i \cdot h_i \Rightarrow 1 \text{ und } h_i \cdot g_p \Rightarrow g_l h_j \text{ mit } \{l, m\} = \{a_i, b_i\} \text{ und } \{m, p\} = \{a_j, b_j\}.$$

Reduktionen:

$$h_i \cdot h_i \cdot g_p \xrightarrow{b)} 1 \cdot g_p = g_p \quad \text{und} \quad h_i \cdot h_i \cdot g_p \xrightarrow{f)} h_i \cdot g_l h_j \xrightarrow{e)} g_m h_j \xrightarrow{d)} g_p.$$

$$bg) \quad h_i \cdot h_i \Rightarrow 1 \text{ und } h_i \cdot h_j \Rightarrow g_l g_m \text{ mit } \{l, m\} = \{a_i, b_i\} \text{ und } \{m, p\} = \{a_j, b_j\}.$$

Reduktionen:

$$h_i \cdot h_i \cdot h_j \xrightarrow{b)} 1 \cdot h_j = h_j \quad \text{und} \quad h_i \cdot h_i \cdot h_j \xrightarrow{g)} h_i \cdot g_l g_p \xrightarrow{e)} g_m g_p \xrightarrow{c)} h_j.$$

$$ca) \quad g_l \cdot g_m \Rightarrow h_i \text{ und } g_m \cdot g_m \Rightarrow 1 \text{ mit } \{l, m\} = \{a_i, b_i\}.$$

Reduktionen:

$$g_l \cdot g_m \cdot g_m \xrightarrow{c)} h_i \cdot g_m \xrightarrow{e)} g_l \quad \text{und} \quad g_l \cdot g_m \cdot g_m \xrightarrow{a)} g_l \cdot 1 = g_l.$$

$$cc) \quad g_l \cdot g_m \Rightarrow h_i \text{ und } g_m \cdot g_p \Rightarrow h_j \text{ mit } \{l, m\} = \{a_i, b_i\} \text{ und } \{m, p\} = \{a_j, b_j\}.$$

Reduktionen:

$$g_l \cdot g_m \cdot g_p \xrightarrow{c)} h_i \cdot g_p \xrightarrow{f)} g_l h_j \quad \text{und} \quad g_l \cdot g_m \cdot g_p \xrightarrow{c)} g_l \cdot h_j.$$

cd)  $g_l g_m \Rightarrow h_i$  und  $g_m h_j \Rightarrow g_p$  mit  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\}$  und  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\}$ .

Reduktionen:

$$g_l \cdot g_m \cdot h_j \xrightarrow{c)} h_i \cdot h_j \xrightarrow{g)} g_l g_p \quad \text{und} \quad g_l \cdot g_m \cdot h_j \xrightarrow{d)} g_l \cdot g_p = g_l g_p.$$

db)  $g_l \cdot h_i \Rightarrow g_m$  und  $h_i \cdot h_i \Rightarrow 1$  mit  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\}$ .

Reduktionen:

$$g_l \cdot h_i \cdot h_i \xrightarrow{d)} g_m \cdot h_i \xrightarrow{d)} g_l \quad \text{und} \quad g_l \cdot h_i \cdot h_i \xrightarrow{b)} g_l \cdot 1 = g_l.$$

de)  $g_l \cdot h_i \Rightarrow g_m$  und  $h_i \cdot g_p \Rightarrow g_q$  mit  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\}$  und  $\{p, q\} = \{a_i, b_i\}$ .

Reduktionen:

1.  $l = p$  und  $m = q$ .

$$g_l \cdot h_i \cdot g_p \xrightarrow{d)} g_m \cdot g_p = g_m g_l \xrightarrow{c)} h_i \quad \text{und} \quad g_l \cdot h_i \cdot g_p \xrightarrow{e)} g_l \cdot g_q = g_l g_m \xrightarrow{c)} h_i.$$

2.  $l = q$  und  $m = p$ .

$$g_l \cdot h_i \cdot g_p \xrightarrow{d)} g_m \cdot g_p = g_m^2 \xrightarrow{a)} 1 \quad \text{und} \quad g_l \cdot h_i \cdot g_p \xrightarrow{e)} g_l \cdot g_q = g_l^2 \xrightarrow{a)} 1.$$

df)  $g_u \cdot h_i \Rightarrow g_v$  und  $h_i \cdot g_p \Rightarrow g_l h_j$  mit  $\{u, v\} = \{a_i, b_i\} = \{l, m\}$  und  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\}$ .

Reduktionen:

1.  $u = l$  und  $v = m$ .

$$g_u \cdot h_i \cdot g_p \xrightarrow{d)} g_v \cdot g_p = g_m \cdot g_p \xrightarrow{c)} h_j \quad \text{und} \quad g_u \cdot h_i \cdot g_p \xrightarrow{f)} g_u \cdot g_l \cdot h_j = g_l^2 h_j \xrightarrow{a)} h_j.$$

2.  $u = m$  und  $v = l$ .

$$g_u \cdot h_i \cdot g_p \xrightarrow{d)} g_v \cdot g_p = g_l g_p \quad \text{und} \quad g_u \cdot h_i \cdot g_p \xrightarrow{f)} g_u \cdot g_l h_j = g_m g_l h_j \xrightarrow{c)} h_i h_j \xrightarrow{g)} g_l g_p.$$

dg)  $g_u \cdot h_i \Rightarrow g_v$  und  $h_i \cdot h_j \Rightarrow g_l g_p$  mit  $\{u, v\} = \{a_i, b_i\} = \{l, m\}$  und  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\}$ .

Reduktionen:

1.  $u = l$  und  $v = m$ .

$$g_u \cdot h_i \cdot h_j \xrightarrow{d)} g_v \cdot h_j = g_m h_j \xrightarrow{d)} g_p \quad \text{und} \quad g_u \cdot h_i \cdot h_j \xrightarrow{g)} g_u \cdot g_l g_p = g_l^2 g_p \xrightarrow{a)} g_p.$$

2.  $u = m$  und  $v = l$ .

$$g_u \cdot h_i \cdot h_j \xrightarrow{d)} g_v \cdot h_j = g_l h_j \quad \text{und} \quad g_u \cdot h_i \cdot h_j \xrightarrow{g)} g_u \cdot g_l g_p = g_m g_l g_p \xrightarrow{c)} h_i g_p \xrightarrow{f)} g_l h_j.$$

ea)  $h_i \cdot g_l \Rightarrow g_m$  und  $g_l \cdot g_l \Rightarrow 1$  mit  $\{l, m\} = \{a, b\}$ .

Reduktionen:

$$h_i \cdot g_l \cdot g_l \xrightarrow{e)} g_m \cdot g_l \xrightarrow{c)} h_i \quad \text{und} \quad h_i \cdot g_l \cdot g_l \xrightarrow{a)} h_i \cdot 1 = h_i.$$

ec)  $h_i \cdot g_l \Rightarrow g_m$  und  $g_l \cdot g_v \Rightarrow h_j$  mit  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\}$ ,  $\{l, v\} = \{a_j, b_j\}$ .

Reduktionen:

1.  $m = v$ , d. h.,  $i = j$ .

$$h_i \cdot g_l \cdot g_v \xrightarrow{e)} g_m \cdot g_v = g_m^2 \xrightarrow{a)} 1 \quad \text{und} \quad h_i \cdot g_l \cdot g_v \xrightarrow{c)} h_i \cdot h_j = h_i^2 \xrightarrow{b)} 1.$$

2.  $m \neq v$ , d. h.,  $i \neq j$ .

$$h_i \cdot g_l \cdot g_v \xrightarrow{e)} g_m \cdot g_v = g_m g_v \quad \text{und} \quad h_i \cdot g_l \cdot g_v \xrightarrow{c)} h_i \cdot h_j \xrightarrow{g)} g_m g_v.$$

ed)  $h_i \cdot g_l \Rightarrow g_m$  und  $g_l \cdot h_j \Rightarrow g_p$  mit  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\}$  und  $\{l, p\} = \{a_j, b_j\}$ .

Reduktionen:

1.  $p = m$ , d. h.,  $i = j$ .

$$h_i \cdot g_l \cdot h_j \xrightarrow{e)} g_m \cdot h_j = g_m h_i \xrightarrow{d)} g_l \quad \text{und} \quad h_i \cdot g_l \cdot h_j \xrightarrow{d)} h_i \cdot g_p = h_i \cdot g_m \xrightarrow{e)} g_l.$$

2.  $p \neq m$ , d. h.,  $i \neq j$ .

$$h_i \cdot g_l \cdot h_j \xrightarrow{e)} g_m \cdot h_j \quad \text{und} \quad h_i \cdot g_l \cdot h_j \xrightarrow{d)} h_i \cdot g_p \xrightarrow{f)} g_m \cdot h_j.$$

f a)  $h_i \cdot g_p \Rightarrow g_l h_j$  und  $g_p \cdot g_p \Rightarrow 1$  mit  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\}$  und  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\}$ .  
Reduktionen:

$$h_i \cdot g_p \cdot g_p \xrightarrow{f)} g_l h_j \cdot g_p \xrightarrow{e)} g_l g_m \xrightarrow{c)} h_i \quad \text{und} \quad h_i \cdot g_p \cdot g_p \xrightarrow{a)} h_i \cdot 1 = h_i.$$

f c)  $h_i \cdot g_p \Rightarrow g_l h_j$  und  $g_p \cdot g_q \Rightarrow h_t$  mit  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\}$ ,  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\}$  und  $\{p, q\} = \{a_t, b_t\}$ .

Reduktionen:

$$h_i \cdot g_p \cdot g_q \xrightarrow{f)} g_l h_j \cdot g_q \xrightarrow{f)} g_l \cdot g_m h_t \xrightarrow{c)} h_i h_t \quad \text{und} \quad h_i \cdot g_p \cdot g_q \xrightarrow{c)} h_i \cdot h_t.$$

f d)  $h_i \cdot g_p \Rightarrow g_l h_j$  und  $g_p \cdot h_t \Rightarrow g_q$  mit  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\}$ ,  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\}$  und  $\{p, q\} = \{a_t, b_t\}$ .

Reduktionen:

$$h_i \cdot g_p \cdot h_t \xrightarrow{f)} g_l h_j \cdot h_t \xrightarrow{g)} g_l \cdot g_m g_q \xrightarrow{c)} h_i g_q \quad \text{und} \quad h_i \cdot g_p \cdot h_t \xrightarrow{d)} h_i \cdot g_q = h_i g_q.$$

g b)  $h_i \cdot h_j \Rightarrow g_l g_p$  und  $h_j \cdot h_j \Rightarrow 1$  mit  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\}$  und  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\}$ .

Reduktionen:

$$h_i \cdot h_j \cdot h_j \xrightarrow{g)} g_l g_p \cdot h_j \xrightarrow{d)} g_l g_m \xrightarrow{c)} h_i \quad \text{und} \quad h_i \cdot h_j \cdot h_j \xrightarrow{b)} h_i \cdot 1 = h_i.$$

g e)  $h_i \cdot h_j \Rightarrow g_l g_p$  und  $h_j \cdot g_u \Rightarrow g_v$  mit  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\}$  und  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\} = \{u, v\}$ .

Reduktionen:

1.  $u = m$  und  $v = p$ .

$$h_i \cdot h_j \cdot g_u \xrightarrow{g)} g_l g_p \cdot g_u = g_l g_p g_m \xrightarrow{c)} g_l h_j \quad \text{und} \quad h_i \cdot h_j \cdot g_u \xrightarrow{g)} h_i \cdot g_v = h_i g_p \xrightarrow{f)} g_l h_j.$$

2.  $u = p$  und  $v = m$ .

$$h_i \cdot h_j \cdot g_u \xrightarrow{g)} g_l g_p \cdot g_u = g_l g_p^2 \xrightarrow{a)} g_l \cdot 1 = g_l \quad \text{und} \quad h_i \cdot h_j \cdot g_u \xrightarrow{g)} h_i \cdot g_v = h_i g_m \xrightarrow{e)} g_l.$$

g f)  $h_i \cdot h_j \Rightarrow g_l g_p$  und  $h_j \cdot g_w \Rightarrow g_u h_t$  mit  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\}$ ,  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\} = \{u, v\}$  und  $\{v, w\} = \{a_t, b_t\}$ .

Reduktionen:

1.  $u = m$  und  $v = p$ .

$$h_i \cdot h_j \cdot g_w \xrightarrow{g)} g_l g_p \cdot g_w = g_l g_v g_w \xrightarrow{c)} g_l h_t \quad \text{und} \quad h_i \cdot h_j \cdot g_w \xrightarrow{f)} h_i \cdot g_u h_t = h_i g_m h_t \xrightarrow{e)} g_l h_t.$$

2.  $u = p$  und  $v = m$ .

$$h_i \cdot h_j \cdot g_w \xrightarrow{g)} g_l g_p \cdot g_w \quad \text{und} \quad h_i \cdot h_j \cdot g_w \xrightarrow{f)} h_i \cdot g_u h_t = h_i g_p h_t \xrightarrow{f)} g_l h_j h_t \xrightarrow{g)} g_l g_p g_w.$$

g g)  $h_i \cdot h_j \Rightarrow g_l g_p$  und  $h_j \cdot h_t \Rightarrow g_u g_w$  mit  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\}$ ,  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\} = \{u, v\}$  und  $\{v, w\} = \{a_t, b_t\}$ .

Reduktionen:

1.  $u = m$  und  $v = p$ .

$$h_i \cdot h_j \cdot h_t \xrightarrow{g)} g_l g_p \cdot h_t = g_l \cdot g_v h_t \xrightarrow{d)} g_l g_w \quad \wedge \quad h_i \cdot h_j \cdot h_t \xrightarrow{g)} h_i \cdot g_u g_w = h_i g_m \cdot g_w \xrightarrow{e)} g_l g_w.$$

2.  $u = p$  und  $v = m$ .

$$h_i \cdot h_j \cdot h_t \xrightarrow{g)} g_l g_p \cdot h_t = g_l g_u h_t \quad \text{und} \quad h_i \cdot h_j \cdot h_t \xrightarrow{g)} h_i \cdot g_u g_w = h_i g_p g_w \xrightarrow{f)} g_l h_j g_w \xrightarrow{f)} g_l g_u h_t.$$

Betrachten wir nun den Fall, daß  $u$  und  $v$  leer sind. Wir erhalten dann zwei Regeln  $y \Rightarrow u'$  und  $y \Rightarrow v'$  und müssen zeigen, daß es ein  $t$  gibt, so daß  $u' \rightarrow^* t$  und  $v' \rightarrow^* t$ .

Bei den folgenden Regelpaaren können die linken Seiten übereinstimmen. Diese müssen näher untersucht werden.

- aa) Die beiden Regeln  $g_i^2 \Rightarrow 1$  und  $g_i^2 \Rightarrow 1$  sind identisch.
- ac) Dieser Fall kommt nicht vor, da  $a_i \neq b_i$  für alle  $i$ .
- bb) Beide Regeln sind identisch.
- bg) Dieser Fall kommt nicht vor, da in  $g$ )  $i \neq j$  verlangt wird.
- ca) Kommt nicht vor, da  $l \neq m$  in  $c$ ).
- cc) Die rechten Seiten von  $c$ ) sind identisch.
- dd) Beide Regeln sind identisch.
- ee) Beide Regeln sind identisch.
- ef) Dieser Fall kommt nicht vor, da in  $e$ )  $l \in \{a_i, b_i\}$  verlangt wird, in  $f$ ) aber  $p \notin \{a_i, b_i\}$ .
- fe) Dieser Fall kommt nicht vor, siehe  $ef$ ).
- ff) Wir haben  $h_i g_p \Rightarrow g_l h_j$  und  $h_i g_p \Rightarrow g_u h_k$  mit  $i \neq j$ ,  $i \neq k$ ,  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\} = \{u, v\}$ ,  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\}$  und  $\{v, p\} = \{a_k, b_k\}$ .
  1.  $j = k$ . Es folgt  $\{m, p\} = \{v, p\}$ , also  $v = m$  und  $u = l$ . Beide Regeln sind identisch.
  2.  $j \neq k$ . Aus  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\} \neq \{a_k, b_k\} = \{v, p\}$  folgt  $m \neq v$ . Aus  $\{l, m\} = \{u, v\}$  folgen  $l = v$  und  $m = u$ . Damit haben wir  $\{a_i, b_i\} = \{l, m\}$ ,  $\{a_j, b_j\} = \{m, p\}$  und  $\{a_k, b_k\} = \{l, p\}$ . Somit kommutieren  $g_l$ ,  $g_m$  und  $g_p$  paarweise. Da wir vorausgesetzt haben, daß  $\Gamma_G$  dreiecksfrei ist, kommt dieser Fall nicht vor.
- gb) Dieser Fall kommt nicht vor, da in  $g$ )  $i \neq j$  verlangt wird.
- gg) Gegeben seien die beiden Regeln  $h_i h_j \Rightarrow g_l g_p$  und  $h_i h_j \Rightarrow g_u g_w$  mit  $i \neq j$ ,  $m, v \in \{a_i, b_i\} \cap \{a_j, b_j\}$ ,  $\{l, m\} = \{a_i, b_i\} = \{u, v\}$  und  $\{m, p\} = \{a_j, b_j\} = \{v, w\}$ .
  1.  $l = u$ . Dann gelten auch  $m = v$  und  $p = w$ . Insbesondere gilt  $g_l g_p = g_u g_w$ .
  2.  $l = v$ . Dann gilt auch  $m = u$ . Wegen  $u \neq v$  und  $u = m \in \{v, w\}$  folgt  $u = w$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu  $i \neq j$ , dieser Fall kommt somit nicht vor.  $\square$

## 2.3 2-Wachstumsmatrix rechtwinkliger Coxetergruppen

Auch in diesem Abschnitt sei  $G$  eine rechtwinklige Coxetergruppe, deren Graph  $\Gamma_G$  dreiecksfrei ist. Wir geben zuerst einen Automaten an, welcher alle Worte von  $G$  in Normalform liefert. Aus diesem Automaten erzeugen wir eine Wachstumsmatrix für die 2-Wachstumsfunktion von  $G$ .

Wir nennen die Worte auf den linken Seiten der Knuth-Bendix-Regeln *verbotene Worte*. Falls ein Wort in Normalform vorliegt, kann es kein verbotenes Wort als Teilwort enthalten, denn ansonsten könnte es weiter vereinfacht werden. Umgekehrt liegt ein Wort in Normalform vor, wenn es kein verbotenes Wort als Teilwort enthält. Der Automat wird nun so konstruiert, daß er genau die Worte in  $\Sigma_G^{2,*}$  akzeptiert, die kein verbotenes Wort als Teilwort enthalten.

Der Automat habe  $n + r + 1$  Zustände, die wir mit  $\mathbf{1}$ , mit  $\mathbf{g}_i$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  und mit  $\mathbf{h}_i$  für  $j \in \{1, \dots, r\}$  bezeichnen. Zwischen den Zuständen werden gerichtete Kanten gezogen, die mit  $g_p$  ( $p \in \{1, \dots, k\}$ ) oder  $h_q$  ( $q \in \{1, \dots, r\}$ ) beschriftet sind.



- Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  wird eine mit  $g_i$  beschriftete Kante von  $\mathbf{1}$  nach  $\mathbf{g}_i$  gezogen.
- Für jedes  $j \in \{1, \dots, r\}$  wird eine mit  $h_j$  beschriftete Kante von  $\mathbf{1}$  nach  $\mathbf{h}_j$  gezogen.
- Eine Kante  $\mathbf{g}_i \xrightarrow{g_p} \mathbf{g}_p$  wird gezogen, falls  $g_i \cdot g_p$  kein verbotenes Wort ist.
- Eine Kante  $\mathbf{g}_i \xrightarrow{h_q} \mathbf{h}_q$  wird gezogen, falls  $g_i \cdot h_q$  kein verbotenes Wort ist.
- Eine Kante  $\mathbf{h}_j \xrightarrow{g_p} \mathbf{g}_p$  wird gezogen, falls  $h_j \cdot g_p$  kein verbotenes Wort ist.
- Eine Kante  $\mathbf{h}_j \xrightarrow{h_q} \mathbf{h}_q$  wird gezogen, falls  $h_j \cdot h_q$  kein verbotenes Wort ist.

Der Automat funktioniert folgendermaßen: Sei  $w = w_1 \dots w_l$  ein Wort in  $G$ . Wir durchlaufen die Buchstaben des Wortes und bewegen uns dabei abhängig vom jeweiligen Buchstaben von einem Zustand zum nächsten Zustand.

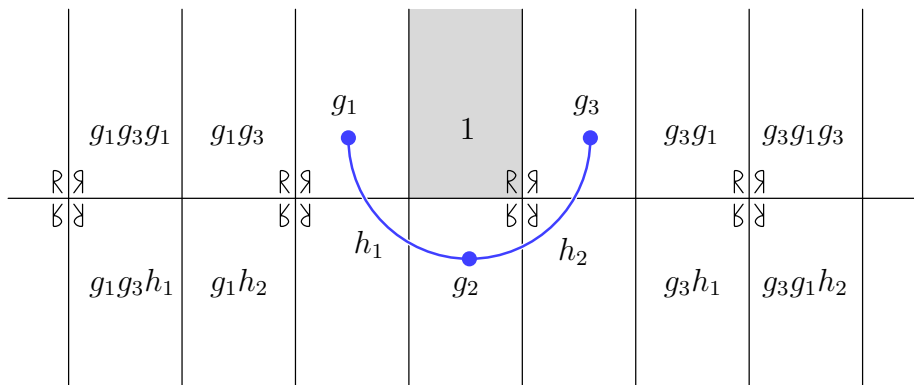
- Wir starten im Initialzustand  $\mathbf{w}_1 := \mathbf{1}$ .
- Sei  $i \in \{1, \dots, l\}$ . Wir befinden uns im Zustand  $\mathbf{w}_i$ . Es gibt zwei Möglichkeiten. Wenn es vom aktuellen Zustand  $\mathbf{w}_i$  aus keine  $w_i$ -entsprechende Kante gibt, enthält  $w$  ein verbotenes Wort und liegt damit nicht in Normalform vor. Gibt es eine entsprechende Kante, so folgen wir dieser zum nächsten Zustand, den wir mit  $\mathbf{w}_{i+1}$  bezeichnen.

Wird der Zustand  $\mathbf{w}_{l+1}$  erreicht, so gibt es einen bei  $\mathbf{1}$  beginnenden Weg, dessen Kanten genau den Buchstaben von  $w$  entsprechen;  $w$  liegt in Normalform vor.

**Beispiel:** Sei  $G = L_3$ . Der Graph von  $G$  ist der Baum mit drei Knoten.

$$G = \left\langle g_1, g_2, g_3, h_1, h_2 \mid \begin{array}{l} g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = h_1^2 = h_2^2 = 1, \\ h_1 = g_1g_2, h_2 = g_2g_3 \end{array} \right\rangle.$$

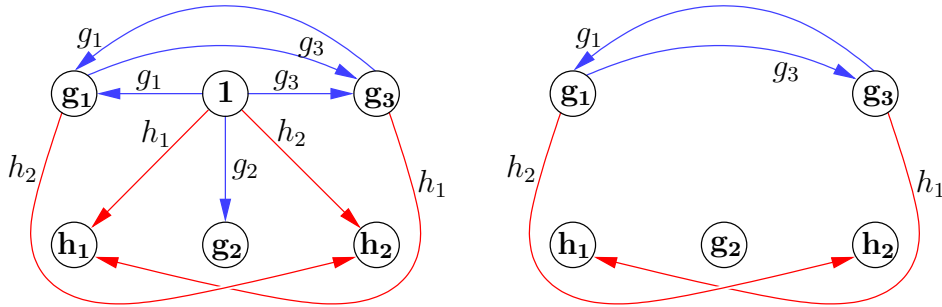
$L_3$  operiert als Spiegelungsgruppe auf  $\mathbb{R}^2$ . Die Menge  $[0, 1] \times \mathbb{R}^{\geq 0}$  ist ein Fundamentalbereich von  $L_3$ . Die Elemente  $g_1, g_2$  und  $g_3$  sind Spiegelungen an den Kanten des Fundamentalbereichs. Den Graph  $\Gamma_G$  betten wir im Bild um den Fundamentalbereich herum in der Pflasterung ein. Es ist auch bei vielen anderen rechtwinkligen Coxetergruppen der Fall, daß sich der zugehörige Graph in natürlicher Weise in einer zugehörigen Pflasterung einbetten läßt, siehe dazu auch die Illustration zu  $L_4$  auf Seite 41.



Es ist  $\Sigma_{L_3}^2 = \{g_1, g_2, g_3, h_1, h_2\}$ . Das Knuth-Bendix-Regelsystem besteht aus den Regeln

$$\begin{aligned} g_i^2 &\Rightarrow 1, h_i^2 \Rightarrow 1, g_1g_2 \Rightarrow h_1, g_2g_1 \Rightarrow h_1, g_2g_3 \Rightarrow h_2, g_3g_2 \Rightarrow h_2, \\ g_1h_1 &\Rightarrow g_2, g_2h_1 \Rightarrow g_1, g_2h_2 \Rightarrow g_3, g_3h_2 \Rightarrow g_2, \\ h_1g_1 &\Rightarrow g_2, h_1g_2 \Rightarrow g_1, h_2g_2 \Rightarrow g_3, h_2g_3 \Rightarrow g_2, \\ h_1g_3 &\Rightarrow g_1h_2, h_2g_1 \Rightarrow g_3h_1, h_1h_2 \Rightarrow g_1g_3, h_2h_1 \Rightarrow g_3g_1. \end{aligned}$$

Der Automat, der alle Normalformen erzeugt, besitzt sechs Zustände. Das rechte Bild zeigt den Automaten, nachdem der Zustand **1** einschließlich der Kanten entfernt wurde.



Das Wort  $w = g_1g_3h_1$  liegt in Normalform vor:  $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{g}_1 \rightarrow \mathbf{g}_3 \rightarrow \mathbf{h}_1$ .

Das Wort  $w = g_1g_3h_2$  liegt dagegen nicht in Normalform vor:  $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{g}_1 \rightarrow \mathbf{g}_3 \rightarrow \times$ .

Worte der Länge 1:  $g_1, g_2, g_3, h_1, h_2$ .

Worte der Länge 2:  $g_1g_3, g_1h_2, g_3g_1, g_3h_1$ .

Worte der Länge 3:  $g_1g_3g_1, g_1g_3h_1, g_3g_1g_3, g_3g_1h_2$ .

Ende des Beispiels.

Wir geben eine Präsentation von  $G$  an, in der alle Elemente von  $\Sigma_G^2$  im Erzeugendensystem enthalten sind:

$$G = \left\langle g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_r \mid \begin{array}{l} g_1^2 = \dots = g_n^2 = 1, h_1^2 = \dots = h_r^2 = 1, \\ h_1 = g_{a_1}g_{b_1}, \dots, h_r = g_{a_r}g_{b_r} \end{array} \right\rangle.$$

Die Menge aller Worte in Normalform der Länge  $l$  entspricht genau der Menge der Wege der Länge  $l$ , die im Zustand **1** starten. Der Koeffizient  $a_l$  der Wachstumsfunktion  $f_{G, \Sigma_G^2}(x)$  gibt die Anzahl von Wegen der Länge  $l$  an, die im Zustand **1** starten.

Nachdem wir den Automaten definiert haben, können wir die Wachstumsmatrix angeben. Wir definieren die Wachstumsmatrix  $A = (a_{\lambda, \mu})$  in einer Weise, daß sie das Wachstum des Automaten angibt. Da vom Zustand **1** zu jedem anderen Zustand genau eine Kante verläuft, entfernen wir diesen Zustand einschließlich seiner  $n + r$  Kanten. Wir setzen dafür die  $n + r$  Komponenten des Initialvektors  $v$  alle auf 1. Sowohl die  $n + r$  Spalten als auch die  $n + r$  Zeilen der Matrix entsprechen den  $n + r$  übrigen Zuständen des Automaten. Wir setzen  $a_{\lambda, \mu}$  auf 1, wenn es eine Kante vom Zustand  $\mu$  zum Zustand  $\lambda$  gibt. Die Einträge  $a_{\lambda, \mu}$ , die keiner Kante  $\mu \rightarrow \lambda$  im Automaten entsprechen, sind verboten und werden auf 0 gesetzt. Die zugehörige Knuth-Bendix-Regel wird in diesem Fall oberhalb der geschweiften Klammer angegeben.

Es sei  $A \in M_{n+r, n+r}(\mathbb{Z})$  und  $v := (1)_i \in \mathbb{Z}^{n+r}$ .  $A$  ist in vier Bereiche unterteilt. Oben links befindet sich der Bereich  $\mathbf{g}_i \rightarrow \mathbf{g}_j$ , unten links der Bereich  $\mathbf{g}_i \rightarrow \mathbf{h}_j$ , oben rechts der Bereich  $\mathbf{h}_i \rightarrow \mathbf{g}_j$ , und unten rechts der Bereich  $\mathbf{h}_i \rightarrow \mathbf{h}_j$ .

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{g}_i \rightarrow \mathbf{g}_j & \mathbf{h}_i \rightarrow \mathbf{g}_j \\ \hline \mathbf{g}_i \rightarrow \mathbf{h}_j & \mathbf{h}_i \rightarrow \mathbf{h}_j \end{array} \right).$$

**Definition:** Es sei  $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{n+r, n+r}$  mit folgenden Einträgen:

Für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  sei

$$a_{i,j} := \begin{cases} 0, & \overbrace{i = j}^a \text{ oder } \overbrace{(g_i g_j)^2 = 1}^c, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $i \in \{1, \dots, r\}$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$  sei

$$a_{n+i,j} := \begin{cases} 0, & \overbrace{j \in \{a_i, b_i\}}^d, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, r\}$  sei

$$a_{i,n+j} := \begin{cases} 0, & \overbrace{i \in \{a_j, b_j\}}^e, \overbrace{(g_i g_{a_j})^2 = 1 \text{ oder } (g_i g_{b_j})^2 = 1}^f, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $i \in \{1, \dots, r\}$  und  $j \in \{1, \dots, r\}$  sei

$$a_{n+i,n+j} := \begin{cases} 0, & \overbrace{\{a_i, b_i\} \cap \{a_j, b_j\} \neq \emptyset}^{g), b)}, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Lemma 2.3.1**

$$f_{G, \Sigma_G^2}(x) = f_{A,v}(x).$$

**Beweis:** Die Matrix  $A$  wurde so definiert, daß für  $l > 0$  die Komponente  $\mathbf{g}_i$  bzw.  $\mathbf{h}_j$  des Vektors  $A^{l-1} \cdot v$  genau die Anzahl der Wege im Automaten der Länge  $l$  liefert, beginnend beim Zustand  $\mathbf{1}$  und endend beim Zustand  $\mathbf{g}_i$  bzw.  $\mathbf{h}_j$ . Daher ist

$$(1 \ 1 \ \dots \ 1) \cdot A^{l-1} \cdot v$$

die Anzahl von Wegen im Automaten der Länge  $l$ , beginnend beim Zustand  $\mathbf{1}$ . Diese Anzahl stimmt mit dem Koeffizienten  $a_l$  der Wachstumsfunktion  $f_{G, \Sigma_G^2}(x)$  überein.  $\square$

Beispiel:  $G = L_3$ ,  $n = 3$  und  $r = 2$ .

$$A = \left( \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^l \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad l \geq 1.$$

## 2.4 2-Wachstumsfunktionen rechtwinkliger Coxetergruppen

Dieser Abschnitt enthält eine Tabelle der 2-Wachstumsfunktionen aller rechtwinkligen Coxetergruppen mit bis zu sechs Erzeugern und zusammenhängendem Graphen. Die Wachstumsfunktionen wurden mit der Hilfe des Programmpakets KBMAG berechnet, siehe [KBMAG2000].

Eine rechtwinklige Coxetergruppe, die einem nicht-zusammenhängenden Graphen entspricht, ist ein freies Produkt der rechtwinkligen Coxetergruppen der Zusammenhangskomponenten des Graphen. Dies folgt aus der Präsentation der Coxetergruppe und Lemma 1.1.1: Sind  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$  die zusammenhängenden Teilgraphen eines Coxetergraphen  $\Gamma$  einer rechtwinkligen Coxetergruppe  $G$ , so ist  $G$  das freie Produkt der Gruppen  $G_1, \dots, G_r$ , die den zusammenhängenden Teilgraphen entsprechen:

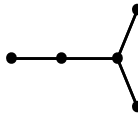
$$\begin{aligned} G_i &= \langle g_{i,1}, \dots, g_{i,s_i} \mid g_{i,1}^2 = \dots = g_{i,s_i}^2 = 1, (g_{i,j} g_{i,k})^{m_{i,(j,k)}} = 1 \rangle \text{ für } 1 \leq i \leq r, \\ \ast_{i=1}^r G_i &= \ast_{i=1}^r \langle g_{i,1}, \dots, g_{i,s_i} \mid g_{i,1}^2 = \dots = g_{i,s_i}^2 = 1, (g_{i,j} g_{i,k})^{m_{i,(j,k)}} = 1 \rangle \\ &= \langle g_{1,1}, \dots, g_{1,s_1}, \dots, g_{r,1}, \dots, g_{r,s_r} \mid g_{1,1}^2 = \dots = g_{r,s_r}^2 = 1, (g_{i,j} g_{i,k})^{m_{i,(j,k)}} = 1 \rangle \\ &= G. \end{aligned}$$

Die zweite Spalte der Tabelle enthält die Bezeichnung des Graphen im **graph6**-Format. Das erste Zeichen gibt die Anzahl der Knoten an (@ = 1, A = 2, B = 3, ...). Jedes weitere Zeichen gibt sechs Einträge (0 oder 1) einer Adjazenzmatrix des Graphen an. Die 64 Zeichen

?@ABCDEFGHIJKLMN OPQRSTUVWXYZ[\]^\_`abcdefghijklmnopqrstuvwxyz{|}~

stehen dabei für die Bitfolgen 000000, 000001, ..., 111111 (ASCII-Code minus 63).

Beispiel: Wir bestimmen eine **graph6**-Darstellung eines Graphen mit fünf Ecken:



Wegen der fünf Ecken ist das erste Zeichen ein D. Aus dem zeilenweisen Auslesen der rechten oberen Ecke einer Adjazenzmatrix des Graphen ergeben sich die restlichen Zeichen einer **graph6**-Darstellung des Graphen.

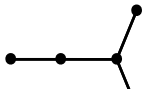
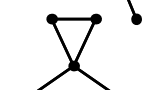

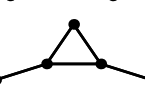

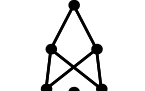
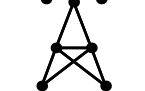
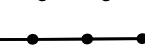



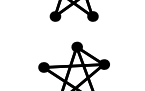
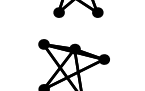



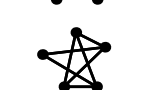
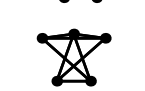




$$\begin{array}{c}
 & & & & 1 \\
 & & & & / \\
 4 & \text{---} & 3 & \text{---} & 5 \\
 & & & & \backslash \\
 & & & & 2
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{pmatrix}
 \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{pmatrix}
 \rightarrow 0001\ 001\ 11\ 0,$$

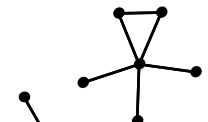
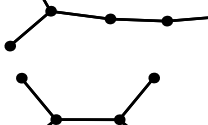
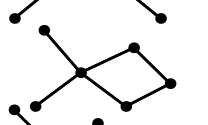

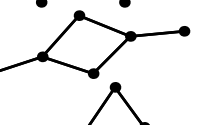

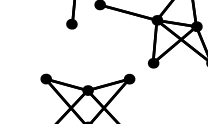
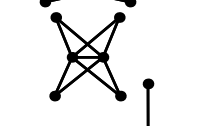
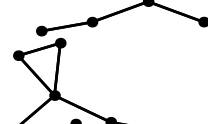


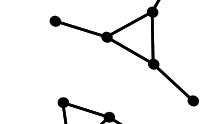
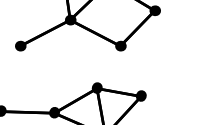

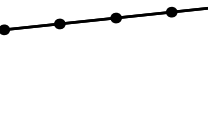

$$0001001110 \rightarrow (000100, 111000) \rightarrow (4, 56) \rightarrow (\text{ASCII } 63 + 4, \text{ASCII } 63 + 56) \rightarrow \text{DcW}.$$

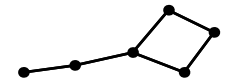


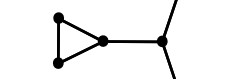
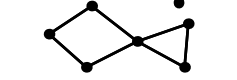
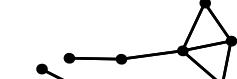











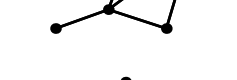

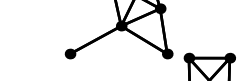
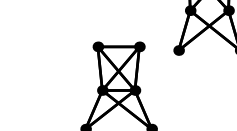
Damit ist **DcW** eine **graph6**-Darstellung des Graphen.

Die Liste der Graphen im **graph6**-Format wurde mit Hilfe des Programms **nauty** erstellt (siehe [Nauty2000]). Mit selbstentwickelter Software erhalten wir die Figuren in der linken Spalte. Die Figuren der Graphen **A\_**, **BW**, **CU**, **C]** und **C^** wurden von Hand modifiziert, da die vom Programm berechneten Figuren den Graphen nicht optimal darstellten.

	@	$\frac{1+x}{1}$
	A_	$\frac{1+3x}{1}$
	BW	$\frac{1+4x-x^2}{1-x}$
	Bw	$\frac{1+6x+x^2}{1}$
	CF	$\frac{1+5x-2x^2}{1-2x}$
	CU	$\frac{1+5x+x^2+x^3}{1-2x-x^2}$
	CV	$\frac{1+8x+10x^2-3x^4}{1-3x^2}$
	C]	$\frac{1+6x+x^2}{1-2x+x^2}$
	C^	$\frac{1+8x+x^2-2x^3}{1-x}$
	C~	$\frac{1+10x+5x^2}{1}$
	D?{	$\frac{1+6x-3x^2}{1-3x}$





















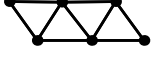
	DC <sub>w</sub>	$\frac{1 + 8x + 12x^2 - 6x^3 + 3x^4 - 2x^5}{1 - x - 11x^2 + x^3 + 2x^4}$
	DC{	$\frac{1 + 9x + 13x^2 - x^3 - 6x^4}{1 - x - 6x^2}$
	DE <sub>w</sub>	$\frac{1 + 10x + 26x^2 + 20x^3 + 13x^4 + 2x^5}{1 - 10x^2 - 6x^3 - 3x^4 + 2x^5}$
	DE <sub>k</sub>	$\frac{1 + 8x + 8x^2 + 4x^3 - 5x^4}{1 - 2x - 5x^2}$
	DE{	$\frac{1 + 10x + 14x^2 - 11x^4 + 2x^5}{1 - x - 5x^2 + x^3}$
	DF <sub>w</sub>	$\frac{1 + 6x - 9x^2 - 2x^3}{1 - 5x + 8x^2 - 4x^3}$
	DF{	$\frac{1 + 10x + 3x^2 - 6x^3}{1 - 2x}$
	DQ <sub>o</sub>	$\frac{1 + 6x + 4x^2 - 2x^3 - x^4}{1 - 3x - 5x^2 + 3x^3}$
	DQ <sub>w</sub>	$\frac{1 + 10x + 23x^2 + 4x^3 + 3x^4 - 6x^5 - 3x^6}{1 - 14x^2 - 2x^3 - 3x^4 + 6x^5}$
	DQ{	$\frac{1 + 8x + 3x^2}{1 - 3x}$
	DU <sub>w</sub>	$\frac{1 + 6x + x^2}{1 - 4x + x^2}$
	DU <sub>w</sub>	$\frac{1 + 11x + 29x^2 + 14x^3 - 9x^4 + 3x^5 + 19x^6 + 4x^7}{1 - 10x^2 + 5x^4 - 4x^5 - 4x^6 + 4x^7}$
	DU{	$\frac{1 + 10x + 8x^2 + 2x^3 - x^4}{1 - 2x - x^2}$
	DT <sub>w</sub>	$\frac{1 + 11x + 24x^2 + 6x^3 + 3x^4 - 11x^5 - 4x^6 + 2x^7}{1 - 10x^2 - 2x^3 + x^4 + 2x^5}$
	DT{	$\frac{1 + 12x + 23x^2 + 15x^3 - 16x^4 - 3x^5}{1 - 6x^2 - x^3}$
	DV{	$\frac{1 + 13x + 25x^2 + 10x^3 - 11x^4 - 3x^5 - 3x^6}{1 - 3x^2}$
	D] <sub>w</sub>	$\frac{1 + 10x + 8x^2 - 39x^3 - 59x^4 + 44x^5 + 58x^6 + 9x^7}{1 - 2x - 6x^2 + 13x^3 + 9x^4 - 24x^5 + 9x^7}$
	D]{	$\frac{1 + 11x + 7x^2 - 3x^3}{1 - 2x + x^2}$
	D^{\wedge}	$\frac{1 + 13x + 9x^2 - 5x^3 - 2x^4}{1 - x}$
	D^{\sim}	$\frac{1 + 15x + 15x^2 + x^3}{1}$
	E?B <sub>w</sub>	$\frac{1 + 7x - 4x^2}{1 - 4x}$
	E?b <sub>o</sub>	$\frac{1 + 9x + 14x^2 - 10x^3 + 5x^4 - 3x^5}{1 - 2x - 16x^2 + 2x^3 + 3x^4}$

	E?bw	$\frac{1 + 10x + 16x^2 - 2x^3 - 9x^4}{1 - 2x - 9x^2}$
	E?qo	$\frac{1 + 10x + 25x^2 + 2x^3 - 9x^4 + 6x^5 - x^6 - 2x^7}{1 - x - 24x^2 - 10x^3 + 21x^4 - 17x^5 + 6x^6}$
	E?ow	$\frac{1 + 6x - x^2 + 2x^3}{1 - 5x - 2x^2}$
	E?ro	$\frac{1 + 11x + 30x^2 + 18x^3 + 17x^4 + 3x^5}{1 - x - 18x^2 - 10x^3 - 7x^4 + 3x^5}$
	E?qw	$\frac{1 + 11x + 28x^2 + 14x^3 - 7x^4 - 25x^5 + 10x^6}{1 - x - 17x^2 - 13x^3 + 10x^4}$
	E?rw	$\frac{1 + 11x + 19x^2 + x^3 - 20x^4 + 4x^5}{1 - 2x - 9x^2 + 2x^3}$
	E?zO	$\frac{1 + 8x + 9x^2 + 2x^3}{1 - 4x - 7x^2 + 2x^3}$
	E?zo	$\frac{1 + 11x + 24x^2 - 14x^3 - 31x^4 - 33x^5 - 6x^6}{1 - 2x - 16x^2 + 14x^3 + 15x^4 + 12x^5 - 12x^6}$
	E?zW	$\frac{1 + 10x + 12x^2 + 8x^3 - 17x^4 + 2x^5}{1 - 3x - 7x^2 + x^3}$
	E?zw	$\frac{1 + 12x + 20x^2 + 2x^3 - 25x^4 + 6x^5}{1 - 2x - 7x^2 + 2x^3}$
	E?~o	$\frac{1 + 7x - 13x^2 - 3x^3}{1 - 7x + 15x^2 - 9x^3}$
	E?~w	$\frac{1 + 12x + 7x^2 - 12x^3}{1 - 3x}$
	ECR <sub>-</sub>	$\frac{1 + 8x + 12x^2 - 2x^3 - x^4 - 2x^5}{1 - 3x - 15x^2 - x^3 + 6x^4}$
	ECR <sub>o</sub>	$\frac{1 + 12x + 39x^2 + 34x^3 - x^4 - 8x^5 - 7x^6 - 6x^7}{1 - 22x^2 - 32x^3 - 7x^4 + 8x^5 + 12x^6}$
	ECR <sub>w</sub>	$\frac{1 + 10x + 15x^2 + 6x^3}{1 - 3x - 6x^2}$
	ECr <sub>-</sub>	$\frac{1 + 10x + 24x^2 + 16x^3 + 11x^4 + 2x^5}{1 - 2x - 16x^2 - 12x^3 - 5x^4 + 2x^5}$
	ECp <sub>o</sub>	$\frac{1 + 10x + 23x^2 - 2x^3 + 3x^4 + 14x^5 + 13x^6 + 2x^7}{1 - 2x - 21x^2 + 6x^3 + 3x^4 - 14x^5 - 7x^6 + 2x^7}$
	ECq <sub>g</sub>	$\frac{1 + 8x + 6x^2 + 8x^3 - 7x^4}{1 - 4x - 7x^2}$
	ECr <sub>o</sub>	$\frac{1 + 15x + 74x^2 + 159x^3 + 154x^4 + 49x^5 - 6x^6 + 53x^7 + 89x^8 + 52x^9 + 8x^{10}}{1 + 2x - 19x^2 - 66x^3 - 63x^4 - 20x^5 - 13x^6 - 34x^7 - 18x^8 + 6x^9 + 8x^{10}}$
	ECr <sub>g</sub>	$\frac{1 + 13x + 43x^2 + 45x^3 + 7x^4 - 27x^5 - 19x^6 - 13x^7 + 16x^8 - 2x^9}{1 - 19x^2 - 30x^3 - x^4 + 8x^5 + 11x^6 - 2x^7}$
	ECr <sub>w</sub>	$\frac{1 + 12x + 25x^2 + 20x^3 - x^4 - x^6}{1 - 2x - 8x^2 - 2x^3 - x^4}$
	ECZ?	$\frac{1 + 7x + 8x^2 - 4x^3 + 3x^4 + x^5}{1 - 4x - 12x^2 + 8x^3 - 5x^4}$










	ECZ <sub>-</sub>	$\frac{1 + 12x + 43x^2 + 50x^3 + 23x^4 + 16x^5 + 13x^6 + 2x^7}{1 - 25x^2 - 38x^3 - x^4 - 12x^5 - 7x^6 + 2x^7}$
	ECZO	$\frac{1 + 12x + 40x^2 + 28x^3 - 6x^4 + 4x^5 - 12x^7 - 3x^8}{1 - 29x^2 - 28x^3 + 15x^4 - 8x^5 - 3x^6 + 12x^7}$
	ECZG	$\frac{1 + 12x + 40x^2 + 36x^3 + 2x^4 - 12x^5 - 16x^6 - 4x^7 + 5x^8}{1 - 25x^2 - 34x^3 + 7x^4 - 12x^5 + 33x^6 - 10x^7}$
	ECYW	$\frac{1 + 11x + 28x^2 - 2x^3 + 9x^4 - 9x^5 - 6x^6}{1 - x - 25x^2 - x^3 - 6x^4 + 12x^5}$
	ECZo	$\frac{1 + 12x + 35x^2 + 10x^3 - 9x^4 - 64x^5 - 43x^6 - 6x^7}{1 - x - 23x^2 - 5x^4 + 47x^5 + 11x^6 - 6x^7}$
	ECZg	$\frac{1 + 12x + 31x^2 + 6x^3 - x^4 - 12x^5 - 7x^6 + 2x^7}{1 - x - 22x^2 - 2x^3 - 11x^4 + 23x^5 - 4x^6}$
	ECZW	$\frac{1 + 14x + 59x^2 + 92x^3 + 59x^4 - 18x^5 - 15x^6}{1 + x - 22x^2 - 48x^3 - 27x^4 + 15x^5}$
	ECZw	$\frac{1 + 13x + 36x^2 - 6x^3 - 67x^4 - 15x^5 + 6x^6}{1 - x - 17x^2 + 5x^3 + 30x^4 - 6x^5}$
	ECfo	$\frac{1 + 12x + 30x^2 + 4x^3 + 9x^4 - 20x^5 - 8x^6 + 4x^7}{1 - x - 19x^2 - 3x^3 + 2x^4 + 4x^5}$
	ECfw	$\frac{1 + 13x + 31x^2 + 25x^3 - 32x^4 - 6x^5}{1 - x - 12x^2 - 2x^3}$
	ECxo	$\frac{1 + 9x + 10x^2 - 24x^3 + 19x^4 + 15x^5 + 2x^6}{1 - 4x - 12x^2 + 32x^3 - 29x^4 + 4x^6}$
	ECzo	$\frac{1 + 13x + 37x^2 - 45x^3 - 253x^4 - 113x^5 + 323x^6 + 197x^7 - 108x^8 + 172x^9 + 320x^{10} + 64x^{11}}{1 - x - 24x^2 + 8x^3 + 125x^4 - 21x^5 - 198x^6 + 90x^7 + 84x^8 - 216x^9 - 48x^{10} + 128x^{11}}$
	ECzg	$\frac{1 + 13x + 32x^2 + 6x^3 + x^4 - 11x^5 - 18x^6 + 8x^7}{1 - x - 17x^2 - 5x^3 + 2x^4 + 8x^5}$
	ECzW	$\frac{1 + 15x + 62x^2 + 98x^3 + 58x^4 - 34x^5 - 42x^6 - 6x^7 + 9x^8 - x^9}{1 + x - 17x^2 - 39x^3 - 21x^4 + 15x^5 + 5x^6 - x^7}$
	ECxw	$\frac{1 + 13x + 39x^2 + 23x^3 - 17x^4 + 11x^5 + 73x^6 + 17x^7}{1 - x - 17x^2 + x^3 - x^4 - 15x^5 - 15x^6 + 15x^7}$
	ECzw	$\frac{1 + 14x + 36x^2 - 10x^3 - 75x^4 - 26x^5 + 18x^6 + 14x^7 - 4x^8}{1 - x - 13x^2 + 3x^3 + 24x^4 - 2x^5 - 4x^6}$
	ECvo	$\frac{1 + 14x + 48x^2 + 8x^3 - 193x^4 - 254x^5 + 109x^6 + 340x^7 + 222x^8 - 50x^9 - 99x^{10} - 18x^{11}}{1 - 22x^2 - 20x^3 + 87x^4 + 102x^5 - 89x^6 - 162x^7 - 22x^8 + 94x^9 + 17x^{10} - 18x^{11}}$
	ECuw	$\frac{1 + 12x + 21x^2 + 21x^3 - 22x^4 - x^5}{1 - 2x - 12x^2 - x^3}$
	ECvw	$\frac{1 + 14x + 35x^2 + 32x^3 - 20x^4 - 26x^5 - 7x^6 + 3x^8}{1 - x - 10x^2 - 3x^3 + 3x^4}$
	EC <sup>~</sup> o	$\frac{1 + 10x - 4x^2 - 92x^3 - 87x^4 + 206x^5 + 218x^6 + 36x^7}{1 - 5x - 5x^2 + 47x^3 - 4x^4 - 130x^5 + 24x^6 + 72x^7}$
	EC <sup>~</sup> w	$\frac{1 + 15x + 37x^2 + 23x^3 - 18x^4 - 14x^5 - 12x^6}{1 - x - 6x^2}$

	$\frac{1 + 10x + 16x^2 - 22x^3 - 13x^4 - 20x^5 - 4x^6}{1 - 3x - 15x^2 + 19x^3 + 2x^4 + 12x^5 - 8x^6}$
	$\frac{1 + 12x + 25x^2 - 29x^3 - 125x^4 - 69x^5 + 187x^6 + 113x^7 - 40x^8 - 11x^9}{1 - 2x - 17x^2 + 7x^3 + 63x^4 + x^5 - 83x^6 + 5x^7 + 20x^8 - 11x^9}$
	$\frac{1 + 13x + 27x^2 + 23x^3}{1 - 2x - 7x^2}$
	$\frac{1 + 6x + x^2}{1 - 6x + x^2}$
	$\frac{1 + 9x + 15x^2 + 13x^3 + 2x^4}{1 - 4x - 7x^2 - 4x^3 + 4x^4}$
	$\frac{1 + 13x + 48x^2 + 55x^3 + 4x^4 - 31x^5 + 44x^6 + 45x^7 - x^8 - 2x^9}{1 - 23x^2 - 32x^3 + 17x^4 + 14x^5 - 33x^6 - 12x^7 + 6x^8 - 2x^9}$
	$\frac{1 + 12x + 39x^2 + 40x^3 + 59x^4 + 36x^5 + 5x^6}{1 - x - 23x^2 - 6x^3 - 35x^4 - 9x^5 + 5x^6}$
	$\frac{1 + 10x + 14x^2 + 2x^3 - 11x^4}{1 - 3x - 13x^2 + 5x^3 + 2x^4}$
	$\frac{1 + 15x + 74x^2 + 151x^3 + 138x^4 + 55x^5 + 26x^6 + 65x^7 + 73x^8 + 42x^9 + 8x^{10}}{1 + 2x - 23x^2 - 72x^3 - 65x^4 - 10x^5 + 11x^6 - 28x^7 - 36x^8 - 4x^9 + 8x^{10}}$
	$\frac{1 + 15x + 65x^2 + 92x^3 + 2x^4 - 119x^5 - 142x^6 - 64x^7 + 45x^8 - 7x^9 - 115x^{10} - 76x^{11} - 16x^{12} - x^{13}}{1 + x - 23x^2 - 40x^3 + 7x^4 + 43x^5 + 58x^6 + 2x^7 - 41x^8 + 21x^9 + 53x^{10} + 6x^{11} - 7x^{12} - x^{13}}$
	$\frac{1 + 15x + 62x^2 + 90x^3 + 54x^4 - 22x^5 - 26x^6 - 14x^7 - 3x^8 + 3x^9}{1 + x - 21x^2 - 41x^3 - 15x^4 + 11x^5 + 5x^6 + 5x^7 - 2x^8}$
	$\frac{1 + 11x + 21x^2 - 18x^3 - 59x^4 - 33x^5 + 9x^6 + 4x^7}{1 - 3x - 13x^2 + 14x^3 + 21x^4 - 3x^5 - 5x^6 + 4x^7}$
	$\frac{1 + 11x + 7x^2 - 22x^3 - 25x^4 + 7x^5 + 5x^6}{1 - 4x - 3x^2 + 11x^3 + 2x^4 - 3x^5}$
	$\frac{1 + 9x + 9x^2 + 11x^3 + 2x^4}{1 - 5x + x^2 - 3x^3 + 6x^4}$
	$\frac{1 + 13x + 36x^2 - 23x^3 - 132x^4 - 107x^5 + 68x^6 + 147x^7 + 107x^8 + 18x^9}{1 - x - 24x^2 + 5x^3 + 52x^4 + 63x^5 - 44x^6 - 93x^7 - 9x^8 + 18x^9}$
	$\frac{1 + 14x + 40x^2 - 75x^3 - 426x^4 - 214x^5 + 1108x^6 + 1306x^7 - 919x^8 - 1530x^9 + 808x^{10} + 849x^{11} - 912x^{12} - 606x^{13} - 84x^{14}}{1 - x - 25x^2 + 12x^3 + 176x^4 - 10x^5 - 542x^6 - 84x^7 + 909x^8 + 27x^9 - 1009x^{10} + 312x^{11} + 738x^{12} - 336x^{13} - 168x^{14}}$
	$\frac{1 + 14x + 39x^2 - 17x^3 - 147x^4 - 163x^5 + 39x^6 + 229x^7 + 230x^8 + 33x^9 - 2x^{10}}{1 - x - 19x^2 + 3x^3 + 52x^4 + 40x^5 - 41x^6 - 77x^7 - 23x^8 + 35x^9 - 2x^{10}}$
	$\frac{1 + 16x + 56x^2 + 32x^3 - 104x^4 - 166x^5 - 112x^6 - 24x^7 + 15x^8 - 2x^9}{1 - 13x^2 - 6x^3 + 27x^4 + 20x^5 + 9x^6 - 6x^7}$



	EEvo	$\frac{1 + 15x + 53x^2 + 67x^3 + 47x^4 - 7x^5 - 21x^6 + 5x^7}{1 - 15x^2 - 16x^3 - 9x^4 + 8x^5 - x^6}$
	EEuw	$\frac{1 + 15x + 49x^2 + 59x^3 + 14x^4 - 82x^5 - x^6 + 5x^7 + x^8 + 3x^9}{1 - 15x^2 - 19x^3 + 4x^4 + 9x^5}$
	EEvw	$\frac{1 + 15x + 34x^2 + 34x^3 - 31x^4 - 29x^5 + 4x^6 + 4x^7}{1 - x - 9x^2 - x^3 + 2x^4}$
	EEno	$\frac{1 + 16x + 69x^2 + 61x^3 - 263x^4 - 674x^5 - 222x^6 + 896x^7 + 1149x^8 + 326x^9 - 453x^{10} - 589x^{11} - 207x^{12} + 12x^{13} + 6x^{14}}{1 + x - 21x^2 - 35x^3 + 85x^4 + 190x^5 - 50x^6 - 314x^7 - 167x^8 + 109x^9 + 193x^{10} + 77x^{11} - 63x^{12} - 28x^{13} + 6x^{14}}$
	EElw	$\frac{1 + 9x - 13x^2 - 7x^3 - 8x^4 + 2x^5}{1 - 6x + 7x^2 + 2x^3}$
	EEnw	$\frac{1 + 14x + 28x^2 + 28x^3 - x^4 + 10x^5}{1 - 2x - 5x^2}$
	EE~w	$\frac{1 + 16x + 38x^2 + 26x^3 - 25x^4 - 10x^5 - 18x^6 + 4x^7}{1 - x - 5x^2 + x^3}$
	EFz-	$\frac{1 + 9x + 2x^2}{1 - 6x + 8x^2}$
	EFzo	$\frac{1 + 12x + 4x^2 - 142x^3 - 213x^4 + 334x^5 + 604x^6 + 120x^7}{1 - 4x - 13x^2 + 60x^3 + 30x^4 - 224x^5 + 240x^7}$
	EFzW	$\frac{1 + 11x - 6x^2 - 82x^3 - 68x^4 + 244x^5 + 70x^6 - 46x^7 + 3x^8 + x^9}{1 - 5x - 2x^2 + 38x^3 - 24x^4 - 76x^5 + 66x^6 + 10x^7 - 9x^8 + x^9}$
	EFzw	$\frac{1 + 12x - 7x^2 - 22x^3 + 8x^4}{1 - 5x + 8x^2 - 4x^3}$
	EF~w	$\frac{1 + 16x + 19x^2 - 8x^3 - 12x^4}{1 - 2x}$
	EQj-	$\frac{1 + 13x + 43x^2 + 29x^3 + 3x^4 + 5x^5 - 15x^6 - 17x^7 + 2x^9}{1 - 27x^2 - 22x^3 + 11x^4 - 20x^5 + 19x^6 + 10x^7 - 4x^8}$
	EQjO	$\frac{1 + 8x + 8x^2 + 12x^3 + 3x^4}{1 - 5x - 3x^2 - 9x^3}$
	EQjo	$\frac{1 + 14x + 49x^2 + 22x^3 - 19x^4 - 90x^5 - 53x^6 + 6x^7 + 6x^8}{1 - 26x^2 - 10x^3 + 5x^4 + 48x^5 + 12x^6 - 6x^7}$
	EQjg	$\frac{1 + 14x + 44x^2 + 33x^3 + 17x^4 - 20x^5 - 22x^6 - 3x^7}{1 - 25x^2 - 11x^3 - 30x^4 + 31x^5 + 6x^6}$
	EQjw	$\frac{1 + 15x + 51x^2 + 12x^3 - 123x^4 - 75x^5 - 9x^6}{1 - 21x^2 - 3x^3 + 54x^4 + 9x^5}$
	EQzO	$\frac{1 + 8x + x^2 + 6x^3 + 4x^4}{1 - 6x + 5x^2 - 8x^3 + 4x^4}$
	EQzo	$\frac{1 + 14x + 40x^2 - 68x^3 - 283x^4 + 42x^5 + 633x^6 + 15x^7 - 604x^8 + 253x^9 + 495x^{10} - 447x^{11} - 334x^{12} + 79x^{13} + 36x^{14}}{1 - x - 26x^2 + 21x^3 + 133x^4 - 100x^5 - 257x^6 + 256x^7 + 162x^8 - 423x^9 + 103x^{10} + 351x^{11} - 168x^{12} - 72x^{13} + 36x^{14}}$
	EQzg	$\frac{1 + 15x + 48x^2 + 37x^3 + 28x^4 - 27x^5 - 44x^6 + 15x^7 - 9x^8}{1 - 20x^2 - 10x^3 - 19x^4 + 28x^5 - 6x^6 + 6x^7}$
	EQzW	$\frac{1 + 11x + 11x^2 + 8x^3 - 11x^4 - 7x^5 + 3x^6}{1 - 4x - 3x^2 - 3x^3 + 6x^4 - x^5}$

	EQyw	$\frac{1 + 14x + 39x^2 + 2x^3 - 51x^4 - 17x^5 + 20x^6 - 118x^7 - 130x^8 - 17x^9 + x^{10}}{1 - x - 21x^2 + 16x^3 - x^4 + 2x^5 - 9x^6 + 65x^7 + 19x^8 - 24x^9 + x^{10}}$
	EQzw	$\frac{1 + 16x + 54x^2 + 11x^3 - 124x^4 - 119x^5 - 90x^6 + x^7 + 43x^8 + 3x^9 + 12x^{10}}{1 - 17x^2 - 2x^3 + 38x^4 + 12x^5 + 23x^6 - 16x^7 + 3x^8 - 6x^9}$
	EQ~o	$\frac{1 + 7x - 32x^2 + 47x^4 + 9x^5}{1 - 9x + 28x^2 - 32x^3 + 3x^4 + 9x^5}$
	EQ~w	$\frac{1 + 13x + 3x^2 - 9x^3}{1 - 4x + 3x^2}$
	EUZ	$\frac{1 + 12x + 31x^2 - 16x^3 - 88x^4 - 42x^5 + 132x^6 + 110x^7 - 65x^8 - 138x^9 - 59x^{10} - 6x^{11}}{1 - 2x - 20x^2 + 16x^3 + 44x^4 - 4x^5 - 82x^6 - 4x^7 + 59x^8 + 38x^9 - 18x^{10} - 12x^{11}}$
	EUZO	$\frac{1 + 12x + 29x^2 - 4x^3 + 23x^4 + 56x^5 + 11x^6}{1 - 2x - 21x^2 + 24x^3 - 21x^4 - 22x^5 + 9x^6}$
	EUZo	$\frac{1 + 13x + 32x^2 - 13x^3 - 70x^4 - 51x^5 - 36x^6 - 39x^7 + x^8 + 2x^9}{1 - 2x - 17x^2 + 18x^3 + 16x^4 - 2x^5 + 9x^6 + 4x^7 - 9x^8 + 2x^9}$
	EUZw	$\frac{1 + 10x - 12x^2 - 18x^3 + 3x^4}{1 - 6x + 9x^2 - 2x^3}$
	EUxo	$\frac{1 + 7x - 14x^2 + 5x^3 + 20x^4 + 24x^5 + 5x^6}{1 - 8x + 20x^2 - 23x^3 + 11x^4 - 11x^5 + 10x^6}$
	EUzo	$\frac{1 + 11x - x^2 - 78x^3 - 43x^4 + 211x^5 + 51x^6 - 269x^7 - 86x^8 + 186x^9 + 126x^{10} + 19x^{11}}{1 - 5x - 3x^2 + 38x^3 - 21x^4 - 85x^5 + 89x^6 + 63x^7 - 84x^8 - 46x^9 + 34x^{10} + 19x^{11}}$
	EUzW	$\frac{1 + 15x + 43x^2 - 14x^3 - 91x^4 - 80x^5 - 31x^6 + 14x^7 - 2x^8 + x^9}{1 - x - 16x^2 + 11x^3 + 22x^4 + x^5 - 3x^7 + x^8}$
	EUzw	$\frac{1 + 17x + 58x^2 - 2x^3 - 231x^4 - 190x^5 + 139x^6 + 48x^7 - 222x^8 - 71x^9 + 63x^{10} - 6x^{11} - 16x^{12} - 4x^{13}}{1 - 14x^2 + 46x^4 - 5x^5 - 34x^6 + 30x^7 + 21x^8 - 25x^9 + 8x^{11} - 4x^{12}}$
	EU~w	$\frac{1 + 15x + 10x^2 - 12x^3 - 11x^4 + x^5}{1 - 3x + x^2 + x^3}$
	ETzo	$\frac{1 + 16x + 55x^2 - 8x^3 - 319x^4 - 359x^5 + 445x^6 + 687x^7 - 307x^8 - 20x^9 + 1181x^{10} + 320x^{11} - 1113x^{12} - 1037x^{13} - 473x^{14} - 191x^{15} - 30x^{16}}{1 - 21x^2 - 5x^3 + 102x^4 + 39x^5 - 200x^6 - 19x^7 + 216x^8 - 208x^9 - 300x^{10} + 299x^{11} + 327x^{12} - 27x^{13} - 63x^{14} - 39x^{15} - 30x^{16}}$
	ETzg	$\frac{1 + 13x + 18x^2 + 36x^3 + 3x^4 - x^5 - 6x^6}{1 - 3x - 3x^2 - 7x^3}$
	ETzw	$\frac{1 + 17x + 54x^2 + 25x^3 - 82x^4 - 102x^5 - 29x^6 + 45x^7 + 13x^8 - 11x^9 + 3x^{10} + 2x^{11}}{1 - 12x^2 - 2x^3 + 21x^4 + 6x^5 - 2x^6 - 4x^7}$
	ETno	$\frac{1 + 16x + 48x^2 + 45x^3 + 19x^4 - 48x^5 - 38x^6 + 21x^7 + 2x^8 - 2x^9}{1 - 15x^2 - 9x^3 - 2x^4 + 9x^5}$
	ETnw	$\frac{1 + 17x + 45x^2 + 66x^3 - 25x^4 - 35x^5 - 5x^6}{1 - 10x^2 - 5x^3}$

	ET~w	$\frac{1 + 18x + 52x^2 + 65x^3 - 17x^4 + 6x^5 - 52x^6 - 9x^7}{1 - 6x^2 - x^3}$	
	EV~w	$\frac{1 + 19x + 52x^2 + 43x^3 - 14x^4 - 11x^5 - 20x^6 - 3x^7 - 3x^8}{1 - 3x^2}$	
	E]zo	$\frac{1 + 10x - 25x^2 - 24x^3 + 27x^4 + 50x^5 - 11x^6 + 4x^7}{1 - 7x + 16x^2 - 10x^3 - 7x^4 + 5x^5 + 2x^6}$	
	E]zg	$\frac{1 + 15x + 26x^2 - 62x^3 - 292x^4 - 7x^5 + 399x^6 + 356x^7 + 121x^8 + 18x^9 + x^{10}}{1 - 2x - 13x^2 + 23x^3 + 53x^4 - 70x^5 - 73x^6 + 20x^7 + 47x^8 + 13x^9 + x^{10}}$	
	E]yw	$\frac{1 + 14x + 19x^2 - 70x^3 - 204x^4 + 28x^5 + 63x^6 - 8x^7 - 3x^8}{1 - 3x - 9x^2 + 30x^3 + 12x^4 - 66x^5 + 19x^6 + 9x^7 - 3x^8}$	s. u.
		$1 + 16x + 27x^2 - 55x^3 - 155x^4 + 45x^5 + 161x^6 + 51x^7 - 18x^8 - 9x^9$	
	E]zw	$\frac{1 - 2x - 6x^2 + 13x^3 + 9x^4 - 24x^5 + 9x^7}{1 - 2x - 6x^2 + 13x^3 + 9x^4 - 24x^5 + 9x^7}$	
	E]~o	$\frac{1 + 15x + 23x^2 + x^3}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$	
	E]~w	$\frac{1 + 17x + 23x^2 - 5x^3 - 4x^4}{1 - 2x + x^2}$	
	E^~w	$\frac{1 + 19x + 27x^2 - 5x^3 - 8x^4 - 2x^5}{1 - x}$	
	E~~w	$\frac{1 + 21x + 35x^2 + 7x^3}{1}$	

Mit Hilfe des Knuth-Bendix-Algorithmus berechnet KBMAG zu einer gegebenen Präsentation eine ShortLex-automatische Struktur, bestehend aus einem Wort-Akzeptor und einem allgemeinen Multiplizierer (siehe [ECHLPT1992]). Anschließend werden gewisse Axiome überprüft. Werden alle Axiome erfüllt, so ist die gefundene ShortLex-automatische Struktur korrekt und damit auch die aus dem Wort-Akzeptor berechnete Wachstumsfunktion.

Bis auf den Graphen E]yw sind alle zugehörigen ShortLex-automatischen Strukturen berechnet und verifiziert worden. Die Wachstumsfunktion des Graphen E]yw ist im Gegensatz zu allen anderen Wachstumsfunktionen nur eine Vermutung.

Bei den Graphen @, A-, Bw, C~, D~{ und E~~w handelt es sich um die Gruppen  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$  mit  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Da diese Gruppen endlich sind, ist die zugehörige 2-Wachstumsfunktion ein Polynom, dessen Koeffizientensumme die Gruppenordnung liefert.

## 2.5 2-Wachstumsfunktion von $L_k$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der 2-Wachstumsfunktion der rechtwinkligen Coxetergruppe  $L_k$ .

$$L_k = \langle g_1, \dots, g_k \mid g_i^2 = 1, g_i g_{i+1} = g_{i+1} g_i, 1 \leq i < k \rangle.$$

Wir geben die 2-Wachstumsfunktion von  $L_k$  als Quotient zweier Determinanten von Bandmatrizen an. Die Determinanten dieser Bandmatrizen bestimmen wir in Kapitel 3 in den Abschnitten 3.6 und 3.7. Wir betrachten ein Zählerpolynom der 2-Wachstumsfunktion genauer und zeigen, daß die Koeffizienten von Zählern der 2-Wachstumsfunktionen der verschiedenen  $L_k$  mit den Catalan-Zahlen in Verbindung stehen.

Für  $k \geq 4$  operiert  $L_k$  als Spiegelungsgruppe auf der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}^2$ . Ein  $k$ -Eck mit  $k - 1$  rechten Winkeln und einem  $0^\circ$ -Winkel ist ein Fundamentalbereich von  $L_k$ . Siehe auch die Illustration zu  $L_4$  auf Seite 41.

Damit die Wachstumsmatrix die Form einer Bandmatrix bekommt, ändern wir die Reihenfolge der Typen:  $g_1, h_1, g_2, h_2, \dots, h_{k-1}, g_k$ . Die Einträge  $a_{i,j}$  der Wachstumsmatrix  $A \in M_{2k-1}(\mathbb{Z})$  der 2-Wachstumsfunktion von  $L_k$  lauten

$$a_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{für } 2\lfloor \frac{j}{2} \rfloor - 2 \leq i \leq 2\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor + 4, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dabei durchläuft  $i$  die Zeilen 1 bis  $2k - 1$  und  $j$  die Spalten 1 bis  $2k - 1$ . Alle Komponenten des zugehörigen Typenvektors  $v \in \mathbb{Z}^{2k-1}$  sind 1.

Beispiel:  $k = 3$ . Wachstumsmatrix und Typenvektor lauten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Z}), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^5.$$

Beispiel:  $k = 5$ . Wachstumsmatrix und Typenvektor lauten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_9(\mathbb{Z}), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^9.$$

Mit Hilfe der Formel

$$f_{A,v}(x) = \frac{\det(1_{2k-1} + (v - A)x)}{\det(1_{2k-1} - Ax)}$$

aus Satz 1.2.1 können wir die 2-Wachstumsfunktion von  $L_k$  berechnen.  $v$  steht dabei für die Matrix  $(v \ \dots \ v)$ , deren  $2k - 1$  Spalten jeweils mit dem Vektor  $v$  übereinstimmen.

Beispiel:  $k = 3$ .

$$f_{A,v}(x) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1+x & x & x & 0 & 0 \\ x & 1+x & x & x & x \\ x & x & 1+x & x & x \\ x & x & x & 1+x & x \\ 0 & 0 & x & x & 1+x \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x & -x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x & -x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{1 + 5x + 3x^2 - x^3}{1 - x^2}.$$

Die folgende Liste enthält die 2-Wachstumsfunktionen der ersten  $L_k$ . In den meisten Brüchen kann noch gekürzt werden, Satz 1.2.1 liefert die Wachstumsfunktionen also nicht immer in gekürzter Form.

$$\begin{aligned} f_{L_1}(x) &= \frac{1+x}{1} \\ f_{L_2}(x) &= \frac{1+3x}{1} \\ f_{L_3}(x) &= \frac{1+5x+3x^2-x^3}{1-x^2} \\ f_{L_4}(x) &= \frac{1+7x+10x^2-2x^3+x^4-x^5}{1-6x^2+x^4} \\ f_{L_5}(x) &= \frac{1+9x+21x^2+5x^3-5x^4+3x^5-x^6-x^7}{1-15x^2-8x^3+11x^4-8x^5+3x^6} \\ f_{L_6}(x) &= \frac{1+11x+36x^2+28x^3-14x^4+6x^5-4x^6+4x^7-3x^8-x^9}{1-28x^2-40x^3+26x^4-16x^5+12x^6-8x^7+5x^8} \\ f_{L_7}(x) &= \frac{1+13x+55x^2+75x^3-6x^4-14x^5+14x^6-10x^7+5x^8+x^9-5x^{10}-x^{11}}{1-45x^2-112x^3+10x^4+32x^5-26x^6+16x^7-11x^8+7x^{10}} \end{aligned}$$

**Definition:**

$$\begin{aligned} P_k &:= \det(1_{2k-1} + vx - Ax) = \det(1_{2k-1} + (v - A)x), \\ Q_k &:= \det(1_{2k-1} - Ax). \end{aligned}$$

Dann ist  $P_k$  ein Zähler und  $Q_k$  ein Nenner von  $f_{L_k, \Sigma_{L_k}^2}(x)$ ,

$$f_{L_k, \Sigma_{L_k}^2}(x) = \frac{P_k}{Q_k}.$$

Im Rest dieses Abschnitts betrachten wir die Koeffizienten der Zählerpolynome  $P_k$  näher.

Es seien  $b_{k,j}$  die Koeffizienten der Zählerpolynome, also  $P_k = \sum_{j=0}^{\infty} b_{k,j}x^j$ . Zum Beispiel ist  $b_{8,3} = 154$ .

k	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$	$x^8$	$x^9$	$x^{10}$	$x^{11}$	$x^{12}$	$x^{13}$
1	1	1												
2	1	3												
3	1	5	3	-1										
4	1	7	10	-2	1	-1								
5	1	9	21	5	-5	3	-1	-1						
6	1	11	36	28	-14	6	-4	4	-3	-1				
7	1	13	55	75	-6	-14	14	-10	5	1	-5	-1		
8	1	15	78	154	55	-63	36	-20	15	-15	14	-6	-7	-1
9	1	17	105	273	221	-99	-11	45	-45	35	-21	3	15	-17
10	1	19	136	440	560	0	-208	176	-110	70	-56	56	-56	40
11	1	21	171	663	1156	468	-532	156	78	-154	154	-126	84	-28
12	1	23	210	950	2109	1683	-680	-440	690	-546	364	-252	210	-210

Die Analyse der Tabelle führt uns zu folgenden Vermutungen für  $k \geq 2$  (für die erste Gleichung) bzw.  $k \geq 3$  (für die zweite Gleichung), ...,  $k \geq j + 1$  (für die  $j$ -te Gleichung):

$$\begin{aligned}
b_{k+1,1} &= b_{k,1} + 2b_{k-1,0}, \\
b_{k+1,2} &= b_{k,2} + 2b_{k-1,1} + b_{k-2,0}, \\
b_{k+1,3} &= b_{k,3} + 2b_{k-1,2} + b_{k-2,1} - 2b_{k-3,0}, \\
b_{k+1,4} &= b_{k,4} + 2b_{k-1,3} + b_{k-2,2} - 2b_{k-3,1} - 2b_{k-4,0}, \\
b_{k+1,5} &= b_{k,5} + 2b_{k-1,4} + b_{k-2,3} - 2b_{k-3,2} - 2b_{k-4,1} + 4b_{k-5,0}, \\
b_{k+1,6} &= b_{k,6} + 2b_{k-1,5} + b_{k-2,4} - 2b_{k-3,3} - 2b_{k-4,2} + 4b_{k-5,1} + 5b_{k-6,0}, \\
b_{k+1,7} &= b_{k,7} + 2b_{k-1,6} + b_{k-2,5} - 2b_{k-3,4} - 2b_{k-4,3} + 4b_{k-5,2} + 5b_{k-6,1} - 10b_{k-7,0}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned}
-440 &= b_{11+1,7} \\
&= b_{11,7} + 2 \cdot b_{10,6} + b_{9,5} - 2 \cdot b_{8,4} - 2 \cdot b_{7,3} + 4 \cdot b_{6,2} + 5 \cdot b_{5,1} - 10 \cdot b_{4,0} \\
&= 156 + 2 \cdot (-208) + (-99) - 2 \cdot 55 - 2 \cdot 75 + 4 \cdot 36 + 5 \cdot 9 - 10 \cdot 1.
\end{aligned}$$

Allgemeiner vermuten wir nun, daß es Faktoren  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$  gibt, so daß

$$b_{k+1,j} = \sum_{i=0}^j \lambda_i b_{k-i,j-i} \quad \text{für } k \geq j + 1. \quad (2.5.3)$$

Wir beweisen die Vermutung in Satz 2.5.1. Die Analyse der Zähler von  $L_k$  für  $k \leq 18$  führt zu folgenden Werten für die  $\lambda_j$ :

$j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\lambda_j$	1	2	1	-2	-2	4	5	-10	-14	28	42	-84	-132	264	429	-858	-1430

Es fallen die Catalan-Zahlen 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429 und 1430 ins Auge. Wir definieren daher

$$\lambda_{2j} := \frac{-(-1)^j}{j+1} \binom{2j}{j} \quad \text{und} \quad \lambda_{2j+1} := \frac{2(-1)^j}{j+1} \binom{2j}{j},$$

als Ausnahmewert definieren wir  $\lambda_0 := 1$  anstatt  $-1 = \frac{-(-1)^0}{0+1} \binom{0}{0}$ .

Diese Vermutung erklärt aber nur den linken Teil der Zählerpolynome. Die erneute Analyse der Tabelle mit den  $b_{k,j}$  führt uns zu folgenden Vermutungen für die mittleren Koeffizienten:

$$\begin{aligned} b_{2k+1, 2k+1} &= \frac{(-1)^k}{2} \binom{2k}{k}, \\ b_{2k+2, 2k+2} &= -(-1)^k \binom{2k}{k-1}, \\ b_{2k+2, 2k+1} &= (-1)^k \binom{2k}{k}, \\ b_{2k+3, 2k+2} &= (-1)^k \left(2 + \frac{1}{k+1}\right) \binom{2k}{k}. \end{aligned}$$

**Beispiel:**  $k = 3$ .

$$\begin{aligned} b_{7,7} &= -10 = \frac{(-1)^3}{2} \cdot \binom{6}{3}, \\ b_{8,8} &= 15 = -(-1)^3 \binom{6}{2}, \\ b_{8,7} &= -20 = (-1)^3 \binom{6}{3}, \\ b_{9,8} &= -45 = (-1)^3 \left(2 + \frac{1}{3+1}\right) \binom{6}{3}. \end{aligned}$$

Für die rechte Hälfte der Zählerpolynome formulieren wir eine ähnliche Vermutung:

$$b_{k+j+1, 2k+j-1} = \sum_{i=0}^j \lambda_i b_{k+j-i, 2k-3+j-i} \quad \text{für } k \geq j+1.$$

**Beispiel:**  $k = 5$  und  $j = 3$ .

$$b_{9,12} = b_{5+3+1, 10+3-1} = 15 = 1 \cdot (14) + 2 \cdot (1) + 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1).$$

Mit Hilfe von Satz 3.6.2, der Berechnung des Zählerpolynoms  $P_k$  in Kapitel 3, können wir die Richtigkeit der Vermutung (2.5.3) beweisen.

**Satz 2.5.1** *Es sei  $P_k = \det(1_{2k-1} + (v - A)x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{k,j} x^j$  das Zählerpolynom der am Anfang dieses Abschnitts definierten 2-Wachstumsfunktion  $f_{A,v}(x)$  der Coxetergruppe  $L_k$ . Dann gilt*

$$b_{k+1, j} = \sum_{i=0}^j \lambda_i b_{k-i, j-i}$$

für  $k \geq j+1$ , wobei  $\lambda_0 := 1$ ,

$$\lambda_{2j} := \frac{-(-1)^j}{j+1} \binom{2j}{j} \quad \text{und} \quad \lambda_{2j+1} := \frac{2(-1)^j}{j+1} \binom{2j}{j}.$$

Der Beweis dieses Satzes besteht aus mehreren Schritten. Wir zeigen zuerst in Lemma 2.5.2, daß die  $\lambda_j$  Koeffizienten einer Taylorreihenentwicklung einer analytischen Funktion sind. Im Lemma 2.5.3 zeigen wir, daß aus einer Formel mit Matrizenprodukten die Gleichung

$$b_{k+1, j} = b_{k, j} + 2b_{k, j-1} + b_{k, j-2} - 4b_{k-1, j-2}$$

folgt. Wir schreiben diese Formel in der Form

$$1 = y + 2xy + x^2y - 4x^2y^2.$$

In Lemma 2.5.4, Lemma 2.5.5 und Corollar 2.5.6 zeigen wir, daß es ein  $G \in \mathbb{Z}[x][[xy]]$  gibt, so daß

$$G \cdot (-1 + y + 2xy + x^2y - 4x^2y^2) = 1 - y \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j x^j y^j.$$

Daraus leiten wir abschließend folgende Gleichung her:

$$b_{k+1,j} = \sum_{i=0}^j \lambda_i b_{k,j-i} \quad \text{für } k \geq j + 1.$$

**Lemma 2.5.2** *Es sei*

$$E(z) := \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i z^i = 1 + 2z + z^2 - 2z^3 - 2z^4 + 4z^5 + 5z^6 - 10z^7 - 14z^8 + \dots,$$

dann gilt

$$E(z) = 2 + \frac{1-2z}{2z^2} (1 - \sqrt{1+4z^2}).$$

**Beweis:** Die Potenzreihe mit den Catalan-Zahlen erfüllt die Gleichung

$$C(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^n = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + \dots = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z},$$

siehe [Stoll2000, Beispiel 9.8] oder [Wilf1994, Eq. 2.3.9]. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} E(z) &= 2 - C(-z^2) + 2C(-z^2)z \\ &= 2 - (1-2z)C(-z^2) \\ &= 2 - (1-2z) \frac{1 - \sqrt{1+4z^2}}{-2z^2} \\ &= 2 + \frac{1-2z}{2z^2} (1 - \sqrt{1+4z^2}). \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.5.3** *Es gilt*

$$b_{k+1,j} = b_{k,j} + 2b_{k,j-1} + b_{k,j-2} - 4b_{k-1,j-2} \tag{2.5.4}$$

für alle  $k \geq 2$  und  $j \in \mathbb{Z}$ , für  $k = 1$  und  $j \leq 0$  und für  $k \leq 0$  und  $j < 0$ . Insbesondere gilt (2.5.4) für alle  $j \leq k - 1$ . Dabei sei  $b_{k,j} = 0$  für  $j < 0$ .

**Beweis:** Es sei

$$M := \begin{pmatrix} 1+x & 1-x \\ x(1-x) & x(1+x) \end{pmatrix}.$$

In Satz 3.6.2 werden wir für  $k \geq 2$  zeigen, daß

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot M^{k-2} \cdot \begin{pmatrix} 1+2x \\ x \end{pmatrix}.$$



Das charakteristische Polynom  $CP_M(y)$  von  $M$  lautet

$$CP_M(y) = \det(y \cdot 1 - M) = y^2 - (1+x)^2 y + 4x^2.$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt  $CP_M(M) = 0$ , d. h.,

$$M^2 = (1+x)^2 \cdot M - 4x^2 \cdot 1.$$

Daher erhalten wir die Behauptung des Lemmas für  $k \geq 3$  wie folgt:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & x \end{pmatrix} \cdot M^{k-3} \cdot M^2 \cdot \begin{pmatrix} 1+2x \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & x \end{pmatrix} \cdot M^{k-3} \cdot ((1+x)^2 \cdot M - 4x^2 \cdot 1) \cdot \begin{pmatrix} 1+2x \\ x \end{pmatrix} \\ &= (1+x)^2 \cdot P_k - 4x^2 \cdot P_{k-1}. \end{aligned}$$

Die Fälle  $k = 2$  und  $k = 1, j = 0$  ergeben sich durch Nachrechnen. □

**Definition:** Wir definieren

$$P := 1 - yE(xy) \quad \text{und} \quad Q := 1 - (1+x)^2 y + 4x^2 y^2.$$

Ferner sei  $z := xy$ .

**Lemma 2.5.4** *Es gilt*

$$Q = (1 - 2(1+x)xy + 4x^2 y^2 + x^2 y P) \cdot P. \quad (2.5.5)$$

**Beweis:** Wir definieren  $w := \frac{1 - \sqrt{1+4z^2}}{2z}$ . Dann erhalten wir

$$xP = x - 2z - (1 - 2z) \cdot w,$$

$$xQ = x - (1+x)^2 z + 4xz^2.$$

Wir bemerken, daß

$$w^2 = \frac{1 - 2\sqrt{1+4z^2} + (1+4z^2)}{4z^2} = \frac{1 - \sqrt{1+4z^2}}{2z^2} + 1 = \frac{w}{z} + 1.$$

Wir formen das  $x$ -fache der rechten Seite der herzuleitenden Gleichung (2.5.5) in  $xQ$  um. Dazu multiplizieren wir die Klammern aus und sortieren anschließend nach Potenzen von  $z$ .

$$\begin{aligned} & (1 - 2(1+x)z + 4z^2 + zxP) \cdot xP \\ &= (1 - 2(1+x)z + 4z^2 + xz - 2z^2 - (1 - 2z)wz) \cdot (x - 2z - (1 - 2z)w) \\ &= (1 - (2+x)z + 2z^2 - (1 - 2z)wz) \cdot (x - 2z - (1 - 2z)w) \\ &= (1 - (2+x+w)z + 2(1+w)z^2) \cdot (x - w - 2(1-w)z) \\ &= x - w - ((2+x+w)(x-w) + 2(1-w))z \\ &\quad + 2((1+w)(x-w) + (2+x+w)(1-w))z^2 - 4(1-w^2)z^3 \\ &= x - w - (2x - 2w + x^2 - w^2 + 2 - 2w)z \\ &\quad + 2(x - w + wx - w^2 + 2 + x + w - 2w - wx - w^2)z^2 + 4\frac{w}{z}z^3 \\ &= x - w - (x^2 + 2x - 4w + 1)z - \frac{-w}{z}z + 2(2 + 2x - 2w - 2w^2)z^2 + 4wz^2 \\ &= x - (1+x)^2 z + 4wz + 2(2 + 2x - 2w - 2)z^2 + 2\frac{-2w}{z}z^2 + 4wz^2 \\ &= x - (1+x)^2 z + 4(x-w)z^2 + 4wz^2 = x - (1+x)^2 z + 4xz^2 \\ &= xQ. \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.5.5** *Es gibt ein  $G \in 1 + \mathbb{Z}[x][[z]] \cdot z$ , so daß*

$$G \cdot \left(1 - (2+x)z + (4 - E(z))z^2\right) = 1.$$

**Beweis:** Es ist  $1 - (2+x)z + (4 - E(z))z^2 \in \mathbb{Z}[x][[z]]$ . Wir führen den Beweis allgemeiner aus, indem wir zeigen, daß es für gegebene  $p_j \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $j \geq 1$ , immer  $g_i \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $i \geq 0$ , gibt, so daß

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i z^i\right) \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j z^j\right) = 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i z^i\right) \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j z^j\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g_i p_j z^{i+j} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^i + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k-1} g_i p_{k-i}\right) z^k \\ &= g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(g_k + \sum_{i=0}^{k-1} g_i p_{k-i}\right) z^k. \end{aligned}$$

Nun definieren wir die Koeffizienten  $g_i$  induktiv wie folgt:

$$\begin{aligned} g_0 &:= 1, \\ g_k &:= -\sum_{i=0}^{k-1} g_i \cdot p_{k-i} \text{ für } k \geq 1. \end{aligned}$$

Dann sind die  $g_i$  von der gewünschten Form. □

**Corollar 2.5.6** *Es gibt ein  $G \in 1 + \mathbb{Z}[x][[xy]] xy$ , so daß  $G \cdot Q = P$ .*

**Beweis:** Dies folgt aus Lemma 2.5.4 und der Aussage  $G \in 1 + \mathbb{Z}[x][[z]] z$  aus Lemma 2.5.5:

$$\begin{aligned} G \cdot Q &= G \cdot (1 - 2(1+x)xy + 4x^2y^2 + x^2yP) \cdot P \\ &= G \cdot (1 - 2xy - 2x^2y + 4x^2y^2 + x^2y - x^2y^2E(xy)) \\ &= G \cdot (1 - (2+x)z + (4 - E(z))z^2) \\ &= P. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von Lemma 2.5.2, Lemma 2.5.3 und Corollar 2.5.6 können wir Satz 2.5.1 beweisen.

**Beweis (Satz 2.5.1):** Die Rekursionsvorschrift

$$b_{k+1,j} = b_{k,j} + 2b_{k,j-1} + b_{k,j-2} - 4b_{k-1,j-2}$$

schreiben wir als

$$1 = y + 2xy + x^2y - 4x^2y^2 \quad \text{bzw.} \quad -1 + (1+x)^2y - 4x^2y^2 = 0.$$

Dabei entspricht  $x$  dem Verkleinern von  $j$  um 1 in der  $b_{k+1,j}$ -Gleichung, ein  $y$  dem Verkleinern von  $k$  um 1 in der  $b_{k+1,j}$ -Gleichung. So steht z. B.  $(1 + 2xy + x^2y) \cdot Q$  für folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} b_{k+1,j} &= b_{k,j} + 2b_{k,j-1} + b_{k,j-2} - 4b_{k-1,j-2} \\ &\quad + 2 \cdot (-b_{k,j-1} + b_{k-1,j-1} + 2b_{k-1,j-2} + b_{k-1,j-3} - 4b_{k-2,j-3}) \\ &\quad + (-b_{k,j-2} + b_{k-1,j-2} + 2b_{k-1,j-3} + b_{k-1,j-4} - 4b_{k-2,j-4}) \\ &= b_{k,j} + 2b_{k-1,j-1} + b_{k-1,j-2} + 4b_{k-1,j-3} + b_{k-1,j-4} - 8b_{k-2,j-3} - 4b_{k-2,j-4}. \end{aligned}$$

Die Gleichung  $-1 + y + 2xy + x^2y - 4x^2y^2 = 0$  können wir uns in folgender Form vorstellen:

-4		
1	2	1
		-1

Durch Multiplikation eines Monoms  $\mu \cdot x^p y^q$  mit  $-1 + (1 + x)^2 y - 4x^2 y^2 = 0$  erhalten wir die Gleichung

$$\mu \cdot (-b_{k+1-q, j-p} + b_{k-q, j-p} + 2b_{k-q, j-1-p} + b_{k-q, j-2-p} - 4b_{k-1-q, j-2-p}) = 0. \quad (2.5.6)$$

Nach Lemma 2.5.3 ist diese Gleichung korrekt für  $j - p \leq k - q - 1$ .

Die Reihe  $G \in 1 + \mathbb{Z}[x][[xy]] xy$  aus Corollar 2.5.6 enthält nur Monome der Form  $\mu x^p y^q$  mit  $p \geq q$  und  $\mu \in \mathbb{Z}$ . Aus der Voraussetzung  $k \geq j + 1$  des Satzes 2.5.1 folgt damit

$$j - p \leq j - q \leq k - 1 - q.$$

Damit ist nach Lemma 2.5.3 und Corollar 2.5.6 die Gleichung

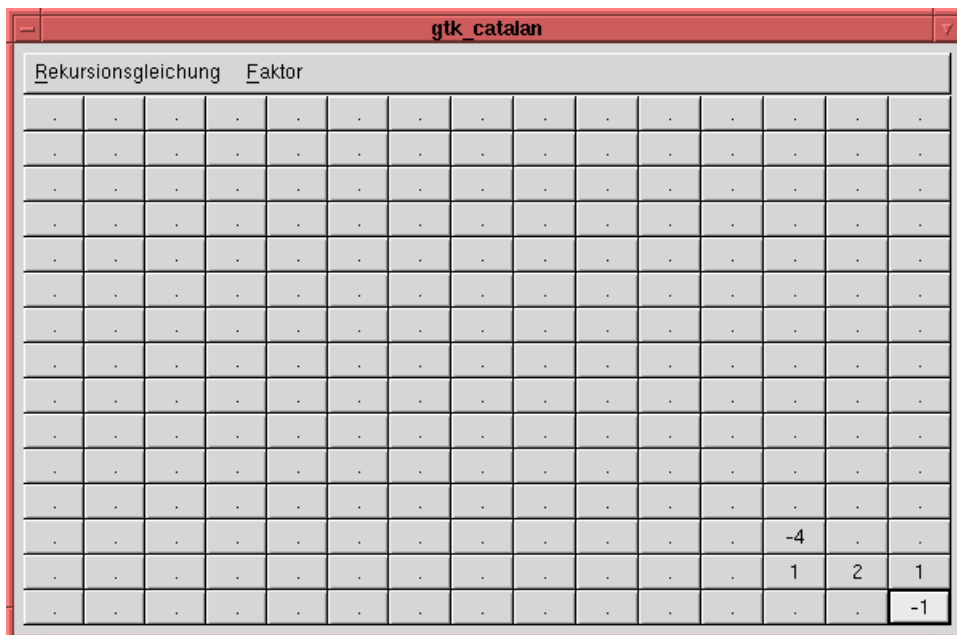
$$b_{k+1, j} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i b_{k-i, j-i} = \sum_{i=0}^j \lambda_i b_{k-i, j-i}$$

korrekt, da sie eine Summe korrekter Gleichungen der Form (2.5.6) ist. Wegen  $b_{k,l} = 0$  für  $l < 0$  summieren wir nur bis  $i = j$ . □

Um einen Überblick über Produkte der Form  $G \cdot (-1 + (1 + x)^2 y - 4x^2 y^2)$  mit  $G \in \mathbb{Z}[x][y]$  zu gewinnen, haben wir eine Software entwickelt, die interaktiv Vielfache von

-4		
1	2	1
		-1

an verschiedenen Stellen aufzusummiert.



Die abgebildeten Tabellen bestehen aus 15 Zeilen und 15 Spalten. Ein Eintrag in Spalte  $15 - i$  und Zeile  $15 - j$  enthält den Koeffizienten von  $x^i y^j$ .

Die Tabelle auf der vorigen Seite illustriert die Gleichung  $1 \cdot (-1 + (1 + x)^2 - 4x^2 y^2) = 0$ .

Die folgende Tabelle illustriert  $G \cdot (-1 + (1 + x)^2 - 4x^2 y^2) = 0$  für ein bestimmtes  $G \in \mathbb{Z}[x][xy]$ .

gtk_catalan														
Rekursionsgleichung Faktor														
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	336	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	140	-336	-84	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	-536	210	0	42	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	504	106	0	0	28	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	-536	-232	0	0	0	-14	.	.	.	.	.	.	.	.
.	62	54	0	0	0	0	-10	.	.	.	.	.	.	.
.	12	65	0	0	0	0	0	5	.	.	.	.	.	.
.	.	1	0	0	0	0	0	0	4	.	.	.	.	.
.	.	.	.	0	0	0	0	0	0	-2	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	0	0	0	0	0	-2	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	0	0	0	0	1	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	0	0	2	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	0	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1

Während der Suche nach einem Beweis von Satz 2.5.1 entdeckten wir das folgende Lemma. Das Lemma zeigt, wie die Gleichung  $1 = (1 + x)^2 y - 4x^2 y^2$  in die Gleichung  $1 = yE(xy)$  umgeformt werden kann. Dieses Lemma ist für sich genommen interessant, wird aber nicht im von uns geführten Beweis des Satzes 2.5.1 verwendet.

**Lemma 2.5.7** Aus  $1 = (1 + x)^2 y - 4x^2 y^2$  folgt  $x = xyE(xy)$ .

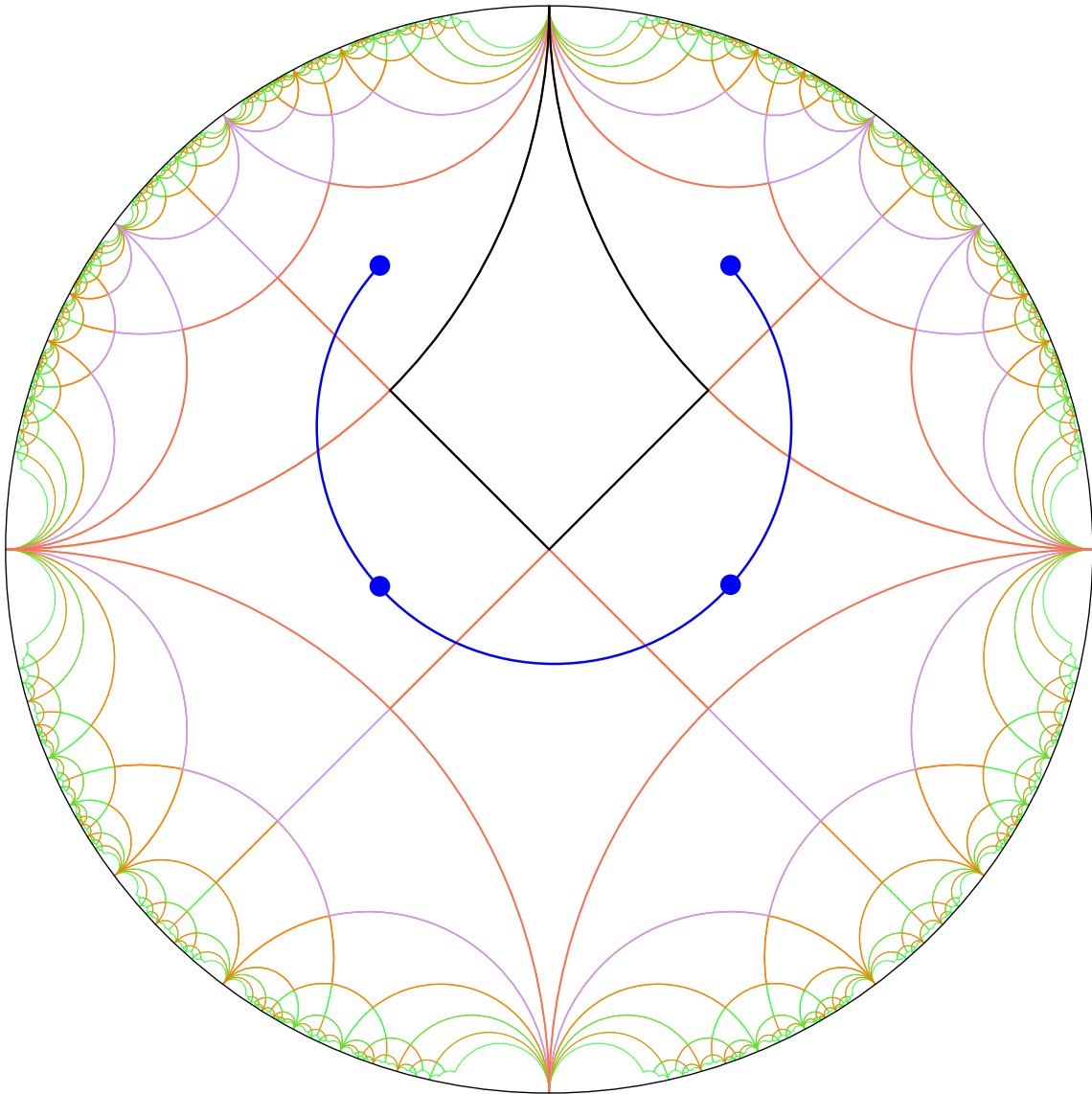
**Beweis:** Es sei  $1 = (1 + x)^2 y - 4x^2 y^2$ .

$$\begin{aligned}
& \stackrel{+y^{-1}}{\Rightarrow} y = -1 + 2y + 2xy + x^2 y - 4x^2 y^2 \\
& \stackrel{-4xy^2 + 4x^2 y^3}{\Rightarrow} y - 4xy^2 + 4x^2 y^3 = -1 + 2y + 2xy - 4xy^2 + x^2 y - 4x^2 y^2 + 4x^2 y^3 \\
& \Rightarrow y(1 - 2xy)^2 = -(1 - 2y)(1 - 2xy) + x^2 y(1 - 2y)^2 \\
& \stackrel{+\frac{(1-2xy)^2}{4x^2 y}}{\Rightarrow} \frac{(1 - 2xy)^2}{4x^2 y} + y(1 - 2xy)^2 = -(1 - 2y)(1 - 2xy) + x^2 y(1 - 2y)^2 + \frac{(1 - 2xy)^2}{4x^2 y} \\
& \stackrel{:y}{\Rightarrow} \frac{(1 - 2xy)^2}{4x^2 y^2} + (1 - 2xy)^2 = -\frac{2x}{2xy}(1 - 2y)(1 - 2xy) + x^2(1 - 2y)^2 + \frac{(1 - 2xy)^2}{4x^2 y^2} \\
& \Rightarrow \frac{(1 - 2xy)^2(1 + 4x^2 y^2)}{4x^2 y^2} = \left(x(1 - 2y) - \frac{1 - 2xy}{2xy}\right)^2 \\
& \stackrel{\sqrt{\quad}}{\Rightarrow} \mp \frac{1 - 2xy}{2xy} \sqrt{1 + 4x^2 y^2} = x(1 - 2y) - \frac{1 - 2xy}{2xy} \\
& \Rightarrow x = 2xy + \frac{1 - 2xy}{2xy} (1 \mp \sqrt{1 + 4x^2 y^2}).
\end{aligned}$$

□

Zum Schluß des Kapitels zeigen wir eine Illustration von  $L_4$ .

Unten wird eine Pflasterung der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}^2$  mit einem Fundamentalbereich von  $L_4$  dargestellt. Die Kopien des Fundamentalbereichs, die Worten gleicher Länge bezogen auf das 2-Erzeugendensystem  $\Sigma_{L_4}^2$  entsprechen, sind in jeweils derselben Farbe dargestellt.



Operation von  $L_4$  auf  $\mathbb{H}^2$

$$\begin{aligned}
 f_{L_4, \Sigma_{L_4}^2}(x) &= \frac{1 + 7x + 10x^2 - 2x^3 + x^4 - x^5}{1 - 6x^2 + x^4} \\
 &= \frac{1 + 5x + x^2 + x^3}{1 - 2x - x^2} \\
 &= 1 + 7x + 16x^2 + 40x^3 + 96x^4 + 232x^5 + 560x^6 + \dots
 \end{aligned}$$











**Satz 3.1.3** Für  $j \in \mathbb{Z}$  definiere

$$\lambda_j := \begin{cases} 1 & \text{für } j \equiv 0, 1 \pmod{6}, \\ -1 & \text{für } j \equiv 3, 4 \pmod{6}, \\ 0 & \text{für } j \equiv 2, 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

Dann gilt für  $n \geq 3$  und  $i \leq n - 2$ :

$$b_{n+1,i} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j b_{n-j,i-j}.$$

**Beweis:** Die Behauptung erhalten wir durch induktives Anwenden der Gleichung in Corollar 3.1.2:

$$\begin{aligned} b_{n+1,i} &= b_{n,i} + \underline{b_{n,i-1}} - b_{n-1,i-2} \\ &= b_{n,i} + (b_{n-1,i-1} + b_{n-1,i-2} - b_{n-2,i-3}) - b_{n-1,i-2} = b_{n,i} + b_{n-1,i-1} - \underline{b_{n-2,i-3}} \\ &= b_{n,i} + b_{n-1,i-1} - b_{n-3,i-3} - \underline{b_{n-3,i-4}} + b_{n-4,i-5} \\ &= b_{n,i} + b_{n-1,i-1} - b_{n-3,i-3} - (b_{n-4,i-4} + b_{n-4,i-5} - b_{n-5,i-6}) + b_{n-4,i-5} \\ &= b_{n,i} + b_{n-1,i-1} - b_{n-3,i-3} - b_{n-4,i-4} + \underline{b_{n-5,i-6}} \\ &= b_{n,i} + b_{n-1,i-1} - b_{n-3,i-3} - b_{n-4,i-4} + b_{n-6,i-6} + \underline{b_{n-6,i-7}} - b_{n-7,i-8} \\ &= \dots \end{aligned}$$

□

Aus Lemma 3.1.1 folgt ferner, daß die Determinanten  $d_n$  die Koeffizienten der Reihenentwicklung einer rationalen Funktion sind. Dies zeigen wir im folgenden Satz.

**Satz 3.1.4** Sei

$$\begin{aligned} F_{\text{band}(x,1+x,x)}(y) &:= \frac{1}{1 - (1+x)y + x^2y^2} \\ &= 1 + (1+x)y + (1+2x)y^2 + (1+3x+x^2-x^3)y^3 + \dots \end{aligned}$$

Weiter sei  $d_0 := 1$  und  $d_1 := 1+x$ . Dann gilt

$$F_{\text{band}(x,1+x,x)}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n.$$

**Beweis:** Nach Lemma 3.1.1 gilt  $x^2 \cdot d_{n-1} - (1+x) \cdot d_n + d_{n+1} = 0$  für  $n \geq 3$ . Nachrechnen zeigt dies auch für  $n = 1$  und  $n = 2$ . Daraus folgern wir:

$$\begin{aligned} (1 - (1+x)y + x^2y^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n - \sum_{n=0}^{\infty} (1+x)d_n y^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^2 d_n y^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n - \sum_{n=1}^{\infty} (1+x)d_{n-1} y^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^2 d_{n-2} y^n \\ &= d_0 + d_1 y - (1+x)d_0 y + \sum_{n=2}^{\infty} (d_n - (1+x)d_{n-1} + x^2 d_{n-2}) y^n = 1. \end{aligned}$$

Durch Teilen beider Seiten durch  $1 - (1+x)y + x^2y^2$  erhalten wir die Behauptung des Satzes. □

In Abschnitt 2.5 beweisen wir eine Gleichung der Form  $b_{n+1,i} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j b_{n-j,i-j}$  mittels Potenzreihen. Auf dieser Seite stellen wir einen weiteren Beweis von Satz 3.1.3 vor, der wie in Abschnitt 2.5 mit Potenzreihen operiert.

**Definition:**

$$E(z) := \frac{1}{1 - z + z^2} \in 1 + \mathbb{Z}[[z]] z.$$

$E(z)$  ist eine erzeugende Funktion für die Koeffizienten  $\lambda_j$ :

$$E(z) = \frac{1}{1 - z + z^2} = \frac{1 + z}{1 + z^3} = \frac{(1 + z)(1 - z^3)}{(1 + z^3)(1 - z^3)} = \frac{1 + z - z^3 - z^4}{1 - z^6} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j z^j.$$

**Definition:**

$$P := 1 - E(xy) \cdot y \quad \text{und} \quad Q := 1 - (1 + x)y + x^2y^2.$$

Das Polynom  $Q \in \mathbb{Z}[x][y]$  entspricht der Gleichung

$$0 = b_{n+1,i} - b_{n,i} - b_{n,i-1} - b_{n-1,i-2}.$$

**Definition:**

$$G := E(xy) \in 1 + \mathbb{Z}[x][[xy]] xy.$$

Die Monome in  $G$  sind von der Form  $\mu \cdot x^p y^q$  mit  $\mu \in \mathbb{Z}$  und  $p \geq q$ . Ein Monom  $\mu \cdot x^p y^q$ , multipliziert mit  $Q$ , entspricht folgender Gleichung:

$$\mu \cdot (b_{n+1-q,i-p} - b_{n-q,i-p} - b_{n-q,i-1-p} + b_{n-1-q,i-2-p}) = 0. \quad (3.1.1)$$

Aus der Voraussetzung  $i \leq n - 2$  in Satz 3.1.3 folgt

$$i - p \leq n - 2 - p \leq n - 2 - q = (n - q) - 2.$$

Nach Corollar 3.1.2 ist damit Gleichung (3.1.1) korrekt.

Es gilt

$$G \cdot Q = \frac{1}{1 - xy + x^2y^2} \cdot (1 - (1 + x)y + x^2y^2) = 1 - \frac{y}{1 - xy + x^2y^2} = 1 - E(xy)y = P.$$

Multiplizieren wir die Monome von  $G$  mit  $Q$  wie in Gleichung (3.1.1) und addieren diese, so erhalten wir:

$$0 = b_{n+1,i} - \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j b_{n-j,i-j} = b_{n+1,i} - \sum_{j=0}^i \lambda_j b_{n-j,i-j}.$$

Da die beim Ausmultiplizieren von  $G \cdot Q$  verwendeten Gleichungen (3.1.1) korrekt sind und die Summe endlich ist, folgt damit die Behauptung des Satzes 3.1.3.

### 3.2 Bandmatrix $(x, x, 1 + x, x, x)$

Sei

$$A_n := \text{band}\left(\begin{pmatrix} x \\ x \\ 1+x \\ x \\ x \end{pmatrix}, n\right) = \begin{pmatrix} 1+x & x & x & & & & & & & & \\ & x & 1+x & x & x & & & & & & \\ & x & x & 1+x & \ddots & x & & & & & \\ & & x & \ddots & \ddots & x & & & & & \\ & & & x & x & 1+x & & & & & \end{pmatrix}.$$

Eine Analyse der Koeffizienten der Determinanten  $\det(A_n)$  für kleine  $n$  ergibt, daß dort ebenfalls eine Gleichung der Form  $b_{n+1,i} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j b_{n-j,i-j}$  gilt, falls wir  $\lambda_j$  mit Periode 5 wie in der folgenden Tabelle definieren.

$$\begin{array}{c|cccccccccc} j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ \hline \lambda_j & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & \dots \end{array}$$

In diesem Abschnitt berechnen wir zuerst Vektoren  $u$  und  $v$  und eine Matrix  $M$ , so daß  $\det(A_{k+n}) = u \cdot M^n \cdot v$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und ein festes  $k$  gilt. Anschließend bestimmen wir eine erzeugende Funktion für die Determinanten  $\det(A_n)$ . Schließlich zeigen wir, daß die Identitäten  $b_{n+1,i} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j b_{n-j,i-j}$  mit den oben angegebenen  $\lambda_j$  erfüllt werden für alle  $n, i \in \mathbb{Z}$  mit  $i \leq n-2$  und  $n \geq 3$ .

**Definition:** Es sei  $n \geq 3$ . Sei  $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{N}^k$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$  ein Vektor mit natürlichen

Einträgen. Dann sei  $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}_n$  die Untermatrix der Bandmatrix  $A_n$ , die durch Streichen der

Spalten  $1, \dots, k$  und Streichen der Zeilen  $u_1, \dots, u_k$  entsteht. Es gilt  $(\ )_n = A_n$ .

**Beispiel:** Durch Streichen der ersten Spalte und ersten Zeile in der Bandmatrix  $A_n$  entsteht die Bandmatrix  $A_{n-1}$ , daher gilt  $(1)_n = A_{n-1}$ .

**Lemma 3.2.1** *Es gelten für  $n \geq 6$ :*

$$\begin{aligned} |(\ )_n| &= (1+x) \cdot |(\ )_{n-1}| - x \cdot |(2)_n| + x \cdot |(3)_n|, \\ |(2)_n| &= x \cdot |(\ )_{n-2}| - x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}_n + x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}_n, \\ |(3)_n| &= x \cdot |(2)_{n-1}| - (1+x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}_n + x \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}_n, \\ \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}_n &= x \cdot |(\ )_{n-3}|, \\ \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}_n &= x \cdot |(2)_{n-2}|, \\ \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}_n &= x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}_{n-1}. \end{aligned}$$

**Beweis:** Die Determinanten werden mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes berechnet, indem nach der ersten Spalte entwickelt wird. Durch Streichen der ersten Spalte und ersten Zeile der Bandmatrix  $A_n$  entsteht die Bandmatrix  $A_{n-1}$ . Deshalb gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} |(1)_n| &= |(\ )_{n-1}|, \\ \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}_n &= |(\ )_{n-2}|, & \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}_n &= |(2)_{n-1}|, \\ \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}_n &= |(\ )_{n-3}|, & \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix}_n &= |(2)_{n-2}|, & \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}_n &= \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}_{n-1}. \end{aligned}$$

Die Behauptungen des Lemmas ergeben sich aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz und dem anschließenden Anwenden jeweils einer dieser Gleichungen.  $\square$

**Lemma 3.2.2** *Es seien*

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^t, \quad M := \begin{pmatrix} 1+x & -x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & -x & x & 0 \\ 0 & x & 0 & -(1+x) & 0 & x \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v := \begin{pmatrix} 1+3x \\ x(1+x) \\ -x(1+x) \\ x(1+2x) \\ x^2 \\ x^2(x+1) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle  $k \geq 0$ :

$$\det(A_{3+k}) = u \cdot M^k \cdot v.$$

**Beweis:** Durch Nachrechnen ergeben sich die Koeffizienten von  $v$  und damit die Behauptung für  $k = 0$ :

$$\begin{aligned} |(\ )_3| &= \begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \\ x & x & 1+x \end{vmatrix} = \det(A_3) = 1+3x, \\ |(2)_4| &= \begin{vmatrix} x & x & 0 \\ x & 1+x & x \\ x & x & 1+x \end{vmatrix} = x+x^2 = x(1+x), \\ |(3)_4| &= \begin{vmatrix} x & x & 0 \\ 1+x & x & x \\ x & x & 1+x \end{vmatrix} = -x(1+x), \\ |(2)_3_5| &= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x & 1+x & x \\ x & x & 1+x \end{vmatrix} = x(1+2x), \\ |(2)_4_5| &= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1+x & x & x \\ x & x & 1+x \end{vmatrix} = x^2, \\ |(3)_4_5| &= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \\ x & x & 1+x \end{vmatrix} = x^2(1+x). \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion folgt aus Lemma 3.2.1 für alle  $k \geq 0$ :

$$\left( |(\ )_{3+k}|, |(2)_{4+k}|, |(3)_{4+k}|, |(2)_{3}_{5+k}|, |(2)_{4}_{5+k}|, |(3)_{4}_{5+k}| \right)^t = M^k \cdot v.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung des Lemmas.  $\square$

**Satz 3.2.3** *Die Determinanten der Bandmatrizen  $A_n$  sind Koeffizienten einer Reihenentwicklung einer rationalen Funktion. Es gilt*

$$\frac{1+xy}{1-y-xy^2+x^2y^3+x^3y^4-x^5y^5} = \sum_{n=0}^{\infty} \det(A_n)y^n,$$

wobei  $\det(A_0) = 1$ ,  $\det(A_1) = 1+x$  und  $\det(A_2) = 1+2x$ .

**Beweis:** Das charakteristische Polynom der Matrix  $M$  in Lemma 3.2.2 lautet

$$\text{CP}_M(y) = x^6 - x^4(1+x)y + 2x^2y^3 - (1+x)y^5 + y^6.$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt  $\text{CP}_M(M) = 0$ . Seien  $u$  und  $v$  die Vektoren aus Lemma 3.2.2, dann gilt natürlich auch  $u \cdot \text{CP}_M(M) \cdot v = 0$ . Daraus folgt mit Lemma 3.2.2, daß für alle  $k \geq 0$

$$x^6 \det(A_{3+k}) - x^4(1+x) \det(A_{4+k}) + 2x^2 \det(A_{6+k}) - (1+x) \det(A_{8+k}) + \det(A_{9+k}) = 0.$$

Somit erfüllen die Determinanten  $\det(A_n)$  eine lineare Differenzgleichung, und es gibt ein Polynom  $P(x, y) \in \mathbb{Z}[x][y]$  vom Grad  $\leq 9$ , so daß

$$\frac{P(x, y)}{1 - (1+x)y + 2x^2y^3 - x^4(1+x)y^5 + x^6y^6} = \sum_{n=0}^{\infty} \det(A_n)y^n.$$

Die Multiplikation des Nenners mit den ersten 10 Termen von  $\sum_{n=0}^{\infty} \det(A_n)y^n$  zeigt, daß

$$\frac{1 - x^2y^2}{1 - (1+x)y + 2x^2y^3 - x^4(1+x)y^5 + x^6y^6} = \sum_{n=0}^{\infty} \det(A_n)y^n.$$

Durch Kürzen mit  $1 - xy$  erhalten wir die herzuleitende Funktion. □

**Satz 3.2.4** Für  $n \geq 0$  sei  $\sum_{i=0}^{\infty} b_{n,i}x^i := \det(A_n)$ . Für  $j \in \mathbb{Z}$  definiere

$$\lambda_j := \begin{cases} 1 & \text{für } j \equiv 0, 1 \pmod{5}, \\ -1 & \text{für } j \equiv 2, 3 \pmod{5}, \\ 0 & \text{für } j \equiv 4 \pmod{5}. \end{cases}$$

Dann gilt für  $n \geq 3$  und  $i \leq n - 2$ :

$$b_{n+1,i} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \cdot b_{n-j,i-j}.$$

**Beweis:** Wir schreiben eine lineare Gleichung zwischen den  $b_{n,i}$  wie im vorigen Abschnitt wieder als Polynom in  $\mathbb{Z}[x, y]$  und multiplizieren dieses mit einem geeigneten Element  $G \in 1 + \mathbb{Z}[x][[xy]] \cdot xy$ . Nach Satz 3.2.3 gilt

$$1 - y - xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4 - x^5y^5 = 0.$$

Wir definieren

$$E(z) := \frac{1 + z - z^2 - z^3}{1 - z^5} = \frac{(1+z)(1-z^2)}{1 - z^5} = \frac{(1+z)^2}{1 + z + z^2 + z^3 + z^4} \in 1 + \mathbb{Z}[[z]] \cdot z,$$

so daß  $E(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_j z^j$ . Wir multiplizieren  $Q := 1 - y - xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4 - x^5y^5$  mit

$$G := \frac{1}{1 - x^5y^5} = \sum_{i=0}^{\infty} (xy)^{5i} \in 1 + \mathbb{Z}[x][[xy]] \cdot xy$$

und erhalten

$$\begin{aligned} G \cdot Q &= \frac{1 - y - xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4 - x^5y^5}{1 - x^5y^5} = 1 - y \frac{1 + xy - x^2y^2 - x^3y^3}{1 - x^5y^5} \\ &= 1 - yE(xy). \end{aligned}$$

Damit ist  $1 - yE(xy)$  ein Produkt von  $G \in 1 + \mathbb{Z}[x][[xy]] \cdot xy$  und  $Q$ . Durch Anwendung von  $1 - yE(xy)$  auf  $b_{n+1,i}$  folgt daraus die Behauptung des Satzes. □



$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 + 7x + 6x^2 - 14x^3 - 5x^4 + 7x^5 + x^6 - x^7 \\ 2x^5 - x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 1 + 6x \\ x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x \\ 1 + 5x + x^2 - 3x^3 \\ x + 2x^2 - 2x^3 \\ x + 3x^2 - x^3 \\ 1 + 4x \\ x + x^2 \\ x + 2x^2 \\ x + 3x^2 \\ x^2 \\ -x^2 \\ -x^2 - x \\ 0 \\ x^2 + 2x^3 \\ x^3 \\ -x^2 - x^3 \\ -2x^2 - x \\ x^2 + x^3 \\ -x^2 - x^3 \\ x^3 \\ -2x^2 \\ 0 \\ x + x^2 \\ x^2 + x^3 \\ x^3 + x^4 \\ -3x^2 + 2x^4 - x \\ x^4 - x^3 - 2x^2 \\ x^4 - 2x^2 - x \\ x^4 \\ x^4 - 2x^3 - x^2 \\ -x^4 + 2x^2 + x \\ 2x^3 - x^5 + x^2 \\ x^4 + x^3 - 3x^2 - x \\ x^6 - 4x^4 + 3x^2 + x \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $A$  auf der folgenden Seite wird wegen ihrer Größe im Querformat angegeben. Einträge, die gleich 0 sind, werden zur besseren Lesbarkeit durch einen Punkt ersetzt.







Ein  $G \in \mathbb{Z}[x][[y]]$  mit der Eigenschaft, daß  $G \cdot Q \in 1 + \mathbb{Z}[[xy]]y$  liegt, hat vermutlich die Eigenschaft, daß der Kehrwert  $1/G$  mit folgenden Termen beginnt:

$$\begin{aligned} 1/G = & 1 - 2x^2y^3 + x^3y^4 - 5x^4y^5 + (1 + 11x)x^4y^6 - (1 + 28x - 2x^2)x^5y^7 \\ & + (3 + 76x)x^6y^8 - (6 + 216x)x^7y^9 + (17 + 630x)x^8y^{10} \\ & - (48 + 1891x)x^9y^{11} + (140 + 5759x)x^{10}y^{12} - (416 + 17801x)x^{11}y^{13} + \dots \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $\lambda_j$  tauchen in  $1/G$  mit kleinen Fehlertermen auf.

### 3.4 Diagonalmatrix $1 + x$

Der Vollständigkeit halber geben wir in diesem Abschnitt die Daten der Diagonalmatrix  $\text{diag}(1 + x, n)$ , einer Bandmatrix ohne Nebendiagonalen, an.

Für  $n \geq 0$  sei

$$d_n := \det(\text{diag}(1 + x, n)) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 + x & & & \\ & 1 + x & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 + x \end{pmatrix}\right),$$

wobei  $d_0 = 1$ . Dann gelten:

$$\begin{aligned} d_n &= (1 + x)^n, \\ \frac{1}{1 - (1 + x)y} &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot y^n, \\ b_{n+1,i} &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \cdot b_{n-j,i-j}, \end{aligned}$$

wobei  $\sum_{i=0}^{\infty} b_{n,i}x^i := d_n$  und  $\lambda_j := 1$  für alle  $j$ . Die ersten beiden Aussagen sind offensichtlich, die dritte Gleichung ist eine bekannte Aussage über Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n+1}{i} = \sum_{j=0}^i \binom{n-j}{i-j}.$$







**Satz 3.5.2** *Es sei*

$$M_{a,b} := \begin{pmatrix} b^2 & -a & a & -a & -ab & ab \\ ab(b-a) & 0 & a^2 & -a^2 & -a^2(b-a) & a^2(b-a) \\ -ab(b-a) & 0 & a^2 & -a^2 & a^2(b-a) & -a^2(b-a) \\ 0 & -2a(b-a) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ab & -a & a & -a & -a^2 & a^2 \\ 0 & -(b-a) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$v_{a,b} := \begin{pmatrix} (2a+b)(b-a)^2 \\ a(b-a)(b^2-2a^2) \\ -b^2a(b-a) \\ -2a^2(b-a)^2 \\ a(b-a)^2 \\ -a(b-a)^2 \end{pmatrix} = (b-a) \begin{pmatrix} (2a+b)(b-a) \\ a(b^2-2a^2) \\ -b^2a \\ -2a^2(b-a) \\ a(b-a) \\ -a(b-a) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle  $n \geq 1$ :

$$\begin{pmatrix} \det(A_n) \\ \det(C_n) \\ \det(D_n) \\ \det(E_n) \\ \det(F_n) \\ \det(G_n) \end{pmatrix} = M_{a,b}^{n-1} \cdot v_{a,b}.$$

**Beweis:** Wir nehmen eine vollständige Induktion über  $n$  vor. Zuerst betrachten wir den Induktionsschritt  $n-1 \mapsto n$  für  $n \geq 2$ :

$$\begin{pmatrix} \det(A_n) \\ \det(C_n) \\ \det(D_n) \\ \det(E_n) \\ \det(F_n) \\ \det(G_n) \end{pmatrix} = M_{a,b} \cdot \begin{pmatrix} \det(A_{n-1}) \\ \det(C_{n-1}) \\ \det(D_{n-1}) \\ \det(E_{n-1}) \\ \det(F_{n-1}) \\ \det(G_{n-1}) \end{pmatrix}. \quad (3.5.3)$$

Nach dem Lemma 3.5.1 gilt für  $n \geq 3$ :

$$|B_{n-1}| = b \cdot |A_{n-1}| - a \cdot |F_{n-1}| + a \cdot |G_{n-1}|.$$

Dies gilt auch für  $n = 2$ , wie eine Laplace-Entwicklung von  $B_1$  nach der ersten Spalte zeigt (siehe auch den Beweis des Induktionsanfangs weiter unten):

$$|B_1| = \begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ 0 & a & a & b \end{vmatrix} = b \cdot |A_1| - a \cdot |F_1| + a \cdot |G_1|.$$

Für  $n \geq 2$  erhalten wir daher mit Hilfe des Lemmas 3.5.1:

$$\begin{aligned} |A_n| &= b \cdot |B_{n-1}| - a \cdot |C_{n-1}| + a \cdot |D_{n-1}| - a \cdot |E_{n-1}| \\ &= b^2 \cdot |A_{n-1}| - ab \cdot |F_{n-1}| + ab \cdot |G_{n-1}| - a \cdot |C_{n-1}| + a \cdot |D_{n-1}| - a \cdot |E_{n-1}|, \\ |C_n| &= a \cdot |A_n| - a^2 \cdot |B_{n-1}| + a^2 \cdot |C_{n-1}| \\ &= ab \cdot |B_{n-1}| - a^2 \cdot |C_{n-1}| + a^2 \cdot |D_{n-1}| - a^2 \cdot |E_{n-1}| - a^2 \cdot |B_{n-1}| + a^2 \cdot |C_{n-1}| \\ &= \underline{a(b-a)} \cdot |B_{n-1}| + a^2 \cdot |D_{n-1}| - a^2 \cdot |E_{n-1}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ab(b-a) \cdot |A_{n-1}| - a^2(b-a) \cdot |F_{n-1}| + a^2(b-a) \cdot |G_{n-1}| + a^2 \cdot |D_{n-1}| - a^2 \cdot |E_{n-1}|, \\
|D_n| &= -ab \cdot |B_{n-1}| + a^2 \cdot |C_{n-1}| + a \cdot |F_n| \\
&= -ab \cdot |B_{n-1}| + a^2 \cdot |C_{n-1}| + a^2 \cdot |B_{n-1}| - a^2 \cdot |C_{n-1}| + a^2 \cdot |D_{n-1}| - a^2 \cdot |E_{n-1}| \\
&= -a(b-a) \cdot |B_{n-1}| - a^2 \cdot |C_{n-1}| + a^2 \cdot |D_{n-1}| - a^2 \cdot |E_{n-1}| \\
&= -a(b-a)(b \cdot |A_{n-1}| - a \cdot |F_{n-1}| + a \cdot |G_{n-1}|) - a^2 \cdot |C_{n-1}| + a^2 \cdot |D_{n-1}| - a^2 \cdot |E_{n-1}|, \\
|E_n| &= (a^2 - ab) \cdot |C_{n-1}| + a \cdot |G_n| \\
&= (a^2 - ab) \cdot |C_{n-1}| + a(a-b) \cdot |C_{n-1}| \\
&= -2a(b-a) \cdot |C_{n-1}|, \\
|F_n| &= a \cdot |B_{n-1}| - a \cdot |C_{n-1}| + a \cdot |D_{n-1}| - a \cdot |E_{n-1}| \\
&= ab \cdot |A_{n-1}| - a^2 \cdot |F_{n-1}| + a^2 \cdot |G_{n-1}| - a \cdot |C_{n-1}| + a \cdot |D_{n-1}| - a \cdot |E_{n-1}|, \\
|G_n| &= -(b-a) \cdot |C_{n-1}|.
\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt (3.5.3) bewiesen. Es fehlt der Induktionsanfang  $n = 1$ .

$$\begin{aligned}
|A_1| &= \begin{vmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{vmatrix} = b^3 + 2a^3 - 3ba^2 = 2a(b^2 - 2ab + a^2) + b(b^2 - 2ab + a^2) \\
&= (2a+b)(b-a)^2, \\
|A_2| &= \begin{vmatrix} b & a & a & 0 & 0 \\ a & b & a & a & a \\ a & a & b & a & a \\ a & a & a & b & a \\ 0 & 0 & a & a & b \end{vmatrix}, \\
|F_1| &= \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{vmatrix} = ab^2 + 2a^3 - a^3 - 2a^2b = a(b^2 - 2ab + a^2) = a(b-a)^2, \\
|G_1| &= \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ a & a & b \end{vmatrix} = a^3 + 2a^2b - 2a^3 - b^2a = a(-a^2 + 2ab - b^3) = -a(b-a)^2, \\
|C_1| &= \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ 0 & a & a & b \end{vmatrix} = a \cdot |A_1| - a^2(b^2 - a^2) + a^2(ab - a^2) \\
&= (b-a)(a(2a+b)(b-a) - a^2(b+a) + a^3) \\
&= a(b-a)((2a+b)(b-a) - a(b+a) + a^2) \\
&= a(b-a)(2ab - 2a^2 + b^2 - ab - ab - a^2 + a^2) \\
&= a(b-a)(b^2 - 2a^2), \\
|D_1| &= \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ b & a & a & a \\ a & a & b & a \\ 0 & a & a & b \end{vmatrix} = a \cdot |F_1| - ba(b^2 - a^2) + a^2(ab - a^2) \\
&= a(b-a)(a(b-a) - b(b+a) + a^2) = -ab^2(b-a), \\
|E_1| &= \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ 0 & a & a & b \end{vmatrix} = a \cdot |G_1| - ba(ab - a^2) + a^2(ab - a^2) \\
&= a(b-a)(-a(b-a) - ba + a^2) = a(b-a)(2a^2 - 2ab) \\
&= -2a^2(b-a)^2.
\end{aligned}$$





**Definition:**

$$M := \begin{pmatrix} (1+x)^2 & -x & x & -x & -x(1+x) & x(1+x) \\ x(1+x) & 0 & x^2 & -x^2 & -x^2 & x^2 \\ -x(1+x) & 0 & x^2 & -x^2 & x^2 & -x^2 \\ 0 & -2x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x(1+x) & -x & x & -x & -x^2 & x^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_1 := \begin{pmatrix} 1+3x \\ x(1+2x-x^2) \\ -x(1+x)^2 \\ -2x^2 \\ x \\ -x \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 3.5.2 gilt für  $n \geq 1$ :

$$\det(A_n) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \cdot M^{n-1} \cdot v_1.$$

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie sich  $M$  so vereinfachen läßt, daß eine  $2 \times 2$ -Matrix das Wachstum der Zähler beschreibt.

**Definition:** Für  $n \geq 1$  definieren wir

$$\begin{aligned} B_n &:= \text{del}(A_{n+1}, 1, 1) \in M_{2n+2}, \\ C_n &:= \text{del}(A_{n+1}, 2, 1) \in M_{2n+2}, \\ D_n &:= \text{del}(A_{n+1}, 3, 1) \in M_{2n+2}, \\ E_n &:= \text{del}(A_{n+1}, 4, 1) \in M_{2n+2}, \\ F_n &:= \text{del}(B_n, 2, 1) \in M_{2n+1}, \\ G_n &:= \text{del}(B_n, 3, 1) \in M_{2n+1}. \end{aligned}$$

Es gelten

$$\begin{pmatrix} \det(A_1) \\ \det(C_1) \\ \det(D_1) \\ \det(E_1) \\ \det(F_1) \\ \det(G_1) \end{pmatrix} = v_1 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \det(A_n) \\ \det(C_n) \\ \det(D_n) \\ \det(E_n) \\ \det(F_n) \\ \det(G_n) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \det(A_{n-1}) \\ \det(C_{n-1}) \\ \det(D_{n-1}) \\ \det(E_{n-1}) \\ \det(F_{n-1}) \\ \det(G_{n-1}) \end{pmatrix} \quad \text{für } n \geq 1.$$

**Lemma 3.6.1** Für  $n \geq 1$  gilt

$$\begin{pmatrix} \det(A_n) \\ \det(F_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2x-x^2 & -2x(1-x) \\ x(1-x) & 2x^2 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1+3x \\ x \end{pmatrix}.$$

**Beweis:** Wir definieren  $A := |A_n|$ ,  $A' := |A_{n-1}|$ ,  $B := |B_n|$ ,  $B' := |B_{n-1}|$ , ... . Für  $n \geq 2$  gilt

$$\begin{aligned} A &= (1+x)^2 A' - xC' + xD' - xE' - x(1+x)F' + x(1+x)G', \\ C &= x(1+x)A' + x^2 D' - x^2 E' - x^2 F' + x^2 G', \\ D &= -x(1+x)A' + x^2 D' - x^2 E' + x^2 F' - x^2 G', \\ E &= -2xC', \\ F &= x(1+x)A' - xC + xD - xE - x^2 F + x^2 G, \\ G &= -C'. \end{aligned}$$

Der Beweis erfolgt in vier Schritten.

**Schritt 1:** Elimination von  $E$ .

Es gelten

$$\begin{aligned} |E_1| &= -2x^2 = 2x \cdot (-x) = 2x \cdot |G_1|, \\ |E_n| &= -2x|C_{n-1}| = -2x \cdot (-|G_n|) = 2x \cdot |G_n|, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Die Substitution  $E \mapsto 2xG$  ergibt

$$\begin{aligned} A &= (1+x)^2 A' - xC' + xD' - x(1+x)F' + x(1-x)G', \\ C &= x(1+x)A' + x^2 D' - x^2 F' + x^2(1-2x)G', \\ D &= -x(1+x)A' + x^2 D' + x^2 F' - x^2(1+2x)G', \\ F &= x(1+x)A' - xC + xD - x^2 F - x^2 G, \\ G &= -C'. \end{aligned}$$

**Schritt 2:** Elimination von  $D$ ,  $D \mapsto -2xA + C + 2xF$ .

Es gelten

$$\begin{aligned} -2x|A_1| + |C_1| + 2x|F_1| &= -2x \cdot (1+3x) + x(1+2x-x^2) + 2x \cdot x \\ &= -x - 2x^2 - x^3 = |D_1|, \\ -2x|A_n| + |C_n| + 2x|F_n| &= (-2x \cdot (1+2x+x^2) + x(1+x) + 2x \cdot (x+x^2))|A_{n-1}| \\ &\quad + (-2x \cdot (-x) + 0 + 2x \cdot (-x))|C_{n-1}| \\ &\quad + (-2x \cdot x + x^2 + 2x \cdot x)|D_{n-1}| \\ &\quad + (-2x \cdot (-x-x^2) - x^2 + 2x \cdot (-x^2))|F_{n-1}| \\ &\quad + (-2x \cdot (x-x^2) + (x^2-2x^3) + 2x \cdot (-x^2))|G_{n-1}| \\ &= (-x-x^2)|A_{n-1}| + x^2|D_{n-1}| + x^2|F_{n-1}| - x^2(1+2x)|G_{n-1}| \\ &= |D_n|. \end{aligned}$$

Mit  $D \mapsto -2xA + C + 2xF$  vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\begin{aligned} A &= (1+2x-x^2)A' - x(1-x)F' + x(1-x)G', \\ C &= x(1+x-2x^2)A' + x^2 C' - x^2(1-2x)F' + x^2(1-2x)G', \\ F &= x(1-x)A' + x^2 F' - x^2 G', \\ G &= -C'. \end{aligned}$$

**Schritt 3:** Elimination von  $C$ ,  $C \mapsto x(1-x)A + x^2 F - x^2 G$ .

Es gelten

$$\begin{aligned} x(1-x)|A_1| + x^2(|F_1| - |G_1|) &= (x-x^2+3x^2-3x^3) + x^2(x-(-x)) \\ &= x+2x^2-x^3 = x(1+2x-x^2) = |C_1|, \\ x(1-x)A + x^2(F-G) &= (x+2x^2-x^3-x^2-2x^3+x^4)A' \\ &\quad - x^2(1-2x+x^2)F' + x^2(1-2x+x^2)G' \\ &\quad + x^3(1-x)A' + x^4 F' - x^4 G' + x^2 C' \\ &= (x+x^2-2x^3)A' + x^2 C' - x^2(1-2x)F' \\ &\quad + x^2(1-2x)G' \\ &= C. \end{aligned}$$

Mit  $C \mapsto x(1-x)A + x^2 F - x^2 G$  erhalten wir

$$\begin{aligned} A &= (1+2x-x^2)A' - x(1-x)F' + x(1-x)G', \\ F &= x(1-x)A' + x^2 F' - x^2 G', \\ G &= -x(1-x)A' - x^2 F' + x^2 G'. \end{aligned}$$



Ziel dieses Abschnittes ist die Berechnung der Determinante von  $\tilde{A}_n$ . Wir formen dazu  $\tilde{A}_n$  zuerst in eine ähnliche Matrix  $A_n$  um. Deren Determinante berechnen wir mit vollständiger Induktion, einigen Hilfsmatrizen und der Verwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

In  $\tilde{A}_n$  ziehen wir die letzte Zeile von allen anderen Zeilen ab. Es entsteht die Matrix  $A_n$ , deren Determinante identisch mit der Determinante von  $\tilde{A}_n$  ist:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+x & x & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -x & -x & -1-x \\ x & 1+x & x & x & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -x & -x & -1-x \\ x & x & 1+x & x & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -x & -x & -1-x \\ x & x & x & 1+x & x & x & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -x & -x & -1-x \\ \cdot & \cdot & x & x & 1+x & x & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -x & -x & -1-x \\ \cdot & \cdot & x & x & x & 1+x & x & x & x & \cdot & \cdot & -x & -x & -1-x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x & x & 1+x & x & x & \cdot & \cdot & -x & -x & -1-x \\ & & & & & & & & & \ddots & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x & \cdot & -x & -1-x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1+x & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x & 1 & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x & \cdot & 1 & -1 \\ -x & -x & -x & -x & -x & -x & -x & -x & -x & -x & -x & -x & \cdot & \cdot & 1+x \end{pmatrix}.$$

**Definition:** Es sei  $k \geq 0$  und seien  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \{1, \dots, 2n+1\}$ . Dann sei  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$  die Untermatrix von  $A_n$ , die durch Streichen der Spalten  $1, 2, \dots, k$  und Zeilen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  entsteht. Entsprechend sei  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}'$  die Untermatrix von  $A_{n-1}$ , die durch Streichen der Spalten  $1, 2, \dots, k$  und Zeilen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  entsteht (für  $\lambda_i \leq 2n-1$ ).

**Definition:** Für  $n \geq 3$  definieren wir die folgenden Hilfsmatrizen.

$$\begin{aligned} B_n &:= \text{del}(A_n, 1, 1) = (1), \\ C_n &:= \text{del}(A_n, 2, 1) = (2), \\ D_n &:= \text{del}(A_n, 3, 1) = (3), \\ E_n &:= \text{del}(A_n, 4, 1) = (4), \\ F_n &:= \text{del}(A_n, 2n+1, 1) = (2n+1), \\ G_n &:= \text{del}(A_n, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad H_n := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad I_n := \begin{pmatrix} 1 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \\ J_n &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad K_n := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad L_n := \begin{pmatrix} 2 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \\ M_n &:= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad N_n := \begin{pmatrix} 3 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \quad O_n := \begin{pmatrix} 4 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \\ P_n &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Q_n := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad R_n := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad S_n := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \\ T_n &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad U_n := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad V_n := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \quad W_n := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \quad X_n := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \\ M_{2345,n} &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad M_{2346,n} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad M_{234n,n} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{2356,n} &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad M_{235n,n} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \quad M_{236n,n} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \\
M_{2456,n} &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad M_{245n,n} := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \quad M_{246n,n} := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \quad M_{256n,n} := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Hilfsmatrizen haben folgende Größen:

$$\begin{aligned}
A_n &\in M_{2n+1}, \\
B_n, C_n, D_n, E_n, F_n &\in M_{2n}, \\
G_n, H_n, I_n, J_n, \dots, O_n &\in M_{2n-1}, \\
P_n, Q_n, R_n, S_n, \dots, X_n &\in M_{2n-2}, \\
M_{2345,n}, M_{2346,n}, \dots, M_{236n,n} &\in M_{2n-3}.
\end{aligned}$$

**Lemma 3.7.1** Sei  $k \geq 0$  und seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \{3, 4, \dots, 2n+1\}$ . Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \text{del}(A_n, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ k+2 \end{pmatrix}) \stackrel{!}{=} \text{del}(A_{n-1}, \begin{pmatrix} \lambda_1 - 2 \\ \vdots \\ \lambda_k - 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ k \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 2 \\ \vdots \\ \lambda_k - 2 \end{pmatrix}'. \quad (3.7.4)$$

**Beweis:** Streichen wir die ersten beiden Spalten und Zeilen der Matrix  $A_n$ , so erhalten wir die Matrix  $A_{n-1}$ . Ein zusätzliches Streichen der Spalten  $3, \dots, k+2$  und Zeilen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  in  $A_n$  entspricht dann dem Streichen der Zeilen  $1, \dots, k$  und Spalten  $\lambda_1 - 2, \dots, \lambda_k - 2$  in  $A_{n-1}$ .  $\square$

Im folgenden Lemma entwickeln wir mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz jede Hilfsmatrix nach der ersten Spalte. Zur Vereinfachung lassen wir oft bei der Determinante einer Hilfsmatrix die Determinantenstriche  $|\dots|$  und den Index  $n$  weg. Hilfsmatrizen mit dem Index  $n-1$  markieren wir mit einem Strich:

$$A := |A_n|, \quad A' := |A_{n-1}|, \quad B := |B_n|, \quad B' := |B_{n-1}|, \quad \dots$$

**Lemma 3.7.2** Für  $n \geq 4$  gelten:

$$\begin{aligned}
A &= (1+x)B - xC + xD - xE - xF, \\
B &= (1+x)A' - xG + xH + xI, \\
C &= xA' - xJ + xK + xL, \\
D &= xG - (1+x)J + xM + xN, \\
E &= xH - (1+x)K + xM + xO, \\
F &= xI - (1+x)L + xN - xO, \\
G &= xB' - xC' + xD' - xE' - xF', \\
H &= -C',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= -F', \\
J &= xB' - xP + xQ - xR - xS, \\
K &= xC' - (1+x)P + xT - xU - xV, \\
L &= xF' - (1+x)S + xV - xW + xX, \\
M &= xC' - xP + xT - xU - xV, \\
N &= xF' - xS + xV - xW + xX, \\
O &= V, \\
P &= -xM_{2345} + xM_{2346} + xM_{234n}, \\
Q &= -(1+x)M_{2345} + xM_{2356} + xM_{235n}, \\
R &= -(1+x)M_{2346} + xM_{2356} + xM_{236n}, \\
S &= -(1+x)M_{234n} + xM_{235n} - xM_{236n}, \\
T &= -xM_{2345} + xM_{2456} + xM_{245n}, \\
U &= -xM_{2346} + xM_{2456} + xM_{246n}, \\
V &= -xM_{234n} + xM_{245n} - xM_{246n}, \\
W &= -xM_{235n} + (1+x)M_{245n} - xM_{256n}, \\
X &= -xM_{236n} + (1+x)M_{246n} - xM_{256n}, \\
M_{2345} &= -xP' + xQ' - xR' - xS', \\
M_{2346} &= -(1+x)P' + xT' - xU' - xV', \\
M_{234n} &= -(1+x)S' + xV' - xW' + xX', \\
M_{2356} &= -xP' + xT' - xU' - xV', \\
M_{235n} &= -xS' + xV' - xW' + xX', \\
M_{236n} &= V', \\
M_{2456} &= -xP', \\
M_{245n} &= -xS', \\
M_{246n} &= -xV', \\
M_{256n} &= -xV'.
\end{aligned}$$

**Beweis:** Wir entwickeln  $A_n$  nach der ersten Spalte und erhalten die erste Gleichung des Lemmas.

$$|A_n| = (1+x) \cdot |B_n| - x \cdot |C_n| + x \cdot |D_n| - x \cdot |E_n| + (-x) \cdot |F_n|.$$

Bei den weiteren Hilfsmatrizen kommt oft Gleichung (3.7.4) ins Spiel, beispielsweise ist

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = |(\ )'| = |A_{n-1}| = A'.$$

$$|B_n| = |(1)| = (1+x) \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| - x \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| - (-x) \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= |A_{n-1}| - x \cdot |G_n| + x \cdot |H_n| + x \cdot |I_n|,$$

$$|C_n| = |(2)| = x \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| - x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| - (-x) \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= x \cdot |A_{n-1}| - x \cdot |J_n| + x \cdot |K_n| + x \cdot |L_n|,$$

$$|D_n| = |(3)| = x \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| - (1+x) \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| - (-x) \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= x \cdot |G_n| - (1+x) \cdot |J_n| + x \cdot |M_n| + x \cdot |N_n|,$$

$$|E_n| = |(4)| = x \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| - (1+x) \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| - (-x) \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= x \cdot |H_n| - (1+x) \cdot |K_n| + x \cdot |M_n| + x \cdot |O_n|, \\
|F_n| &= |(2n+1)| = x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2n+1 \end{vmatrix} - (1+x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 2n+1 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 2n+1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 4 \\ 2n+1 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot |I_n| - (1+x) \cdot |L_n| + x \cdot |N_n| - x \cdot |O_n|.
\end{aligned}$$

Wenn wir die ersten drei Spalten von  $A_n$  streichen, so sind die zweite und dritte Zeile identisch. Daher können wir bei der Berechnung von  $|G_n|$  die Gleichung (3.7.4) gleich dreimal anwenden.

$$\begin{aligned}
|G_n| &= \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{vmatrix} + (-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 2n+1 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot |(1)'| - x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2n+1 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot |(1)'| - x \cdot |(2)'| + x \cdot |(3)'| - x \cdot |(4)'| - x \cdot |(2n-1)'| \\
&= xB' - xC' + xD' - xE' - xF'.
\end{aligned}$$

Weil nach dem Streichen der ersten drei Spalten von  $A_n$  die zweite und dritte Zeile identisch sind, verschwindet eine Determinante, wenn weder zweite noch dritte Zeile gestrichen werden.

$$\begin{aligned}
|H_n| &= \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} - (1+x) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} + (-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 2n+1 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot |(2)'| - (1+x) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} + (-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 2n+1 \end{vmatrix} \\
&= xC' - (1+x) \cdot |(2)'| + x \cdot 0 - x \cdot 0 - x \cdot 0 = -C', \\
|I_n| &= \begin{vmatrix} 1 \\ 2n+1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2n+1 \end{vmatrix} - (1+x) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 2n+1 \end{vmatrix} \\
&\quad + x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 2n+1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 2n+1 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 6 \\ 2n+1 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot |(2n-1)'| - (1+x) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2n+1 \end{vmatrix} + x \cdot 0 - x \cdot 0 + x \cdot 0 = xF' - (1+x)F' \\
&= -F', \\
|J_n| &= \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{vmatrix} + (-x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 2n+1 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot |(1)'| - x \cdot |P_n| + x \cdot |Q_n| - x \cdot |R_n| - x \cdot |S_n| \\
&= xB' - xP + xQ - xR - xS, \\
|K_n| &= \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} - (1+x) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} + (-x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 2n+1 \end{vmatrix} \\
&= x \cdot |(2)'| - (1+x) \cdot |P_n| + x \cdot |T_n| - x \cdot |U_n| - x \cdot |V_n| \\
&= xC' - (1+x)P + xT - xU - xV, \\
|L_n| &= \begin{vmatrix} 2 \\ 2n+1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2n+1 \end{vmatrix} - (1+x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 2n+1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +x \cdot \binom{2}{4}_{2n+1} - x \cdot \binom{2}{5}_{2n+1} + x \cdot \binom{2}{6}_{2n+1} \\
& = xF' - (1+x)S + xV - xW + xX, \\
|M_n| & = \binom{3}{4} = x \cdot \binom{1}{3} - x \cdot \binom{2}{3}_4 + x \cdot \binom{3}{4}_5 - x \cdot \binom{3}{4}_6 + (-x) \cdot \binom{3}{4}_{2n+1} \\
& = x \cdot \binom{1}{2}_4 - x \cdot |P_n| + x \cdot \binom{2}{4}_5 - x \cdot \binom{2}{4}_6 - x \cdot \binom{2}{4}_{2n+1} \\
& = xC' - xP + xT - xU - xV, \\
|N_n| & = \binom{3}{2n+1} = x \cdot \binom{1}{3}_{2n+1} - x \cdot \binom{2}{3}_{2n+1} \\
& + x \cdot \binom{3}{4}_{2n+1} - x \cdot \binom{3}{5}_{2n+1} + x \cdot \binom{3}{6}_{2n+1} \\
& = x \cdot \binom{1}{2}_{2n+1} - x \cdot |S_n| + x \cdot \binom{2}{4}_{2n+1} - x \cdot \binom{2}{5}_{2n+1} + x \cdot \binom{2}{6}_{2n+1} \\
& = xF' - xS + xV - xW + xX, \\
|O_n| & = \binom{4}{2n+1} = x \cdot \binom{1}{4}_{2n+1} - x \cdot \binom{2}{4}_{2n+1} + (1+x) \cdot \binom{3}{4}_{2n+1} \\
& - x \cdot \binom{4}{5}_{2n+1} + x \cdot \binom{4}{6}_{2n+1} \\
& = x \cdot 0 - xV + (1+x) \cdot \binom{2}{4}_{2n+1} - x \cdot 0 + x \cdot 0 = -xV + (1+x)V \\
& = V.
\end{aligned}$$

Bei den Berechnungen von  $P_n$  bis  $X_n$  handelt es sich jeweils nur um eine Anwendung des Entwicklungssatzes über die erste Spalte. Es wird weder vereinfacht noch umgeformt.

$$\begin{aligned}
|P_n| & = \binom{2}{3}_4 = -x \cdot \binom{2}{3}_5 + x \cdot \binom{2}{3}_6 - (-x) \cdot \binom{2}{3}_{2n+1} \\
& = -xM_{2345} + xM_{2346} + xM_{234n}, \\
|Q_n| & = \binom{2}{3}_5 = -(1+x) \cdot \binom{2}{3}_6 + x \cdot \binom{2}{3}_7 - (-x) \cdot \binom{2}{3}_{2n+1}, \\
|R_n| & = \binom{2}{3}_6 = -(1+x) \cdot \binom{2}{3}_7 + x \cdot \binom{2}{3}_8 - (-x) \cdot \binom{2}{3}_{2n+1}, \\
|S_n| & = \binom{2}{3}_{2n+1} = -(1+x) \cdot \binom{2}{3}_{2n+2} + x \cdot \binom{2}{3}_{2n+3} - x \cdot \binom{2}{3}_{2n+1},
\end{aligned}$$

$$|T_n| = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{vmatrix} = -x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{vmatrix} - (-x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2n+1 \end{vmatrix},$$

$$|U_n| = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} = -x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{vmatrix} - (-x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2n+1 \end{vmatrix},$$

$$|V_n| = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 2n+1 \end{vmatrix} = -x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2n+1 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2n+1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2n+1 \end{vmatrix},$$

$$|W_n| = \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \\ 2n+1 \end{vmatrix} = -x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2n+1 \end{vmatrix} + (1+x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2n+1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 2n+1 \end{vmatrix},$$

$$|X_n| = \begin{vmatrix} 2 \\ 6 \\ 2n+1 \end{vmatrix} = -x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 2n+1 \end{vmatrix} + (1+x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2n+1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 2n+1 \end{vmatrix}.$$

Werden die ersten fünf Spalten von  $A_n$  gestrichen, so sind die ersten drei Zeilen identisch. Wir nutzen dies aus, indem wir ein fehlendes Zeilenpaar  $(2, 3)$  durch ein fehlendes Zeilenpaar  $(1, 2)$  ersetzen. Auf die Matrix, in der die Zeilen 1 und 2 fehlen, können wir dann Formel (3.7.4) anwenden.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{vmatrix} &= -x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \end{vmatrix} + (-x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2n+1 \end{vmatrix} \\ &= -x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \end{vmatrix} + (-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2n+1 \end{vmatrix} \\ &= -x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}' + x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix}' - x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{vmatrix}' + (-x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 2n-1 \end{vmatrix}' \\ &= -xP' + xQ' - xR' - xS', \\ \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} &= -(1+x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{vmatrix} + (-x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 2n+1 \end{vmatrix} \\ &= -(1+x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}' + x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{vmatrix}' - x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix}' + (-x) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 2n-1 \end{vmatrix}' \\ &= -(1+x)P' + xT' - xU' - xV', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| &= -(1+x) \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| + x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| - x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| + x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -(1+x) \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| + x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| - x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| + x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -(1+x)S' + xV' - xW' + xX', \\
\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right| &= -x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right| - x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right| + (-x) \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| - x \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right| - x \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| - x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right| - x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -xP' + xT' - xU' - xV', \\
\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| &= -x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| - x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| - x \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| - x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -xS' + xV' - xW' + xX', \\
\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| &= -x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| + (1+x) \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| - x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| + x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| + (1+x) \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| - x \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| + x \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2n-1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -xV' + (1+x)V' - x \cdot 0 + x \cdot 0 = V'.
\end{aligned}$$

Sind die ersten fünf Spalten von  $A_n$  entfernt, so sind die erste und dritte Zeile identisch. Werden sowohl die erste als auch die dritte Zeile nicht entfernt, verschwindet die Determinante.

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = -x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right| - x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right| + (-x) \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= -x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}' + x \cdot 0 - x \cdot 0 + (-x) \cdot 0 = -xP', \\
\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| &= -x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| - x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| + x \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 2n-1 \end{vmatrix}' + x \cdot 0 - x \cdot 0 + x \cdot 0 = -xS', \\
\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| &= -x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| + (1+x) \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| - x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| + x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 2n-1 \end{vmatrix}' + x \cdot 0 - x \cdot 0 + x \cdot 0 = -xV', \\
\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| &= -x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| + x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| - x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| + x \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \right| \\
&= -x \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 2n-1 \end{vmatrix}' + x \cdot 0 - x \cdot 0 + x \cdot 0 = -x \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 2n-1 \end{vmatrix}' = -xV'.
\end{aligned}$$

□

**Satz 3.7.3** Wir definieren die folgenden Matrizen.

$$\begin{aligned}
M'_{a,b} &:= \begin{pmatrix} 1+2x & -2x^2 & x(2x-1) & -x^2 & x^2 & x(2x-1) \\ 1+x & -x^2 & x(x-1) & -x^2 & x^2 & x(x-1) \\ x & -x^2 & x^2 & 0 & 0 & x^2 \\ 0 & -x & 0 & x^2 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2x \end{pmatrix}, \\
M''_{a,b} &:= \begin{pmatrix} 2x^2 & 2x^3 & -2x^3 & -xy & -2x^3 & 2x^3 & 2x^2 & x^2(x-1) & -x^2(x-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x^2 & 2x^3 & -2x^3 & -xy & -2x^3 & 2x^3 & 2x^2 & -x^2(1-x) & x^2(1-x) \\ xy & x^2y & -x^2y & x & -x^2y & x^2y & 0 & x^2 & -x^2 \\ -xy & -x^2y & x^2y & -x & x^2y & -x^2y & 0 & -x^2 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & z' & 0 & 0 & -2xy & xz & -xz \end{pmatrix}, \\
M'''_{a,b} &:= \begin{pmatrix} -x & -x^2 & x^2 & -x & x^2 & -x^2 & 0 & -x^2 & x^2 \\ x & -xy & xy & x & x^2 & -x^2 & 0 & -x^2 & x^2 \\ 1+2x & 0 & 0 & 0 & -x & x & 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+2x & 0 & 0 & -2x & x & -x \\ 0 & -x^2 & x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & -x^2 & x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & x^2 & -x^2 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & 0 & x^2 & -x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2x & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

dabei sei  $y := 1 + x$ ,  $z := 1 + 2x - x^2$  und  $z' := 1 + 4x + x^2$ . Ferner seien

$$v'_{a,b} := \begin{pmatrix} 1 - 6x^2 + x^4 \\ 1 - 3x^2 \\ -3x^2 + x^4 \\ x^2 + x^4 \\ -x - x^2 + 3x^3 - x^4 \\ 1 + 4x + 2x^2 - 4x^3 + x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 6x^2 + x^4 \\ 1 - 3x^2 \\ -x^2(3 - x^2) \\ x^2(1 + x^2) \\ -x(1 - x)z \\ z^2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$v''_{a,b} := \begin{pmatrix} -x^2 - x \\ x \\ -x \\ 1 + 4x + x^2 \\ -x^3 \\ -x^2 \\ x + 2x^2 - x^3 \\ -x - 2x^2 - x^3 \\ -2x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy \\ x \\ -x \\ z' \\ -x^3 \\ -x^2 \\ xz \\ -xy^2 \\ -2x^2 \end{pmatrix}.$$

Aus diesen Matrizen und Vektoren bauen wir nun  $M_{a,b}$  und  $v_{a,b}$  zusammen:

$$M_{a,b} := \left( \begin{array}{c|c} M'_{a,b} & M''_{a,b} \\ \hline 0 & M'''_{a,b} \end{array} \right), \quad v_{a,b} := \begin{pmatrix} v'_{a,b} \\ v''_{a,b} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle  $n \geq 3$ :

$$\det(A_n) = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0) \cdot M_{a,b}^{n-3} \cdot v_{a,b}. \quad (3.7.5)$$

**Beweis:** Wir formen zuerst die Gleichungen von Lemma 3.7.2 so um, daß die Determinanten der Hilfsmatrizen mit dem Index  $n$  durch Determinanten der Hilfsmatrizen mit dem Index  $n - 1$  ausgedrückt werden.

**Erster Schritt:** Umformung von  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  und  $X$ .

$$\begin{aligned} P &= -xM_{2345} + xM_{2346} + xM_{234n} = -x \left( -xP' + xQ' - xR' - xS' \right) \\ &\quad + x \left( -(1+x)P' + xT' - xU' - xV' \right) + x \left( -(1+x)S' + xV' - xW' + xX' \right) \\ &= -xP' - x^2Q' + x^2R' - xS' + x^2T' - x^2U' - x^2W' + x^2X', \\ Q &= -(1+x)M_{2345} + xM_{2356} + xM_{235n} = -(1+x) \left( -xP' + xQ' - xR' - xS' \right) \\ &\quad + x \left( -xP' + xT' - xU' - xV' \right) + x \left( -xS' + xV' - xW' + xX' \right) \\ &= xP' - x(1+x)Q' + x(1+x)R' + xS' + x^2T' - x^2U' - x^2W' + x^2X', \\ R &= -(1+x)M_{2346} + xM_{2356} + xM_{236n} \\ &= -(1+x) \left( -(1+x)P' + xT' - xU' - xV' \right) + x \left( -xP' + xT' - xU' - xV' \right) + xV' \\ &= (1+2x)P' - xT' + xU' + 2xV', \\ S &= -(1+x)M_{234n} + xM_{235n} - xM_{236n} \\ &= -(1+x) \left( -(1+x)S' + xV' - xW' + xX' \right) + x \left( -xS' + xV' - xW' + xX' \right) - xV' \\ &= (1+2x)S' - 2xV' + xW' - xX', \\ T &= -xM_{2345} + xM_{2456} + xM_{245n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -x(-xP' + xQ' - xR' - xS') + x(-xP') + x(-xS') \\
&= -x^2Q' + x^2R', \\
U &= -xM_{2346} + xM_{2456} + xM_{246n} \\
&= -x(-(1+x)P' + xT' - xU' - xV') + x(-xP') + x(-xV') \\
&= xP' - x^2T' + x^2U', \\
V &= -xM_{234n} + xM_{245n} - xM_{246n} \\
&= -x(-(1+x)S' + xV' - xW' + xX') + x(-xS') - x(-xV') \\
&= xS' + x^2W' - x^2X', \\
W &= -xM_{235n} + (1+x)M_{245n} - xM_{256n} \\
&= -x(-xS' + xV' - xW' + xX') + (1+x)(-xS') - x(-xV') \\
&= -xS' + x^2W' - x^2X', \\
X &= -xM_{236n} + (1+x)M_{246n} - xM_{256n} = -xV' + (1+x)(-xV') - x(-xV') \\
&= -2xV'.
\end{aligned}$$

**Zweiter Schritt:** Umformung von  $J$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  und  $O$ .

$$\begin{aligned}
J &= xB' - xP + xQ - xR - xS = xB' \\
&\quad + x^2P' + x^3Q' - x^3R' + x^2S' - x^3T' + x^3U' + x^3W' - x^3X' \\
&\quad + x^2P' - x^2(1+x)Q' + x^2(1+x)R' + x^2S' + x^3T' - x^3U' - x^3W' + x^3X' \\
&\quad - x(1+2x)P' + x^2T' - x^2U' - 2x^2V' \\
&\quad - x(1+2x)S' + 2x^2V' - x^2W' + x^2X' \\
&= xB' - xP' - x^2Q' + x^2R' - xS' + x^2T' - x^2U' - x^2W' + x^2X', \\
K &= xC' - P - xP + (xT) + (-xU) + (-xV) = xC' \\
&\quad - P + x^2P' + x^3Q' - x^3R' + x^2S' - x^3T' + x^3U' + x^3W' - x^3X' \\
&\quad + (-x^3Q' + x^3R') + (-x^2P' + x^3T' - x^3U') + (-x^2S' - x^3W' + x^3X') \\
&= xC' - P = xC' + xP' + x^2Q' - x^2R' + xS' - x^2T' + x^2U' + x^2W' - x^2X', \\
L &= xF' - S + (-xS) + (xV) + (-xW) + xX \\
&= xF' - S + (-x(1+2x)S' + 2x^2V' - x^2W' + x^2X') \\
&\quad + (x^2S' + x^3W' - x^3X') + (x^2S' - x^3W' + x^3X') - 2x^2V' \\
&\quad xF' - S - xS' - x^2W' + x^2X' \\
&= xF' - (1+3x)S' + 2xV' - x(1+x)W' + x(1+x)X', \\
M &= xC' - xP + (xT) + (-xU) + (-xV) = xC' \\
&\quad + x^2P' + x^3Q' - x^3R' + x^2S' - x^3T' + x^3U' + x^3W' - x^3X' \\
&\quad + (-x^3Q' + x^3R') + (-x^2P' + x^3T' - x^3U') + (-x^2S' - x^3W' + x^3X') \\
&= xC', \\
N &= xF' - xS + xV - xW + xX = xF' + x(-S + V - W + X) \\
&= xF' + x \left( -(1+2x)S' + 2xV' - xW' + xX' \right. \\
&\quad \left. + xS' + x^2W' - x^2X' + xS' - x^2W' + x^2X' - 2xV' \right) \\
&= xF' + x(-S' - xW' + xX') \\
&= xF' - xS' - x^2W' + x^2X', \\
O &= V = xS' + x^2W' - x^2X'.
\end{aligned}$$

**Dritter Schritt:** Umformung von  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  und  $F$ .

$$\begin{aligned}
B &= (1+x)A' - xG + xH + xI \\
&= (1+x)A' - x^2B' + x^2C' - x^2D' + x^2E' + x^2F' - xC' - xF' \\
&= (1+x)A' - x^2B' + x(x-1)C' - x^2D' + x^2E' + x(x-1)F', \\
C &= xA' - xJ + xK + xL = xA' \\
&\quad - x^2B' + x^2P' + x^3Q' - x^3R' + x^2S' - x^3T' + x^3U' + x^3W' - x^3X' \\
&\quad + x^2C' + x^2P' + x^3Q' - x^3R' + x^2S' - x^3T' + x^3U' + x^3W' - x^3X' \\
&\quad + x^2F' - x(1+3x)S' + 2x^2V' - x^2(1+x)W' + x^2(1+x)X' \\
&= xA' - x^2B' + x^2C' + x^2F' + 2x^2P' + 2x^3Q' - 2x^3R' \\
&\quad - x(1+x)S' - 2x^3T' + 2x^3U' + 2x^2V' - x^2(1-x)W' + x^2(1-x)X', \\
D &= xG - J - xJ + xM + (xN) = x^2B' - x^2C' + x^2D' - x^2E' - x^2F' - J \\
&\quad - x^2B' + x^2P' + x^3Q' - x^3R' + x^2S' - x^3T' + x^3U' + x^3W' - x^3X' \\
&\quad + x^2C' + (x^2F' - x^2S' - x^3W' + x^3X') \\
&= x^2D' - x^2E' - J + x^2P' + x^3Q' - x^3R' - x^3T' + x^3U' \\
&= x^2D' - x^2E' - xB' + xP' + x^2Q' - x^2R' + xS' - x^2T' + x^2U' + x^2W' - x^2X' \\
&\quad + x^2P' + x^3Q' - x^3R' - x^3T' + x^3U' \\
&= -xB' + x^2D' - x^2E' + x(1+x)P' + x^2(1+x)Q' - x^2(1+x)R' \\
&\quad + xS' - x^2(1+x)T' + x^2(1+x)U' + x^2W' - x^2X', \\
E &= xH - K - xK + xM + (xO) = -xC' - K \\
&\quad - x^2C' - x^2P' - x^3Q' + x^3R' - x^2S' + x^3T' - x^3U' - x^3W' + x^3X' \\
&\quad + x^2C' + (x^2S' + x^3W' - x^3X') \\
&= -xC' - K - x^2P' - x^3Q' + x^3R' + x^3T' - x^3U' \\
&= -xC' + (-xC' - xP' - x^2Q' + x^2R' - xS' + x^2T' - x^2U' - x^2W' + x^2X') \\
&\quad - x^2P' - x^3Q' + x^3R' + x^3T' - x^3U' \\
&= -2xC' - x(1+x)P' - x^2(1+x)Q' + x^2(1+x)R' \\
&\quad - xS' + x^2(1+x)T' - x^2(1+x)U' - x^2W' + x^2X', \\
F &= xI - L - xL + (xN) - xO = -xF' - L \\
&\quad - x^2F' + x(1+3x)S' - 2x^2V' + x^2(1+x)W' - x^2(1+x)X' \\
&\quad + (x^2F' - x^2S' - x^3W' + x^3X') + (-x^2S' - x^3W' + x^3X') \\
&= -xF' - L + x(1+x)S' - 2x^2V' + x^2(1-x)W' - x^2(1-x)X' \\
&= -xF' + \left( -xF' + (1+3x)S' - 2xV' + x(1+x)W' - x(1+x)X' \right) \\
&\quad + x(1+x)S' - 2x^2V' + x^2(1-x)W' - x^2(1-x)X' \\
&= -2xF' + (1+4x+x^2)S' - 2x(1+x)V' + x(1+2x-x^2)W' \\
&\quad - x(1+2x-x^2)X'.
\end{aligned}$$

**Vierter Schritt:** Umformung von  $A$ .

$$\begin{aligned}
A &= B + xB - xC + xD - xE - xF \\
&= (1+x)A' - x^2B' + x(x-1)C' - x^2D' + x^2E' + x(x-1)F' \\
&\quad + x(1+x)A' - x^3B' + x^2(x-1)C' - x^3D' + x^3E' + x^2(x-1)F' \\
&\quad - x^2A' + x^3B' - x^3C' - x^3F' - 2x^3P' - 2x^4Q' + 2x^4R' \\
&\quad + x^2(1+x)S' + 2x^4T' - 2x^4U' - 2x^3V' + x^3(1-x)W' - x^3(1-x)X' \\
&\quad - x^2B' + x^3D' - x^3E' + x^2(1+x)P' + x^3(1+x)Q' - x^3(1+x)R'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x^2 S' - x^3(1+x)T' + x^3(1+x)U' + x^3 W' - x^3 X' \\
& + 2x^2 C' + x^2(1+x)P' + x^3(1+x)Q' - x^3(1+x)R' \\
& + x^2 S' - x^3(1+x)T' + x^3(1+x)U' + x^3 W' - x^3 X' \\
& + 2x^2 F' - (x+4x^2+x^3)S' + 2x^2(1+x)V' - x^2(1+2x-x^2)W' \\
& + x^2(1+2x-x^2)X' \\
= & (1+2x)A' - 2x^2 B' + (x^2-x+x^3-x^2-x^3+2x^2)C' + (-x^2-x^3+x^3)D' \\
& + (x^2+x^3-x^3)E' + (x^2-x+x^3-x^2-x^3+2x^2)F' \\
& + (-2x^3+x^2+x^3+x^2+x^3)P' + (-2x^4+x^3+x^4+x^3+x^4)Q' \\
& + (2x^4-x^3-x^4-x^3-x^4)R' \\
& + (x^2+x^3+x^2+x^2-x-4x^2-x^3)S' + (2x^4-x^3-x^4-x^3-x^4)T' \\
& + (-2x^4+x^3+x^4+x^3+x^4)U' + (-2x^3+2x^2+2x^3)V' \\
& + (x^3-x^4+x^3+x^3-x^2-2x^3+x^4)W' \\
& + (-x^3+x^4-x^3-x^3+x^2+2x^3-x^4)X' \\
= & (1+2x)A' - 2x^2 B' + x(2x-1)C' - x^2 D' + x^2 E' + x(2x-1)F' \\
& + 2x^2 P' + 2x^3 Q' - 2x^3 R' - x(1+x)S' - 2x^3 T' + 2x^3 U' + 2x^2 V' \\
& + x^2(x-1)W' - x^2(x-1)X'.
\end{aligned}$$

Die ersten vier Schritte zeigen, daß es ausreicht,  $A, B, C, D, E, F, P, Q, R, S, T, U, V, W$  und  $X$  zu betrachten. Für  $n \geq 4$  können wir nun die Determinanten der Hilfsmatrizen mit dem Index  $n$  durch Determinanten der Hilfsmatrizen mit dem Index  $n-1$  ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} |A_n| \\ |B_n| \\ |C_n| \\ \vdots \\ |W_n| \\ |X_n| \end{pmatrix} = M_{a,b} \cdot \begin{pmatrix} |A_{n-1}| \\ |B_{n-1}| \\ |C_{n-1}| \\ \vdots \\ |W_{n-1}| \\ |X_{n-1}| \end{pmatrix}.$$

Von Hand oder mit Hilfe eines Computeralgebrasystems wie z.B. `Maple` können wir durch Berechnen der Determinanten von  $A_3, B_3, C_3, \dots, X_3$  zeigen, daß

$$\begin{pmatrix} |A_3| \\ |B_3| \\ |C_3| \\ \vdots \\ |W_3| \\ |X_3| \end{pmatrix} = v_{a,b}.$$

Damit gilt die Behauptung des Satzes. □

**Corollar 3.7.4** *Der Nenner der 2-Wachstumsfunktion von  $L_k$  für  $k \geq 4$  lautet*

$$e_1^t \cdot M_{a,b}^{k-4} \cdot v_{a,b}.$$

### 3.8 Algorithmus zur Determinantenberechnung

In diesem Kapitel berechnen wir Determinanten von Bandmatrizen, indem wir mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes lineare Abhängigkeiten von Determinanten von Untermatrizen auflisten und daraus ein lineares Gleichungssystem gewinnen. Aus diesem Gleichungssystem erhalten wir eine Wachstumsmatrix, die das Wachstum der Determinanten beschreibt.



Dieser Vorgang läßt sich automatisieren. Mit Hilfe einer selbstentwickelten Software ist es möglich, aus der Definition einer Bandmatrix eine Wachstumsmatrix und einen Initialvektor zu gewinnen. Dazu geben wir einen Bandmatrizentyp und Regeln an, mit deren Hilfe die Software entscheiden kann, ob eine Determinante gleich Null ist oder ob in einer Matrix  $A_n$  Zeilen und Spalten so entfernt worden sind, daß die Matrix  $A_{n-1}$  vorliegt.

Zur Berechnung der Determinante der Bandmatrix  $\text{band}((x, x, x, 1 + x, x, x, x), n)$  liefert das Programm eine  $35 \times 35$ -Wachstumsmatrix mit Einträgen aus  $\mathbb{Z}[x]$ , siehe Abschnitt 3.3.

Mit Hilfe dieser Software versuchten wir, eine Matrix zur Generierung der Determinanten zur Generierung des Zählers des Residuums an der Stelle 1 der 3-Wachstumsfunktion einer Spiegelungsgruppe  $G_{r,s}$  einer Dodekaederkette, siehe Kapitel 4, zu finden. Die Software fand 42465 Gleichungen, konnte aufgrund von Speicherplatzmangel aber keine  $42465 \times 42465$ -Matrix mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}[x]$  generieren.

Wir vermuten, daß es Matrizen gibt, die Zähler- und Nennerpolynome der 3-Wachstumsfunktionen der Dodekaederketten liefern.



## Kapitel 4

# Residuen von Polyederkettenwachstumsfunktionen

In diesem Kapitel betrachten wir Coxetergruppen, die als Spiegelungsgruppen auf dem hyperbolischen Raum  $\mathbb{H}^3$  operieren. Wir untersuchen, ob es einen Zusammenhang zwischen dem Volumen des Fundamentalbereichs und dem Residuum der 3-Wachstumsfunktion an der Stelle 1 gibt.

In den Abschnitten 4.2 bis 4.5 konzentrieren wir uns auf eine spezielle Serie rechtwinkliger Coxetergruppen, deren Fundamentalbereich im  $\mathbb{H}^3$  eine Dodekaederkette ist. Wachstumsmatrizen dieser Gruppen berechnen wir nicht wie in Kapitel 2 algebraisch, sondern geometrisch. Den Zusammenhang zwischen geometrischer und algebraischer Betrachtungsweise behandeln wir in Abschnitt 4.1.

In den Abschnitten 4.6 und 4.7 betrachten wir Residuen der 3-Wachstumsfunktionen weiterer Serien von Spiegelungsgruppen im  $\mathbb{H}^3$ .

Das Volumen  $\text{vol}(M)$  ist eine wichtige Invariante einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit  $M$ . In hyperbolischen Räumen gerader Dimension können wir das Volumen von  $M$  oft in einer Wachstumsfunktion der Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$  von  $M$  an der Stelle 1 ablesen.

Im Artikel [Heckman1995] wird von Heckman folgende einfache Beziehung zwischen dem Volumen eines Coxeterpolytops  $D$  von gerader Dimension und dem Wert an der Stelle 1 der Wachstumsfunktion  $f_{D,\Sigma}(x)$  der zugehörigen Coxetergruppe mit geometrischem Erzeugendensystem  $\Sigma$  hergeleitet:

$$\frac{1}{f_{D,\Sigma}(1)} = \frac{2(-1)^{n/2}}{\text{vol}_n(\mathbb{S}^n)} \cdot \text{vol}_n(D).$$

In hyperbolischen Räumen ungerader Dimension funktioniert dies aber nicht. Wachstumsfunktionen von diskreten Untergruppen des  $\text{Iso}(\mathbb{H}^3)$  besitzen häufig einen einfachen Pol bei 1. Dies ist nicht überraschend, denn die Euler-Charakteristik  $\chi(M)$  einer kompakten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ungerader Dimension ist gleich 0, und bei vielen Wachstumsfunktionen gilt die Formel  $f(1) = 1/\chi(M)$ .

In diesem Kapitel werden die Polstellen von Wachstumsfunktionen von Coxetergruppen, die auf dem  $\mathbb{H}^3$  operieren, betrachtet. Dazu berechnen wir jeweils das Residuum an der Stelle  $x = 1$ . Den Fundamentalbereich bauen wir aus mehreren zueinander kongruenten Polyedern zusammen. Dadurch ist das Volumen des Fundamentalbereichs ein ganzzahliges Vielfaches des Volumens des Grundbausteins.

## 4.1 Geometrische und algebraische Wachstumsfunktionen

In Kapitel 1 haben wir die Wachstumsfunktion einer Gruppe  $G$  mit gegebenem Erzeugendensystem  $\Sigma$  definiert.

Im Folgenden definieren wir die Wachstumsfunktion einer Pflasterung eines topologischen Raumes mit einem ausgezeichneten Pflasterstein (siehe dazu auch [Wagreich1982] und [Rogmann1997]).

**Definition:** Eine *Pflasterung* ist ein Paar  $(X, \mathcal{T})$ , wobei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{T} = (T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine abzählbare Familie abgeschlossener Teilmengen von  $X$  mit folgenden Eigenschaften ist:

- $\mathcal{T}$  überdeckt ganz  $X$ , also  $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ ,
- die Inneren der Mengen  $T_\lambda$  sind paarweise disjunkt.

$\mathcal{T}$  ist die Familie der *Pflastersteine*.

**Definition:** Sei nun  $T_\mu$  einer der Pflastersteine von  $\mathcal{T}$ . Wir definieren induktiv

$$S_0 := \{T_\mu\},$$

$$S_{m+1} := \{T_\lambda \mid T_\mu \notin S_0 \cup \dots \cup S_m \text{ und } T_\mu \cap \left(\bigcup_{P \in S_m} P\right) \neq \emptyset\}$$

für alle  $m \geq 0$ .  $S_m$  heißt die *m-te Schale um  $T_\mu$* .

**Definition:** Falls alle  $S_m$  nur endlich viele Pflastersteine enthalten, wird die *Wachstumsreihe von  $(X, \mathcal{T})$  um  $T_\mu$*  definiert:

$$f_{(X, \mathcal{T}), T_\mu}(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \#S_m x^m \in \mathbb{Z}[[x]].$$

Falls eine diskrete Untergruppe  $G$  von  $\text{Iso}(\mathbb{H}^3)$  auf dem hyperbolischen Raum  $\mathbb{H}^3$  operiert, so gibt es einen Fundamentalbereich  $\mathcal{F}$ . Wir nehmen im Folgenden an, daß  $\mathcal{F}$  ein Polyeder mit nur endlich vielen Ecken ist. Es sei  $\overline{\mathcal{F}}$  der Abschluß des Fundamentalbereichs. Durch die Operation von  $G$  auf  $\mathbb{H}^3$  entsteht eine Pflasterung  $(\mathbb{H}^3, G \cdot \overline{\mathcal{F}})$  des  $\mathbb{H}^3$ .

Sei  $\Sigma := \{\gamma \in G \mid \gamma \overline{\mathcal{F}} \in S_1\}$  ein Erzeugendensystem von  $G$ . Dann gilt

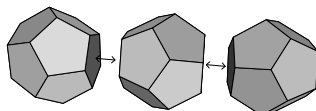
$$f_{G, \Sigma}(x) = f_{(\mathbb{H}^3, G \cdot \overline{\mathcal{F}}), \overline{\mathcal{F}}}(x),$$

siehe auch [Wagreich1982].

Im Gegensatz zu Kapitel 2 berechnen wir in diesem Kapitel Wachstumsfunktionen auf geometrische Weise. Wir ermitteln  $f_{(\mathbb{H}^3, G \cdot \overline{\mathcal{F}}), \overline{\mathcal{F}}}(x)$  für spezielle Spiegelungsgruppen, die auf dem  $\mathbb{H}^3$  operieren.

## 4.2 Dodekaederketten

Genau, wie wir eine Kette aus gewöhnlichen Würfeln zu einem langen Stab bauen, können wir auch  $r$  hyperbolische rechtwinklige Dodekaeder zu einer langen Kette zusammensetzen:



Ein rechtwinkliges Dodekaeder eignet sich ideal als Baustein. Seine Symmetriegruppe operiert transitiv auf den 12 Flächen, auf den 30 Kanten und auf den 20 Ecken. An jeder Kante treffen die beiden anliegenden Flächen in einem Winkel von  $90^\circ$  aufeinander. An jeder Ecke treffen sich genau drei Kanten. Die Ecke eines hyperbolischen rechtwinkligen Dodekaeders besitzt die gleiche Gestalt wie die Ecke eines Euklidischen Würfels. Falls der Euklidische Raum lückenlos mit Würfeln durch Spiegelung an den Flächen gepflastert wird, so treffen sich an jeder Würfecke genau acht Würfel. Wird dagegen der hyperbolische Raum lückenlos mit rechtwinkligen Dodekaedern gepflastert, so treffen sich an jeder Dodekaederecke genau acht Dodekaeder. Am Ende dieser Arbeit befindet sich ein Bild einer  $90^\circ$ -Dodekaederpflasterung im Poincaréschen Kugelmodell. Weitere Informationen zum hyperbolischen rechtwinkligen Dodekaeder sind in [Rogmann1997] enthalten.

Falls nun  $r$  rechtwinklige Dodekaeder zu einer Kette verklebt werden, entsteht ein größeres rechtwinkliges Polyeder, das den hyperbolischen Raum lückenlos pflastert. An jeder Kante treffen sich in der Pflasterung wegen der Rechtwinkligkeit genau vier Polyeder. An jeder Verklebungsfläche gibt es zweimal fünf Fünfecke, die zu fünf Sechsecken verklebt werden.

Die Dodekaederkette besitzt folgende Seitenflächen: An einem Ende liegt eine fünfeckige Seitenfläche, danach folgt ein Ring aus fünf Fünfecken, dann schließen sich  $r - 1$  Ringe mit jeweils fünf Sechsecken an (beim Zusammenkleben entsteht aus jeweils zwei Fünfecken ein Sechseck), dann folgt ein Ring aus fünf Fünfecken und am anderen Ende noch ein Fünfeck. Das entstandene Polyeder besitzt somit  $k = 2 + 2 \cdot 5 + (r - 1) \cdot 5 = 2 + 5(r + 1)$  Seitenflächen,  $m = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 5 + (r - 1) \cdot 5 \cdot 6) = 5 + 25 + (r - 1) \cdot 15 = 30 + 15(r - 1)$  Kanten (an jeder Kante sind zwei Flächen) und  $n = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 5 + (r - 1) \cdot 5 \cdot 6) = 20 + 10(r - 1)$  Ecken (an jeder Ecke treffen sich genau drei Flächen).

$\mathcal{F}_{r,5}$  sei eine solche Dodekaederkette aus  $r$  Dodekaedern.  $G_{r,5} < \text{Iso}(\mathbb{H}^3)$  sei die diskrete Isometriegruppe, die durch Spiegelung an den  $12 + 5(r - 1)$  Seitenflächen von  $\mathcal{F}_{r,5}$  erzeugt wird.  $G_{r,5}$  ist eine Coxetergruppe und  $\mathcal{F}_{r,5}$  ein Fundamentalbereich. Das Fundamentalpolyeder  $\mathcal{F}_{r,5}$  besitzt  $k + m + n = 62 + 30(r - 1)$  Nachbarypolyeder: An jeder Fläche, Kante und Ecke von  $\mathcal{F}_{r,5}$  befindet sich jeweils ein Nachbarypolyeder. Das Erzeugendensystem  $\Sigma_{G_{r,5}}^3$  sind die Elemente von  $G_{r,5}$ , die den Fundamentalbereich auf eines der  $62 + 30(r - 1)$  Nachbarypolyeder abbilden:

$$\Sigma_{G_{r,5}}^3 := \{g \in G_{r,5} \mid \mathcal{F}_{r,5} \cap g\mathcal{F}_{r,5} \neq \emptyset\} \setminus \{1\}.$$

Es gilt  $\#\Sigma_{G_{r,5}}^3 = 62 + 30(r - 1)$ . Das Erzeugendensystem  $\Sigma_{G_{r,s}}^3$  enthält genau die Elemente  $g \in G_{r,s}$  mit der Eigenschaft, daß das Polyeder  $g\mathcal{F}$  eine Ecke, eine Kante oder eine Fläche mit  $g\mathcal{F}$  gemeinsam hat. Weil  $\#\{\text{Ecke, Kante, Fläche}\} = 3$  ist und weil die Menge der Polyeder in den ersten beiden Schalen  $S_0 \cup S_1$  eine konvexe Teilmenge des  $\mathbb{H}^3$  bilden, nennen wir die zugehörige Wachstumsfunktion 3-Wachstumsfunktion von  $\mathcal{F}$ , siehe auch Seite 11.

Wir zeigen in Satz 4.2.2, daß für  $r \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  die Wachstumsfunktion  $f_{G_{r,5}, \Sigma_{G_{r,5}}^3}(x)$  an der Stelle 1 eine einfache Polstelle besitzt. Die zugehörigen Residuen lauten

$$\frac{16}{7}, \frac{72}{59}, \frac{68}{81}, \frac{104}{163}, \frac{86}{167}, \frac{552}{1279}.$$

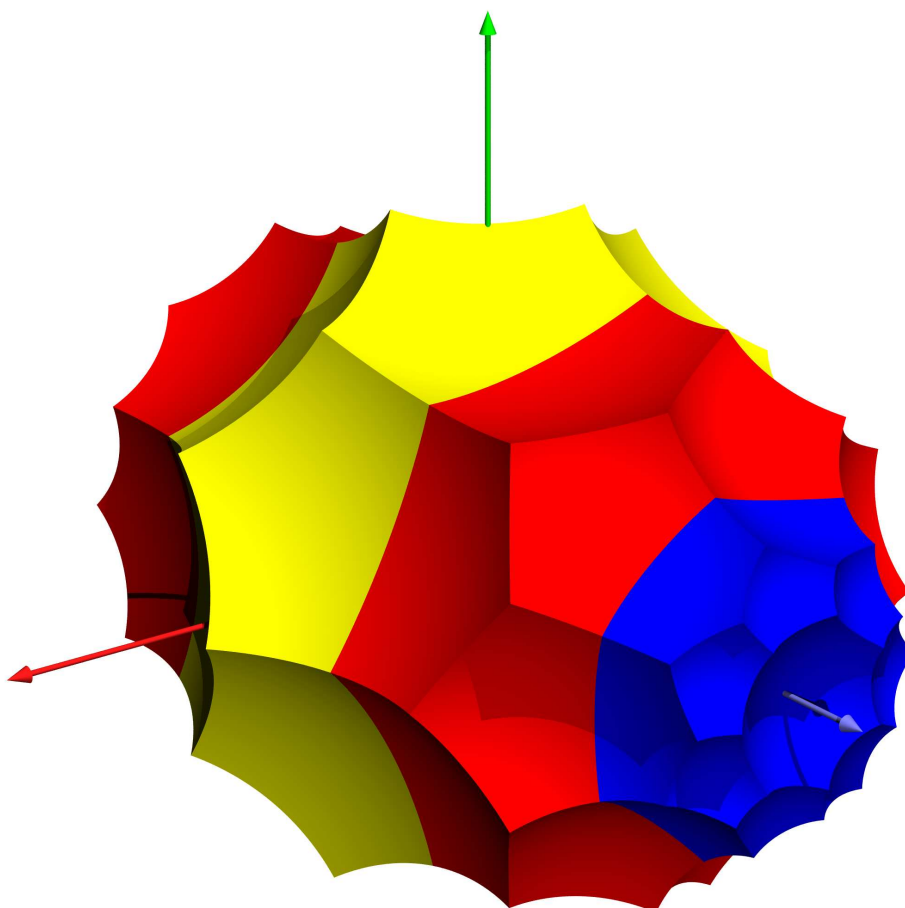
Die bisher beschriebene Dodekaederkette hat eine  $2\pi/5$ -Rotationssymmetrie der Ordnung fünf entlang der Längsachse. Wir können auch „Dodekaederketten“ mit einer Rotationssymmetrie der Ordnung  $s = 6, 7, 8, 9$  oder größer betrachten. Der Grundbaustein  $\mathcal{F}_{r,s}$  ist dann nicht ein Dodekaeder, sondern ein Polyeder mit zwei gegenüberliegenden  $s$ -Ecken und  $2s$  Fünfecken. Eine derart verallgemeinerte Dodekaederkette mit  $2\pi/s$ -Rotationssymmetrie besitzt folgende Seitenflächen: An einem Ende ein  $s$ -Eck, dazu benachbart ein Ring aus  $s$  Fünfecken, danach schließen sich  $r - 1$  Ringe von jeweils  $s$  Sechsecken an, danach folgt ein Ring aus  $s$  Fünfecken und nun am anderen Ende wieder ein  $s$ -Eck.

**Lemma 4.2.1** *Sei  $r \geq 1$  und  $s \geq 5$ . Dann gibt es eine verallgemeinerte Dodekaederkette der Länge  $r$  mit  $2\pi/s$ -Rotationssymmetrie, die an jeder Kante einen Kantenwinkel von  $90^\circ$  besitzt. Diese verallgemeinerte Dodekaederkette pflastert durch Spiegelung an den Seitenflächen den hyperbolischen Raum  $\mathbb{H}^3$  lückenlos.*

**Beweis:** Vor ihrer Einbettung in den  $\mathbb{H}^3$  ist eine verallgemeinerte Dodekaederkette ein abstraktes dreidimensionales Polyeder, das kein Simplex ist und das die Eigenschaft hat, daß sich an jeder Ecke genau drei Flächen treffen. Jeder Kantenwinkel ist rechtwinklig, also gleich  $\pi/2$ . Nach [Andreev1970] und [Andreev1970b, Theorem 2] existiert ein solches Polyeder im  $\mathbb{H}^3$ . Wegen der  $90^\circ$ -Winkel an allen Kanten ist klar, daß ein solches konvexes Polyeder den hyperbolischen Raum lückenlos pflastert.  $\square$

Eine Dodekaederkette mit der Drehsymmetrie  $s = 4$  kann im  $\mathbb{H}^3$  nicht existieren, weil eine solche Kette am Kettenende ein vierkantiges prismatisches Element mit der Winkelsumme  $4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$  besitzt. Dies ist nach [Andreev1970, Theorem 2] nicht zulässig.

Das folgende Bild zeigt eine Dodekaederkette der Länge 5 mit  $2\pi/7$ -Rotationssymmetrie im konformen Kugelmodell des  $\mathbb{H}^3$ . Es ist zu sehen, daß jeweils zwei benachbarte Fünfecke zweier verallgemeinerter Dodekaeder ein Sechseck bilden. Die verallgemeinerten Dodekaeder sind verschieden gefärbt.



Die Dodekaederkette  $\mathcal{F}_{r,s}$  besitzt  $(r+1)s+2$  Flächen,  $3(r+1)s$  Kanten und  $2(r+1)s$  Ecken.

Es sei  $G_{r,s}$  die zugehörige rechtwinklige Coxetergruppe, die durch Spiegelungen an den Seitenflächen von  $\mathcal{F}_{r,s}$  erzeugt wird.  $G_{r,s}$  wird durch

$$G_{r,s} = \langle g_0, \dots, g_{(r+1)s+1} \mid g_0^2 = \dots = g_{(r+1)s+1}^2 = 1, (g_i g_j)^2 = 1 \text{ für } (i, j) \in K_{r,s} \rangle$$

präsentiert. Die Kantenmenge  $K_{r,s}$  lautet

$$\begin{aligned} K_{r,s} = & \bigcup_{j=0}^{s-1} \{ (0, 1+j) \} \\ & \cup \bigcup_{i=0}^{r-1} \bigcup_{j=0}^{s-1} \{ (is+1+j, is+1+(j+1)\bmod s), \\ & \quad (is+1+j, (i+1)s+1+j), \\ & \quad (is+1+j, (i+1)s+1+(j-1)\bmod s) \} \\ & \cup \bigcup_{j=0}^{s-1} \{ (rs+1+j, rs+1+(j+1)\bmod s), (rs+1+j, (r+1)s+1) \}. \end{aligned}$$

**Definition:** Eine Funktion  $f$  heißt *anti-reziprok*, wenn  $f(x) = -f(1/x)$  für alle  $x$ .

**Definition:** Die Folge der *Lucas-Zahlen* wird definiert durch  $L_0 := 1$ ,  $L_1 := 3$  und  $L_k := L_{k-1} + L_{k-2}$  für  $k \geq 2$ . Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* wird definiert durch  $F_0 := 0$ ,  $F_1 := 1$  und  $F_k := F_{k-1} + F_{k-2}$  für  $k \geq 2$ .

Im folgenden Satz zeigen wir, daß Fibonacci- und Lucas-Zahlen im Residuum an der Stelle 1 der 3-Wachstumsfunktion  $f_{r,s}(x)$  von  $G_{r,s}$  auftreten.

**Satz 4.2.2** Für  $s \geq 5$  und  $1 \leq r \leq 30$  ist  $f_{r,s}(x)$  anti-reziprok und besitzt eine einfache Polstelle bei  $x = 1$ . Der Kehrwert des Residuums lautet

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{res}_1(f_{r,s})} &= \frac{s-4}{8} + \frac{3rs}{40} + \frac{(s-4)^2 s}{10} \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(L_k s - L_{k+2})(L_{k+1} s - L_{k+3})} \\ &= \frac{s-4}{8} + \frac{3rs}{40} - \frac{(s-4)sF_r}{10(L_r s - L_{r+2})}. \end{aligned}$$

**Beweis:** In Satz 4.3.1 werden eine Wachstumsmatrix  $A \in M_{5r+8}(\mathbb{Z})$  und ein Initialvektor  $v \in \mathbb{Z}^{5r+8}$  definiert, so daß die 3-Wachstumsfunktion von  $G_{r,s}$  als Quotient zweier Determinanten ausgedrückt wird:

$$f_{r,s}(x) = \frac{\det(1_{5r+8} + (v - A)x)}{\det(1_{5r+8} - Ax)}.$$

Diese Determinanten können beispielsweise mit **Maple** für die angegebenen  $r$  ausgewertet werden. Dabei definieren wir  $A \in M_{5r+8}(\mathbb{Z}[s])$  und  $v \in \mathbb{Z}[s]^{5r+8}$ .  $\square$

**Definition:** Für  $k \in \mathbb{N}_0$  sei  $M_k := L_k s - L_{k+2}$ . Es gelten

$$M_0 = s - 4, \quad M_1 = 3s - 7 \quad \text{und} \quad M_k = M_{k-1} + M_{k-2} \quad \text{für} \quad k \geq 2.$$

In Lemma 4.2.4 zeigen wir die Gleichheit der beiden rechten Seiten der Gleichung in Satz 4.2.2 für beliebiges  $r \in \mathbb{N}$ . Dazu stellen wir das folgende Lemma bereit.

**Lemma 4.2.3** Für  $r \geq 1$  gilt:

$$F_r \cdot M_{r+1} - F_{r+1} \cdot M_r = (-1)^{r+1} \cdot M_0. \quad (4.2.1)$$

**Beweis:** Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang:  $r = 1$ . Es gilt  $F_1 \cdot M_2 - F_2 \cdot M_1 = M_2 - M_1 = (-1)^{1+1} \cdot M_0$ .

Induktionsschritt:  $r \rightarrow r+1$ . Gegeben sei  $F_r \cdot M_{r+1} - F_{r+1} \cdot M_r = (-1)^{r+1} \cdot M_0$ .

$$\begin{aligned} F_{r+1} \cdot \underline{M_{r+2}} - F_{r+2} \cdot M_{r+1} &= F_{r+1} \cdot (M_r + M_{r+1}) - F_{r+2} \cdot M_{r+1} \\ &= F_{r+1} \cdot M_r + (F_{r+1} - F_{r+2}) \cdot M_{r+1} \\ &= F_{r+1} \cdot M_r - F_r \cdot M_{r+1} = -(-1)^{r+1} \cdot M_0 = (-1)^{r+2} \cdot M_0. \end{aligned}$$

$\square$

**Lemma 4.2.4** Für  $r \geq 1$  gilt:

$$(s-4) \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(L_k s - L_{k+2})(L_{k+1} s - L_{k+3})} = -\frac{F_r}{L_r s - L_{r+2}}.$$

**Beweis:** Wir zeigen die Behauptung des Lemmas mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang:  $r = 1$ .

$$(s-4) \cdot \frac{(-1)^1}{M_0 \cdot M_1} = \frac{-F_1}{M_1}.$$

Induktionsschritt:  $r \rightarrow r+1$ .

Die Aussage sei korrekt für  $r$ , d. h.

$$(s-4) \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^{k+1}}{M_k \cdot M_{k+1}} = -\frac{F_r}{M_r}.$$

Mit Lemma 4.2.3 erhalten wir:

$$\begin{aligned} (s-4) \cdot \sum_{k=0}^r \frac{(-1)^{k+1}}{M_k \cdot M_{k+1}} &= -\frac{F_r}{M_r} + \frac{(s-4) \cdot (-1)^{r+1}}{M_r \cdot M_{r+1}} = \frac{-F_r \cdot M_{r+1} + M_0 \cdot (-1)^{r+1}}{M_r \cdot M_{r+1}} \\ &\stackrel{(4.2.1)}{=} \frac{-F_r \cdot M_{r+1} + F_r \cdot M_{r+1} - F_{r+1} \cdot M_r}{M_r \cdot M_{r+1}} = \frac{-F_{r+1}}{M_{r+1}}. \end{aligned}$$

□

Zum Vergleich bestimmen wir im folgenden Lemma die 1-Wachstumsfunktion von  $G_{r,s}$ . Das Standarderzeugendensystem  $\Sigma_{G_{r,s}}$  besteht aus den Spiegelungen an den Seitenflächen des Polyeders  $\mathcal{F}_{r,s}$ .

**Lemma 4.2.5** Für  $r \geq 1$  und  $s \geq 5$  lautet der Kehrwert der 1-Wachstumsfunktion der Coxetergruppe  $G_{r,s}$ :

$$f_{G_{r,s}, \Sigma_{G_{r,s}}^3}(x) = \frac{(1+x)^3}{(1-x)(1+(2-(r+1)s) \cdot x + x^2)}.$$

**Beweis:** Wir benutzen die Formel (2.1.2) auf Seite 12:

$$\frac{1}{f_{G_{r,s}, \Sigma_{G_{r,s}}}(x)} = \sum_{i=0}^w n_i \left( \frac{-x}{1+x} \right)^i.$$

Es ist  $n_0 = 1$ . Die Gruppe  $G_{r,s}$  besitzt  $(r+1)s+2$  Erzeuger in  $\Sigma_{G_{r,s}}$ , somit ist  $n_1 = (r+1)s+2$ . Die Kantenmenge  $K_{r,s}$  besitzt  $3(r+1)s$  Elemente, daher ist  $n_2 = 3(r+1)s$ . An jeder Ecke des Fundamentalbereichs  $\mathcal{F}_{r,s}$  treffen genau drei Flächen aufeinander, und die zugehörigen drei Erzeuger aus  $\Sigma_{G_{r,s}}$  kommutieren paarweise. Deshalb ist  $n_3 = 2(r+1)s$ . Es gibt im Erzeugendensystem  $\Sigma_{G_{r,s}}$  keine vier Elemente, die paarweise kommutieren. Daher ist  $w = 3$ . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{G_{r,s}, \Sigma_{G_{r,s}}^1}(x)} &= 1 - \left( (r+1)s+2 \right) \cdot \frac{x}{1+x} + 3(r+1)s \cdot \frac{x^2}{(1+x)^2} - 2(r+1)s \cdot \frac{x^3}{(1+x)^3} \\ &= \frac{(1+x)^3 - ((r+1)s+2) \cdot x(1+x)^2 + 3(r+1)s \cdot x^2(1+x) - 2(r+1)s \cdot x^3}{(1+x)^3} \\ &= \frac{1 - ((r+1)s-1) \cdot x + ((r+1)s-1) \cdot x^2 - x^3}{(1+x)^3}. \end{aligned}$$

□



**Satz 4.2.6** Für  $r \geq 1$  und  $s \geq 5$  lautet der Kehrwert des Residuums der 1-Wachstumsfunktion von  $G_{r,s}$  an der Stelle 1:

$$\frac{1}{\text{res}_{x=1}(f_{G_{r,s},\Sigma_{G_{r,s}}}(x))} = \frac{s-4}{8} + \frac{rs}{8}.$$

**Beweis:** Nach Lemma 4.2.5 besitzt  $f_{G_{r,s},\Sigma_{G_{r,s}}}(x)$  an der Stelle 1 eine einfache Polstelle. Das Residuum lautet:

$$\text{res}_{x=1}(f_{G_{r,s},\Sigma_{G_{r,s}}}(x)) = -\frac{8}{4-rs-s} = \frac{8}{s-4+rs}.$$

□

Sowohl im Kehrwert des Residuums an der Stelle 1 der 1-Wachstumsfunktion als auch im Kehrwert des Residuums der 3-Wachstumsfunktion taucht für  $r \in \{1, \dots, 30\}$  der von  $r$  unabhängige Summand  $(s-4)/8$  auf.

Die 3-Wachstumsfunktionen der ersten beiden Dodekaederketten mit Drehsymmetrie 5 lauten

$$f_{1,5}(x) = \frac{(1+x)(1+30x+x^2)}{(1-x)(1-30x+x^2)},$$

$$f_{2,5}(x) = \frac{(1+x)(1+40x+228x^2-312x^3-1066x^4-312x^5+228x^6+40x^7+x^8)}{(1-x)(1-50x-432x^2+498x^3+1854x^4+498x^5-432x^6-50x^7+x^8)}.$$

Für  $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  lauten die Kehrwerte der Residuen der 3-Wachstumsfunktion von  $G_{r,s}$  an der Stelle 1:

$$\begin{aligned} 1/\text{res}_{1,s} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{7-5s+s^2}{3s-7}, \\ 1/\text{res}_{2,s} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{44-37s+8s^2}{4s-11}, \\ 1/\text{res}_{3,s} &= \frac{9}{4} \cdot \frac{4-4s+s^2}{7s-18}, \\ 1/\text{res}_{4,s} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{116-133s+35s^2}{11s-29}, \\ 1/\text{res}_{5,s} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{47-61s+17s^2}{18s-47}. \end{aligned}$$

### Dodekaederblock

Im hyperbolischen Raum  $\mathbb{H}^3$  können wir acht rechtwinklige Dodekaeder so anordnen, daß sie eine Ecke gemeinsam haben. Diese acht Dodekaeder bilden ein rechtwinkliges konvexes Polyeder, das wir mit *Dodekaederblock* bezeichnen. Die Spiegelungen an den 42 Seitenflächen eines Dodekaederblockes erzeugen eine rechtwinklige Coxetergruppe. Die 3-Wachstumsfunktion dieser Gruppe lautet:

$$f_{8c}(x) = \frac{(1+x)(1+36x-48x^2+188x^3-1890x^4+188x^5-48x^6+36x^7+x^8)}{(1-x)(1-204x+240x^2-1300x^3+10974x^4-1300x^5+240x^6-204x^7+x^8)}.$$

Die Rechnung führen wir hier nicht explizit durch. Wir erhalten diese Funktion, indem wir zu einem Dodekaederblock durch geometrische Betrachtung verschiedene Typen bestimmen, eine Wachstumsmatrix herleiten und daraus die 3-Wachstumsfunktion gewinnen. Das zugehörige Residuum an der Stelle 1 lautet  $\frac{4}{11}$ .

### 4.3 Polyedertypen einer Dodekaederkette

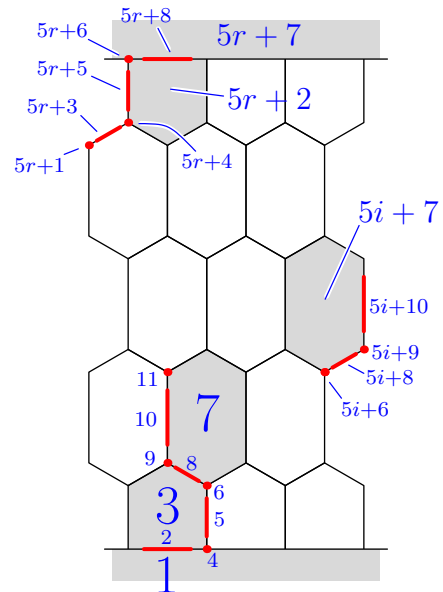
In diesem Abschnitt bestimmen wir eine Wachstumsmatrix zur Berechnung der 3-Wachstumsfunktion einer Dodekaederkette. Obwohl es sich bei der Dodekaederkettenspiegelungsgruppe um eine rechtwinklige Coxetergruppe handelt, greifen wir nicht auf die Überlegungen in Kapitel 2 zurück, sondern stellen die Wachstumsmatrix mit Hilfe geometrischer Betrachtungen auf.

Alle Kantenwinkel der Dodekaederkette sind definitionsgemäß rechtwinklig. Dies hat zur Folge, daß sich in der Dodekaederkettenpflasterung an jeder Kante genau vier Polyeder befinden.

Um die 3-Wachstumsfunktion  $f_{r,s}(x)$  zu bestimmen, betrachten wir die Dodekaederkettenpflasterung, zeichnen eine Dodekaederkette  $\mathcal{F}$  aus und unterteilen die einzelnen Dodekaederketten in  $5r + 8$  verschiedene Typen. Wir untersuchen Schalen von Dodekaederketten um  $\mathcal{F}$ . Anschließend stellen wir eine Wachstumsmatrix  $A = (a_{i,j})_{i,j}$  auf, die besagt, daß eine Dodekaederkette vom Typ  $j$  in der nächsten Schale  $a_{i,j}$  benachbarte Dodekaederketten vom Typ  $i$  besitzt.

Die Oberfläche einer Dodekaederkette besitzt folgenden Aufbau: An einem Ende befindet sich ein  $s$ -Eck. Daran befindet sich ein Ring aus  $s$  Fünfecken. Danach schließen sich  $r - 1$  Ringe mit je  $s$  Sechsecken an. Anschließend folgt wieder ein Ring aus  $s$  Fünfecken, und am anderen Ende befindet sich ein  $s$ -Eck.

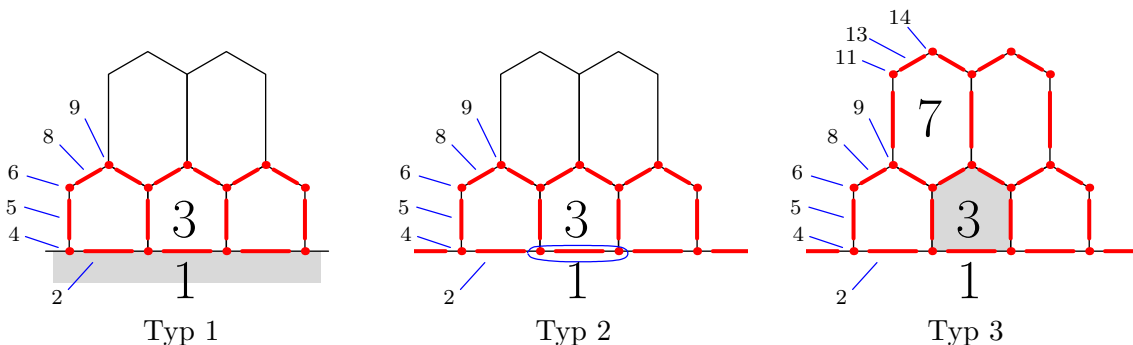
In den Zeichnungen wird die Dodekaederkette senkrecht dargestellt. Der Rand der  $s$ -Ecke wird als waagerechter Strich unten und oben eingezeichnet. Aus der Zeichnung rechts erhalten wir die Oberfläche einer Dodekaederkette mit  $r = 4$ , indem wir links und rechts ausreichend viele Sechsecke hinzufügen und dann den linken und rechten Rand zusammenkleben.



Wir definieren um die ausgezeichnete Dodekaederkette  $\mathcal{F}$  Schalen  $S_k$  von Dodekaederketten:

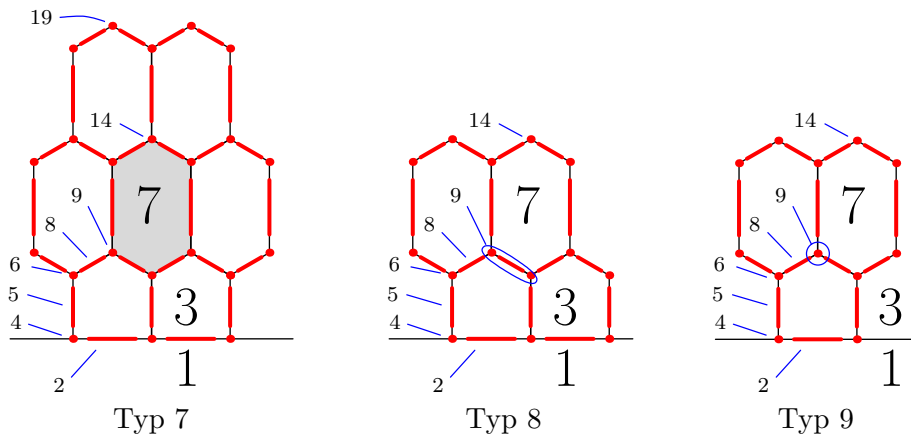
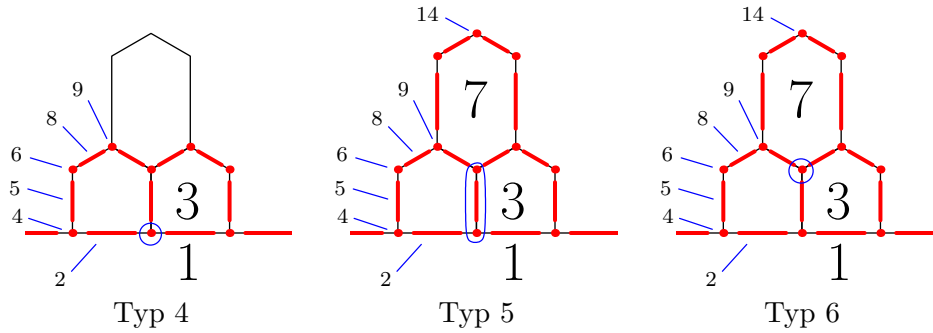
$$S_0 := \{\mathcal{F}\}, \quad S_{k+1} := \{g\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \cap g\mathcal{F} \neq \emptyset, \mathcal{F}' \in S_k, g \in G_{r,s}\} \setminus (S_0 \cup \dots \cup S_k).$$

Die Schale  $S_{k+1}$  enthält diejenigen Dodekaederketten, die mindestens eine Ecke mit einer Dodekaederkette der vorigen Schale  $S_k$  gemeinsam haben. Wir unterscheiden  $5r + 8$  verschiedene Typen von Dodekaederketten. Der Typ gibt in gewisser Weise an, wie eine Dodekaederkette ungleich  $\mathcal{F}$  mit der vorigen Schale verbunden ist. Dadurch kennen wir seine Nachbarn in derselben Schale und können auf die benachbarten Typen in der nächsten Schale schließen.

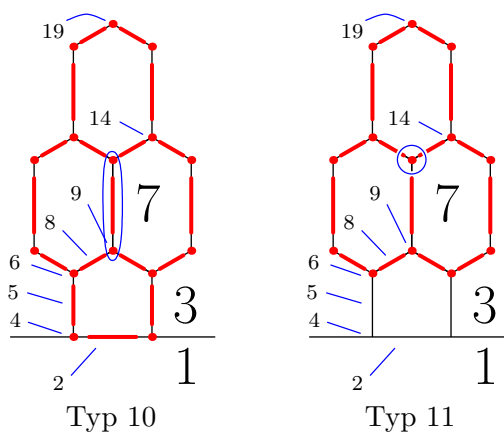


- Typ 1. Eine Dodekaederkette vom Typ 1 hat genau eine  $s$ -Eckseite mit der vorigen Schale gemeinsam. Sie ist in ihrer Schale umgeben von  $s$  Dodekaederketten vom Typ 3 und  $s$  Dodekaederketten vom Typ 5.

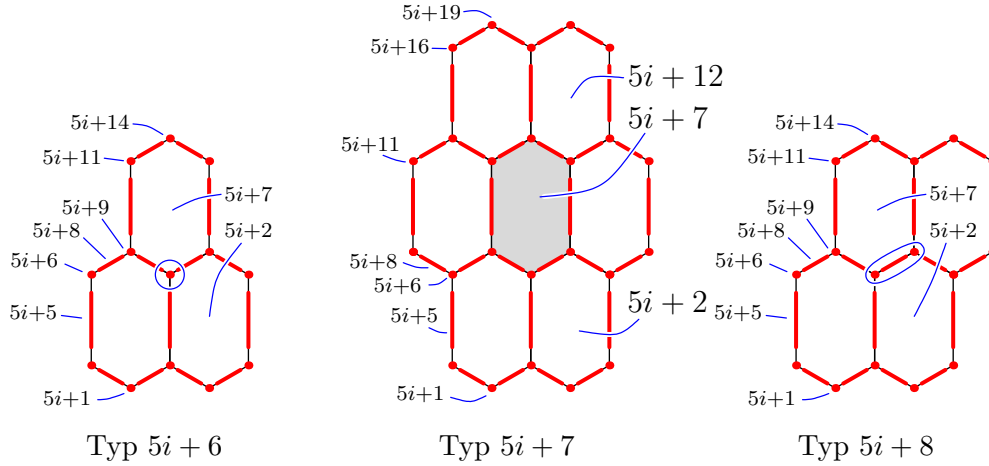
- Typ 2. Dieser Typ hat genau eine Kante eines  $s$ -Ecks mit der vorigen Schale gemeinsam.
- Typ 3. Gemeinsames Fünfeck mit der vorigen Schale.
- Typ 4. Gemeinsame  $s$ -Eckecke mit der vorigen Schale.
- Typ 5. Gemeinsame Fünfeckkante mit der vorigen Schale.
- Typ 6. Gemeinsame Fünfeck-/Fünfeck-/Sechseckecke mit der vorigen Schale.



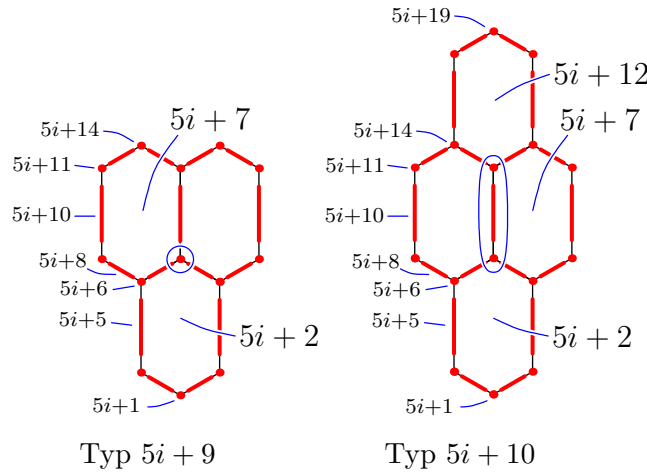
- Typ 7. Gemeinsames Sechseck mit der vorigen Schale.
- Typ 8. Gemeinsame Fünfeck-/Sechseckkante mit der vorigen Schale.
- Typ 9. Gemeinsame Fünfeck-/Sechseck-/Sechseckecke mit der vorigen Schale.
- Typ 10. Dieser Typ hat eine Sechseckkante, die an einer Fünfeckspitze endet, mit der vorigen Schale gemeinsam.
- Typ 11. Dieser Typ hat eine Sechseck-/Sechseck-/Sechseckecke an einer Kante zu einem Fünfeck mit der vorigen Schale gemeinsam.



Zwischen den beiden Enden der Dodekaederkette befinden sich  $r - 1$  Sechseckringe. Dort definieren wir die folgenden Typen.



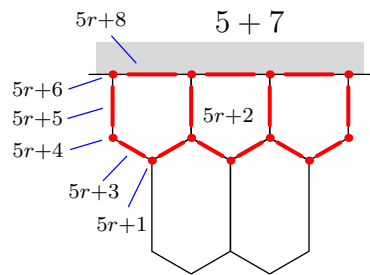
- Typ  $5i + 6$  für  $1 \leq i \leq r - 2$ . Gemeinsame Sechseck-/Sechseck-/Sechseckecke mit der vorigen Schale.
- Typ  $5i + 7$  für  $1 \leq i \leq r - 3$ . Gemeinsames Sechseck mit der vorigen Schale.
- Typ  $5i + 8$  für  $1 \leq i \leq r - 2$ . Gemeinsame Sechseck-/Sechseckkante mit der vorigen Schale.
- Typ  $5i + 9$  für  $1 \leq i \leq r - 2$ . Dieser Typ hat eine Sechseck-/Sechseck-/Sechseckecke mit der vorigen Schale gemeinsam. Er ist zu unterscheiden von Typ  $5i + 6$ .
- Typ  $5i + 10$  für  $1 \leq i \leq r - 3$ . Dieser Typ hat eine Sechseck-/Sechseckkante mit der vorigen Schale gemeinsam. Er ist zu unterscheiden von Typ  $5i + 8$ .



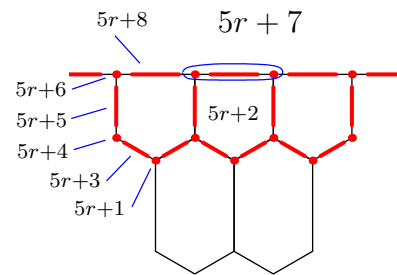
Wir definieren folgende Hilfsfolgen zur Berechnung der Wachstumsmatrix. Der  $k$ -te Eintrag der Folge  $t_{5i+j}$  gibt die Anzahl vom Nachbartypen vom Typ  $s_{5i+j} + k - 1$  an, die nicht aus dem Typ  $5i + j$  in der nächsten Schale entstehen.

$$\begin{aligned}
 s_{5i+6} &:= 5i + 1, & e_{5i+6} &:= 5i + 14, & t_{5i+6} &:= (2, 2, 4, 3, 3, 3, 1, 4, 2, 2, 2, 0, 2, 1), \\
 s_{5i+7} &:= 5i + 1, & e_{5i+7} &:= 5i + 19, & t_{5i+7} &:= (2, 2, 4, 3, 3, 3, 3, 6, 4, 4, 4, 2, 6, 3, 3, 3, 0, 4, 2), \\
 s_{5i+8} &:= 5i + 1, & e_{5i+8} &:= 5i + 14, & t_{5i+8} &:= (2, 2, 4, 3, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 3, 0, 4, 2), \\
 s_{5i+9} &:= 5i + 1, & e_{5i+9} &:= 5i + 14, & t_{5i+9} &:= (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 3, 3, 3, 0, 4, 2), \\
 s_{5i+10} &:= 5i + 1, & e_{5i+10} &:= 5i + 19, & t_{5i+10} &:= (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 3, 3, 3, 1, 4, 2, 2, 2, 0, 2, 1).
 \end{aligned}$$

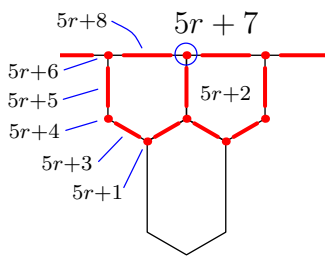
Die Typen an einem Ende der Dodekaederkette entsprechen den Typen am anderen Ende. Die Typen am anderen Ende der Dodekaederkette werden daher analog definiert.



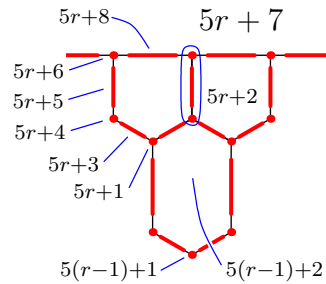
Typ  $5r + 7$



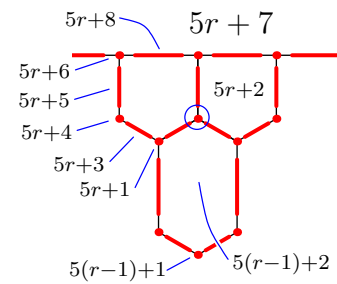
Typ  $5r + 8$



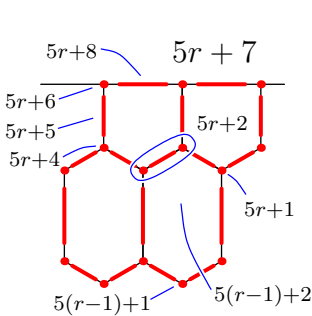
Typ  $5r + 6$



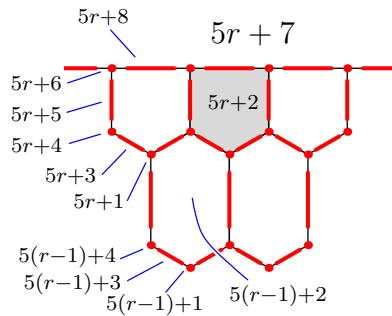
Typ  $5r + 5$



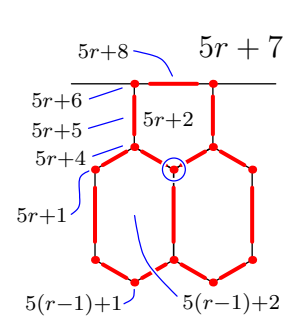
Typ  $5r + 4$



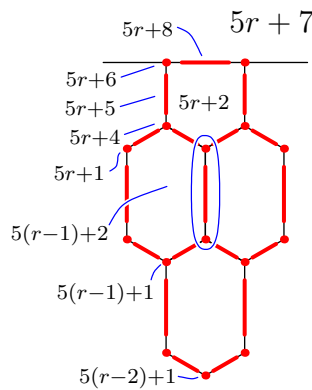
Typ  $5r + 3$



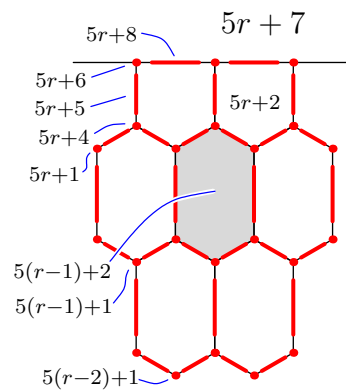
Typ  $5r + 2$



Typ  $5r + 1$



Typ  $5(r - 1) + 5$



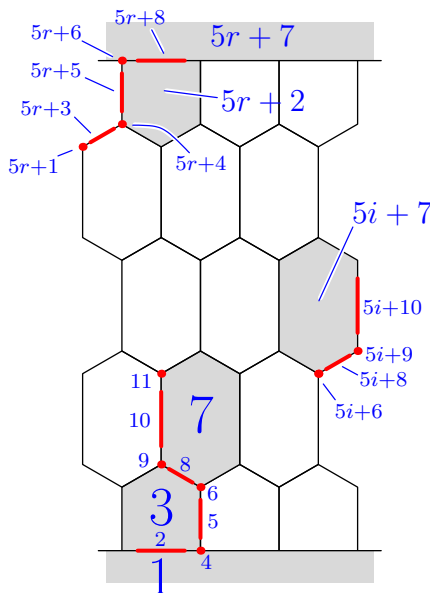
Typ  $5(r - 1) + 2$

Sei  $g\mathcal{F}$  eine Dodekaederkette. An jeder Fläche von  $g\mathcal{F}$  befindet sich genau eine Dodekaederkette, die eine gemeinsame Fläche mit  $g\mathcal{F}$  besitzt. An jeder Kante von  $g\mathcal{F}$  befinden sich aufgrund des Kantenwinkels von  $\pi/2$  genau vier Polyeder – darunter  $g\mathcal{F}$  selbst – und zwei Polyeder, die nicht nur die Kante, sondern sogar eine ganze Fläche mit  $g\mathcal{F}$  gemeinsam haben. An einer Kante befindet sich somit genau ein Polyeder, das nur eine Kante mit  $g\mathcal{F}$  gemeinsam hat. An einer Ecke befinden sich acht Polyeder:  $g\mathcal{F}$  selbst, drei Polyeder, die eine Fläche mit  $g\mathcal{F}$  gemeinsam haben, drei Polyeder, die eine nur Kante mit  $g\mathcal{F}$  gemeinsam haben und ein Polyeder, das nur eine Ecke mit  $g\mathcal{F}$  gemeinsam hat. An jeder Fläche, Kante bzw. Ecke von  $g\mathcal{F}$  befindet sich somit genau ein Polyeder, das genau eine Fläche, Kante bzw. Ecke mit  $g\mathcal{F}$  gemeinsam hat.  $g\mathcal{F}$  besitzt daher genau so viele Nachbarypolyeder, wie es Flächen, Kanten und Ecken aufweist:

$$\left( (r + 1)s + 2 \right) + 3(r + 1)s + 2(r + 1)s = 6(r + 1)s + 2.$$

In der ersten Schale  $S_1$  befinden sich somit genau  $6(r + 1)s + 2$  Dodekaederketten. Wir untersuchen nun, zu welchen Typen die Polyeder der ersten Schale gehören. Damit können wir dann den Initialvektor angeben. In der ersten Schale befindet sich eine Dodekaederkette vom Typ 1. Ferner gibt es darin jeweils  $s$  Dodekaederketten von den Typen 2 bis 5. Für  $i = 1, \dots, r$  kommen die Typen  $5i + 1, 5i + 2, 5i + 3, 5i + 4$  bzw.  $5i + 5$  jeweils  $s-, s-, 2s-, s-$  bzw.  $s$ -mal vor. Die restlichen Typen  $5r + 6, 5r + 7$  bzw.  $5r + 8$  kommen jeweils  $s-, 1-$  bzw.  $s$ -mal vor. Wir erhalten somit folgenden Initialvektor:

$$v = (1, s, s, s, s, s, s, s, \overbrace{s, s, 2s, s, s, s}^{r\text{-mal}}, 1, s)^t.$$



**Definition:** Sei  $h\mathcal{F}$  ein Polyeder in Schale  $S_{k+1}$ . Weil alle Schalen  $S_i$  außen konvex sind, gibt es ein eindeutig bestimmtes Polyeder  $g\mathcal{F}$  in Schale  $S_k$ , so daß der Schnitt  $g\mathcal{F} \cap h\mathcal{F}$  maximale Dimension hat. Dieses Polyeder  $g\mathcal{F}$  bezeichnen wir im Folgenden als *Hauptnachbar von  $h\mathcal{F}$* .

Ein Polyeder  $h\mathcal{F}$  in Schale  $S_{k+1}$  besitzt somit nicht ein Polyeder  $g'\mathcal{F}$  in Schale  $S_k$  als Hauptnachbar, wenn es ein Polyeder  $g\mathcal{F}$  in Schale  $S_k$  gibt, das mit  $h\mathcal{F}$  eine Kante gemeinsam hat, aber  $g'\mathcal{F}$  mit  $h\mathcal{F}$  nur eine Ecke gemeinsam hat. Ebenso besitzt ein Polyeder  $h\mathcal{F}$  in Schale  $S_{k+1}$  ein Polyeder  $g'\mathcal{F}$  in Schale  $S_k$  nicht als Hauptnachbar, wenn es ein Polyeder  $g\mathcal{F}$  in Schale

$S_k$  gibt, das mit  $h\mathcal{F}$  eine Fläche gemeinsam hat, aber  $g'\mathcal{F}$  mit  $h\mathcal{F}$  nur eine Kante gemeinsam hat.

Sei  $g\mathcal{F}$  eine Dodekaederkette vom Typ  $j$  in Schale  $S_k$ . Diese Dodekaederkette besitzt genau  $6(r+1)s+2$  Nachbardodekaederketten. Fast alle Nachbardodekaederketten befinden sich in Schale  $S_{k+1}$  und haben  $g\mathcal{F}$  als Hauptnachbar in Schale  $S_k$ . In den Zeichnungen der einzelnen Typen auf den vorhergehenden Seiten befinden sich an manchen Kanten und Ecken rote Markierungen. Die Markierungen in der Zeichnung zu Typ  $j$  geben an, welche Nachbarn von  $g\mathcal{F}$  entweder in der vorigen Schale  $S_{k-1}$  sind, in derselben Schale  $S_k$  sind oder in der Schale  $S_{k+1}$  sind, aber nicht  $g\mathcal{F}$  als Hauptnachbar besitzen.

In den Fällen  $r=1$ ,  $r=2$  oder  $r=3$  existieren einige der definierten Typen nicht, weil die Dodekaederkette für kleines  $r$  sehr kurz ist. Beim Aufstellen der Wachstumsfunktion benutzen wir eine Hilfsmatrix  $B$ , die auf einer künstlich verlängerten Dodekaederkette beruht. Damit können wir auch die Sonderfälle  $r=1$ ,  $r=2$  und  $r=3$  erfassen.

Wir geben im Folgenden eine Wachstumsmatrix  $A = (a_{i,j}) \in M_{5r+8}(\mathbb{Z})$  an, so daß aus einer Dodekaederkette vom Typ  $j$  in Schale  $S_k$  genau  $a_{i,j}$  Dodekaederketten vom Typ  $i$  in Schale  $S_{k+1}$  entstehen. Dabei benutzen wir die Wachstumsmatrix  $B$  einer künstlich verlängerten Dodekaederkette.

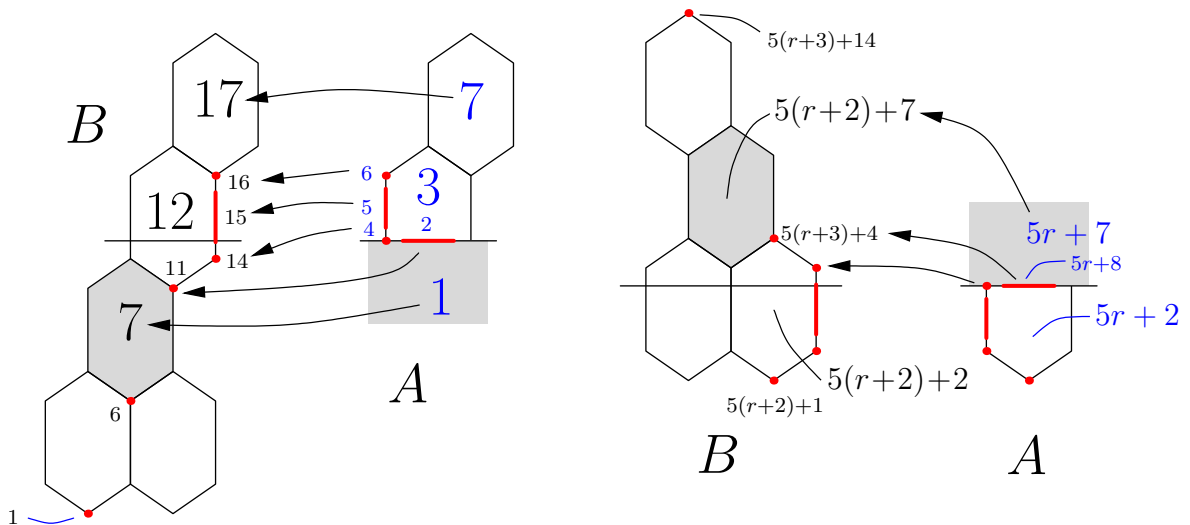
Mit der folgenden Abbildung  $\tau$  verlängern wir künstlich die Dodekaederkette:

$$\tau : \{1, \dots, 5r+8\} \rightarrow \{7, 11, 12, 14, \dots, 5(r+2)+6, 5(r+2)+7, 5(r+3)+4\},$$

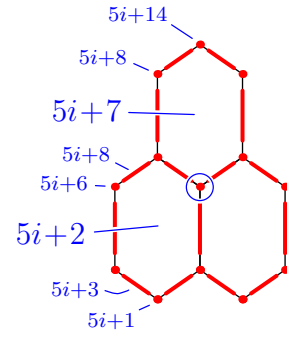
$$i \mapsto \begin{cases} 7, & i=1, \\ 11, & i=2, \\ 12, & i=3, \\ i+5 \cdot 2, & 4 \leq i \leq 5r+7, \\ 5(r+3)+4, & i=5r+8. \end{cases}$$

$\tau$  bildet einen Typ der Dodekaederkette  $\mathcal{F}_{r,s}$  auf einen Typ der künstlich verlängerten Dodekaederkette ab.

Wir illustrieren  $\tau$  in der folgenden Zeichnung:



Als Beispiel betrachten wir den Typ  $5i + 6$ . Sei  $g\mathcal{F}$  eine Dodekaederkette vom Typ  $5i + 6$  in Schale  $S_k$ . Die Kette  $g\mathcal{F}$  hat genau eine Ecke mit der vorigen Schale  $S_{k-1}$  gemeinsam. Ferner besitzt  $g\mathcal{F}$  mit genau drei Nachbarn in  $S_k$  jeweils eine Sechseckfläche gemeinsam. Mit genau drei Nachbarn in  $S_k$  hat  $g\mathcal{F}$  jeweils eine Kante gemeinsam. Die zwölf Kanten und zwölf Ecken, die im Bild rechts außen zu sehen sind, befinden sich im äußeren Rand der Schale  $S_k$  und sind auch Kanten und Ecken der sechs Nachbarpolyeder in  $S_k$ . An diesen Kanten und Ecken befindet sich in der nächsten Schale  $S_{k+1}$  keine exklusive Dodekaederkette: Die Dodekaederketten der Schale  $S_{k+1}$ , die nur eine der 12 Ecken mit  $g\mathcal{F}$  gemeinsam haben, besitzen mindestens eine gemeinsame Kante mit einem Nachbarpolyeder in  $S_k$ ; die Dodekaederketten der Schale  $S_{k+1}$ , die nur eine der 12 Kanten, aber keine Fläche mit  $g\mathcal{F}$  gemeinsam haben, besitzen mindestens eine gemeinsame Fläche mit einem der sechs Nachbarpolyeder in  $S_k$ . Von den  $6(r+1)s+2$  Nachbardodekaederketten von  $g\mathcal{F}$  befinden sich folgende Dodekaederketten nicht in Schale  $S_{k+1}$  oder besitzen  $g\mathcal{F}$  nicht als Hauptnachbarn: zweimal Typ  $5i + 1$ , zweimal Typ  $5i + 2$ , viermal Typ  $5i + 3$ , je dreimal Typ  $5i + 4$ ,  $5i + 5$  und  $5i + 6$ , einmal Typ  $5i + 7$ , viermal Typ  $5i + 8$ , je zweimal Typ  $5i + 9$ ,  $5i + 10$  und  $5i + 11$ , keinmal Typ  $5i + 12$ , zweimal Typ  $5i + 13$  und einmal Typ  $5i + 14$ . Zum Typ  $5i + 6$  definieren wir daher einen Starttyp  $s_{5i+6}$ , einen Endtyp  $e_{5i+6}$  und die Typenanzahlen  $t_{5i+6}$  wie folgt:



$$s_{5i+6} := 5i + 1, \quad e_{5i+6} := 5i + 14, \quad t_{5i+6} := (2, 2, 4, 3, 3, 3, 1, 4, 2, 2, 2, 0, 2, 1).$$

Eine Auflistung aller Hilfsfolgen befindet sich auf Seite 88. Diese Hilfsfolgen definieren wir für  $1 \leq i \leq r + 2$  in der künstlich verlängerten Dodekaederkette.

Wir bestimmen eine Wachstumsmatrix in drei Schritten. Zuerst geben wir eine Matrix  $B$  an, die zu einer verlängerten Dodekaederkette gehört. Aus dieser Matrix gewinnen wir dann eine Matrix  $A' \in M_{5r+8}$ . Die Wachstumsmatrix erhalten wir anschließend mittels

$$A := (v, \dots, v) - A'.$$

Wir definieren nun eine Matrix  $B \in M_{5(r+3)+14}(\mathbb{Z})$ . Es sei  $j \in \{11, 12, \dots, 5(r+2)+9, 5(r+2)+10\}$ . Die Spalte  $j$  von  $B$  besitze folgende Elemente:

$$B_{i,j} := \begin{cases} t_{j, i+1-s_j}, & s_j \leq i \leq e_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die ersten beiden und letzten beiden Spalten von  $A' \in M_{5r+8}(\mathbb{Z})$  definieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned} A'_1 &:= (1, s, s, s, s, s, 0, 2s, s, 0, \dots, 0)^t, \\ A'_2 &:= (1, s, 3, s, 4, 4, 0, 6, 3, 0, \dots, 0)^t, \\ A'_{5r+7} &:= (0, \dots, 0, s, s, 2s, s, s, s, 1, s)^t, \\ A'_{5r+8} &:= (0, \dots, 0, 3, 3, 6, 4, 4, s, 1, s)^t. \end{aligned}$$

Die restlichen Elemente lauten:

$$A'_{i,j} := \begin{cases} 1, & B_{\tau(1), \tau(j)} > 0 \text{ und } i = 1, \\ s, & B_{\tau(1), \tau(j)} > 0 \text{ und } i \in \{2, 4\}, \\ 1, & B_{\tau(5r+7), \tau(j)} > 0 \text{ und } i = 5r + 7, \\ s, & B_{\tau(5r+7), \tau(j)} > 0 \text{ und } i \in \{5r + 6, 5r + 8\}, \\ B_{\tau(i), \tau(j)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf Seite 90 wird der Initialvektor  $v = (1, s, s, s, s, s, \overbrace{s, s, 2s, s, s, s}^{r\text{-mal}}, s, 1, s)^t$  bestimmt. Die  $i$ -te Komponente dieses Vektors gibt an, daß Typ  $i$  genau  $v_i$ -mal in der ersten Schale vorkommt.





#### 4.4 Zähler der 3-Wachstumsfunktion einer Dodekaederkette

Es sei  $P_r = \sum_{i=0}^{\infty} b_{r,i} x^i$  mit  $b_{r,i} \in \mathbb{Z}$  der Zähler der 3-Wachstumsfunktion  $f_{r,s}(x) = P_r/Q_r$  von  $G_{r,s}$ .

In der folgenden Tabelle listen wir die ersten vier Koeffizienten  $b_{r,i}$  der Zähler  $P_r$  bis  $r = 15$  auf.

$r$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$
1	-1	$-2s - 21$	$-26s + 85$	$-164s + 385$	$-164s + 385$
2	-1	$-2s - 31$	$-46s - 38$	$86s - 346$	$474s - 992$
3	-1	$-2s - 37$	$-58s - 113$	$32s + 803$	$-1840s + 5694$
4	-1	$-2s - 47$	$-78s - 420$	$-422s + 372$	$-1130s + 523$
5	-1	$-2s - 53$	$-90s - 591$	$-668s + 1277$	$1412s + 8303$
6	-1	$-2s - 63$	$-110s - 1058$	$-1442s - 2926$	$-2862s + 8802$
7	-1	$-2s - 69$	$-122s - 1325$	$-1880s - 4073$	$-2888s + 38940$
8	-1	$-2s - 79$	$-142s - 1952$	$-2974s - 14608$	$-17266s + 6069$
9	-1	$-2s - 85$	$-154s - 2315$	$-3604s - 19343$	$-22932s + 36677$
10	-1	$-2s - 95$	$-174s - 3102$	$-5018s - 38770$	$-52534s - 112636$
11	-1	$-2s - 101$	$-186s - 3561$	$-5840s - 48629$	$-66912s - 128022$
12	-1	$-2s - 111$	$-206s - 4508$	$-7574s - 79508$	$-116858s - 517809$
13	-1	$-2s - 117$	$-218s - 5063$	$-8588s - 96027$	$-143020s - 650229$
14	-1	$-2s - 127$	$-238s - 6170$	$-10642s - 140918$	$-218430s - 1445482$
15	-1	$-2s - 133$	$-250s - 6821$	$-11848s - 165633$	$-259448s - 1790552$

Eine nähere Analyse dieser und weiterer Zählerkoeffizienten  $b_{r,i}$  zeigt, daß für alle  $r \in \mathbb{N}$  und  $i \in \mathbb{N}_0$  mit  $i < 8$ ,  $r \leq 17$  und  $r - 2i \geq 1$  folgende Gleichung gilt:

$$b_{r+2,i} = \sum_{j=0}^i \lambda_j b_{r-2j,i-j}.$$

Eine solche Formel tritt in ähnlicher Form auch bei den in Kapitel 2 und 3 betrachteten Bandmatrizen auf, siehe beispielsweise Gleichung (2.5.3). Die Werte der  $\lambda_j$  sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

$j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda_j$	1	16	142	560	-5111	-130384	-1607188	-15294992	-130389548

Beispiel: Es sei  $r = 13$  und  $i = 4$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot (-143020s - 650229) + 16 \cdot (-5840s - 48629) + 142 \cdot (-154s - 2315) \\ & + 560 \cdot (-2s - 69) - 5111 \cdot (-1) \\ & = -259448s - 1790552. \end{aligned}$$

In Sloanes „On-Line Encyclopedia of Integer Sequences“ [Sloane2001] befinden sich zur Folge (1, 16, 142, 560, ...) bzw. (16, 142, 560, ...) zum Zeitpunkt der Abfassung dieser Arbeit keine Informationen.

## 4.5 Zähler eines Residuums einer Dodekaederkette

Sei  $A$  die in Satz 4.3.1 verwendete Wachstumsmatrix der 3-Wachstumsfunktion der rechtwinkligen Coxetergruppe  $G_{r,s}$  einer Dodekaederkette der Länge  $r$  und mit  $2\pi/s$ -Drehsymmetrie.  $v$  sei der zugehörige Initialvektor. Wenn wir wie in Satz 1.3.2 annehmen, daß

$$\det(A - 1_{5r+8} \cdot x) = \det(1_{5r+8} - A \cdot x),$$

$\det(1_{5r+8} + v - A) \neq 0$  und  $\det(1_{5r+8} - A \cdot x)$  eine einfache Polstelle hat, können wir die Formel

$$\operatorname{res}_{x=1}(f_{A,v}) = \frac{\det(1_{5r+8} + v - A)}{\operatorname{Spur}(\operatorname{adj}(A - 1_{5r+8}))}$$

aus Satz 1.3.2 zum Berechnen des Residuums an der Stelle 1 der 3-Wachstumsfunktion von  $G_{r,s}$  nutzen. Die Matrix  $1_{5r+8} + v - A$  hat die Form einer Bandmatrix.  $\operatorname{Spur}(\operatorname{adj}(A - 1_{5r+8}))$  ist die Summe von Determinanten von Bandmatrizen mit jeweils einer Ausnahmzeile.

Es sei  $A' := v - A$ . Bis auf die Diagonale ist die Matrix  $1_{5r+8} + v - A = 1_{5r+8} + A'$  von der Gestalt der auf Seite 93 abgebildeten Matrix  $A'$ .

Mit Hilfe der selbstentwickelten Software zum Berechnen von Determinanten von Bandmatrizen – siehe Abschnitt 3.8 – versuchten wir, eine Matrix zur Generierung der Determinanten der Matrizen  $1_{5r+8} + v - A$  zu finden. Die Software fand 42465 Gleichungen, konnte aufgrund von Speicherplatzmangel aber keine  $42465 \times 42465$ -Matrix mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}[x]$  generieren.

## 4.6 Dodekaederhäuser

Wir können rechtwinklige Dodekaeder im  $\mathbb{H}^3$  auch entlang einer Kante anordnen. Dazu nehmen wir  $n$  Dodekaeder und setzen sie so aneinander, daß das entstehende Polyeder eine lange Kante besitzt, die aus  $n$  einzelnen Kanten der Dodekaeder besteht. Solch ein hyperbolisches Polyeder nennen wir *Dodekaederhaus der Länge  $n$* .

Sei  $\mathcal{H}_n$  ein Dodekaederhaus der Länge  $n$ . Durch die Spiegelungen an den Seitenflächen wird eine rechtwinklige Coxetergruppe  $H_n$  erzeugt, die als Spiegelungsgruppe auf  $\mathbb{H}^3$  operiert.

Analog zur Argumentation in Abschnitt 4.3 können wir verschiedene Typen von Dodekaederhäusern definieren und eine Wachstumsmatrix aufstellen. Aus dieser Wachstumsmatrix können wir mit Satz 1.2.1 die 3-Wachstumsfunktion der Coxetergruppe  $H_n$  bestimmen.

Für  $1 \leq n \leq 58$  haben wir mit Hilfe einer selbstentwickelten Software diese Determinanten berechnet und die 3-Wachstumsfunktion  $f_n(x)$  von  $H_n$  bestimmt. Für  $1 \leq n \leq 58$  besitzt  $f_n(x)$  eine Polstelle an der Stelle 1. Auf der folgenden Seite listen wir die zugehörigen Residuen auf. Der Kehrwert des Residuums an der Stelle 1 besitzt für  $n \leq 58$  ungefähr den Wert  $.391 \cdot n$ . Der Kehrwert des Residuums ist damit ungefähr proportional zum hyperbolischen Volumen des Fundamentalbereichs  $\mathcal{H}_n$  für  $n \leq 58$ .

Eine geschlossene Formel für das Residuum wie in Satz 4.3.1 liegt uns nicht vor.

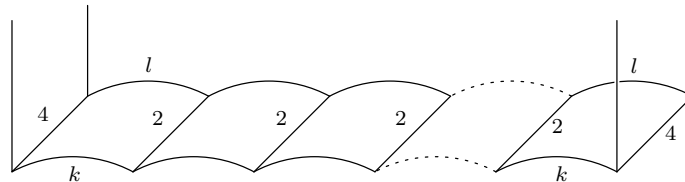
Die Residuen der 3-Wachstumsfunktionen der ersten Dodekaederhäuser sind in der folgenden Tabelle eingetragen. Wir geben das Residuum jeweils als Bruch und auf vier Stellen gerundet aus.

$n$	$\text{res}_{x=1}(f_{DH_n}(x))$	
01	$\frac{16}{7}$	2.2857
02	$\frac{72}{59}$	1.2203
03	$\frac{3512}{4229}$	0.8305
04	$\frac{60088}{95631}$	0.6283
05	$\frac{21484}{42531}$	0.5051
06	$\frac{1428952}{3384449}$	0.4222
07	$\frac{217192}{598949}$	0.3626
08	$\frac{6331176}{19925437}$	0.3177
09	$\frac{5287684}{18701997}$	0.2827
10	$\frac{672603752}{2641151007}$	0.2547
11	$\frac{884993272}{3820279809}$	0.2317
12	$\frac{2777982232}{13075415219}$	0.2125
13	$\frac{4518354148}{23029812451}$	0.1962
14	$\frac{280939994136}{1541560349425}$	0.1822
15	$\frac{362488735080}{2130493366993}$	0.1701
16	$\frac{58873273976}{369000086847}$	0.1595
17	$\frac{99569156984}{662934569623}$	0.1502
18	$\frac{109961988816808}{775055106523151}$	0.1419
19	$\frac{140201824014904}{1042929994969021}$	0.1344
20	$\frac{2140203307238712}{16756043735856239}$	0.1277
21	$\frac{679223251999708}{5582949651545611}$	0.1217
22	$\frac{41309097016724312}{355673462106872289}$	0.1161
23	$\frac{52249195433321768}{470269350417530901}$	0.1111
24	$\frac{791765083678622792}{7435449336646157329}$	0.1065
25	$\frac{41598246096837476}{406891610054372399}$	0.1022
⋮	⋮	⋮
56	$\frac{32508578225060472781949647868124133032}{711575253399137806132940918307285366109}$	0.0457
57	$\frac{25094304762225123633440809133835634556}{559087091836802564396846943355746908957}$	0.0449
58	$\frac{2974531484624962833713879486076278749928}{67432741820156830752379206551653090964031}$	0.0441

## 4.7 Residuen anderer Polyederketten

### $P_{4k4l}$ -Blöcke

Ein  $P_{4k4l}$ -Block der Länge  $n$  besteht aus  $n$  aneinandergereihten „Schornsteinen“, deren Kantenwinkel an der viereckigen Grundfläche  $\pi/k$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/l$  und  $\pi/4$  betragen. Die folgende Zeichnung enthält eine Skizze eines  $P_{4k4l}$ -Blocks.



Folgende Paare  $(k, l)$  lassen wir zu:

$$(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4).$$

Für  $k = l = 2$  ist ein  $P_{4k4l}$ -Block ein Fundamentalbereich einer Coxetergruppe, die auf  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  operiert. Für  $(k, l) \neq (2, 2)$  ist ein  $P_{4k4l}$ -Block ein Fundamentalbereich einer Coxetergruppe, die auf  $\mathbb{H}^3$  operiert.

Die Coxetergruppe eines  $P_{4k4l}$ -Blocks der Länge 1 besitzt folgende Präsentation:

$$P_{4k4l,1} = \left\langle a, b, c, d, e \left| \begin{array}{l} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = 1, \\ (ab)^2 = (bc)^2 = (cd)^2 = (da)^2 = 1, \\ (ae)^4 = (be)^l = (ce)^4 = (de)^k = 1 \end{array} \right. \right\rangle.$$

Die Erzeuger  $\{a, b, c, d, e\}$  entsprechen den Spiegelungen an den fünf Seiten des  $P_{4k4l}$ -Blocks der Länge 1.

Ein  $P_{4k4l}$ -Block der Länge  $n$  besitzt genau  $n + 4$  Seitenflächen. Es sei  $P_{4k4l,n}$  die Coxetergruppe, die erzeugt wird von den  $n + 4$  Spiegelungen an diesen Seitenflächen. Die zugehörige Wachstumsfunktion bezeichnen wir als 1-Wachstumsfunktion, da das Erzeugendensystem nur aus den Spiegelungen an den Seitenflächen des Fundamentalbereichs  $P_{4k4l,n}$  besteht. Aufgrund der  $\pi/4$ -Kantenwinkel im Fundamentalbereich ist diese Coxetergruppe nicht rechtwinklig.

Mit Hilfe des Programmpakets KBMAG haben wir für kleine  $n$  die 1-Wachstumsfunktion der Coxetergruppe eines  $P_{4k4l}$ -Blockes der Länge  $n$  bestimmt und das Residuum an der Stelle 1 berechnet.

Die Analyse dieser Residuen führt uns zu folgenden Vermutungen über das Residuum an Stelle 1 der 1-Wachstumsfunktion eines  $P_{4k4l}$ -Blocks der Länge  $n$ :

$\text{res}_{x=1}(f_{P_{4k4l,n}})$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$
$k = 2$	$\frac{8}{n} = \frac{16}{2n}$	$\frac{16}{3n + 1}$	$\frac{16}{5n + 1}$
$k = 3$		$\frac{8}{2n + 1} = \frac{16}{4n + 2}$	$\frac{16/3}{2n + 1} = \frac{16}{6n + 3}$
$k = 4$			$\frac{4}{2n + 1} = \frac{16}{8n + 4}$

### $P_{6k6l}$ -Blöcke

Entsprechend betrachten wir die 1-Wachstumsfunktion einer Coxetergruppe  $P_{6k6l,n}$ , deren Fundamentalbereich aus  $n$  „Schornsteinen“ besteht, deren Kantenwinkel an der viereckigen Grundfläche  $\pi/k$ ,  $\pi/6$ ,  $\pi/l$  und  $\pi/6$  betragen. Folgende Paare  $(k, l)$  lassen wir zu:

$$(2, 2), (2, 3), (3, 3).$$

Eine Auswertung der Residuen der 1-Wachstumsfunktion von  $P_{6k6l,n}$  führt zu folgenden Vermutungen:

$\text{res}_{x=1}(f_{P_{6k6l,n}})$	$l = 2$	$l = 3$
$k = 2$	$\frac{6}{n} = \frac{24}{4n}$	$\frac{24}{8n+3}$
$k = 3$		$\frac{4}{2n+1} = \frac{24}{12n+6}$

**Oktaederketten**

Sei  $\mathcal{F}_n$  eine Kette  $n$  aneinandergereihter rechtwinkliger hyperbolischer Oktaeder. Die Spiegelungen an den  $5 + 3n$  Seitenflächen von  $\mathcal{F}_n$  erzeugen eine rechtwinklige Coxetergruppe  $O_n$ , die auf  $\mathbb{H}^3$  operiert.

Eine Überlegung, die wir hier nicht näher ausführen, zeigt, daß der Coxetergraph dieser Gruppe  $n_1 = 5 + 3n$  Knoten,  $n_2 = 6 + 6n$  Kanten und keine Dreiecke oder größeren Teilgraphen besitzt ( $w = 2$ ). Damit können wir Formel (2.1.2) anwenden und erhalten die 1-Wachstumsfunktion von  $O_n$ :

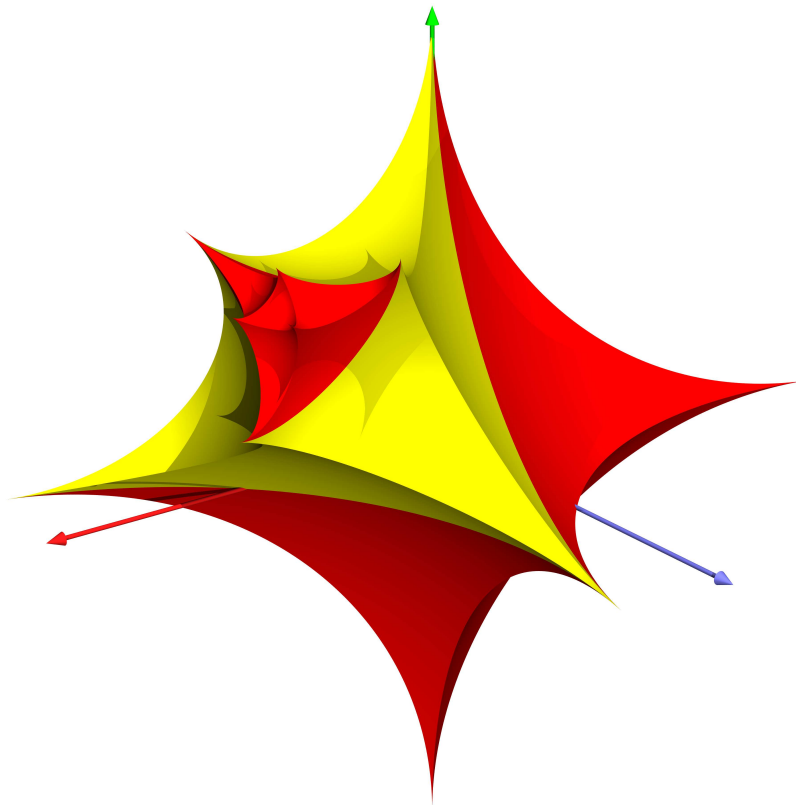
$$f_{O_n, \Sigma_{O_n}}(x) = \frac{(1+x)^2}{(1-x)(1-(2+3n)x)}$$

Die Auswertung des Residuums führt zu folgendem Satz.

**Satz 4.7.1** *Das Residuum an Stelle 1 der 1-Wachstumsfunktion einer Oktaederkette der Länge  $n$  lautet:*

$$\text{res}_{x=1}(f_{O_n, \Sigma_{O_n}}(x)) = \frac{4}{3n+1}$$

Das folgende Bild zeigt eine Oktaederkette der Länge 3 im konformen Kugelmodell des  $\mathbb{H}^3$ .



# Kapitel 5

## Bianchigruppen

$\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  sei ein imaginär-quadratischer Zahlkörper ( $D \in \mathbb{N}$  quadratfrei) und  $\mathcal{O}_{-D}$  der Ring der ganzen Zahlen in  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ . Dann ist  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-D})$  eine diskrete Untergruppe der Isometrie­gruppe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^3)$ . Die Gruppe  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-D})$  wird *Bianchigruppe* genannt.

In diesem Kapitel betrachten wir die Bianchigruppen  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ ,  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ ,  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-3})$  und  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$ . Wir studieren die Operation der Gruppen  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  und  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  auf  $\mathbb{H}^3$  und geben Wachstumsfunktionen an, die wir durch geometrische Betrachtungen gewinnen.

Im letzten Abschnitt geben wir Residuen an der Stelle 1 von Wachstumsfunktionen von Untergruppen von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  bzw.  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  an. Wir sehen, daß Untergruppen mit gleichem Index verschiedene Residuen an der Stelle 1 einer Wachstumsfunktion besitzen können.

Verschiedene Aspekte von Bianchigruppen werden betrachtet in [Picard1884], [Bianchi1892], [Swan1968], [Swan1971], [GruMe1980], [BrLeeWi1985], [GruSchw1993], [Huntebrinker1995] und [GruHu1996].

### 5.1 Oberer Halbraum $\mathbb{H}^3$

Zur Darstellung des hyperbolischen Raumes  $\mathbb{H}^3$  gibt es verschiedene Modelle, siehe [Ratcliffe1994]. Eines der Modelle ist der obere Halbraum  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{>0}$ . Die Gruppe  $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^3)$  der orientierungserhaltenden Isometrien von  $\mathbb{H}^3$  ist isomorph zu

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\} / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ein Element  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  operiert wie folgt auf  $(z, r) = (x + yi, r)$  im oberen Halbraum  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{>0}$ :

$$A \cdot (z, r) = \frac{((az + b)\overline{cz + d}) + a\bar{c}r^2, r}{|cz + d|^2 + |c|^2r^2},$$

siehe auch [Swan1971] und [ElsGruMe1997]. Flöge definiert in [Floege1983] die Operation ein wenig anders, er ändert zuerst die Vorzeichen von  $b$  und  $c$  und operiert dann wie oben angegeben; dies entspricht einer Konjugation mit der 180°-Drehung  $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} : (z, r) \mapsto (-z, r)$ , siehe auch [GruGuMe1982].

## 5.2 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$

**Definition:**

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i] \right\} / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  wird *Picard-Gruppe* genannt, siehe auch [Picard1884]. Viele Untergruppen der Picard-Gruppe mit endlichem Index und deren Klassifikation nach Kongruenz- und Nichtkongruenzgruppen werden in [Hoekstra2001] betrachtet.

Wir zeigen im folgenden Lemma die Äquivalenz zweier Präsentierungen von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ .

**Lemma 5.2.1** *Die beiden folgenden Präsentierungen von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  sind äquivalent.*

$$G_i = \left\langle S, T, C, D \mid \begin{array}{l} S^2 = (ST)^3 = 1, C^2 = D^2 = 1, \\ (SC)^3 = (SD)^2 = 1, (DT)^2 = (CT)^2 = 1 \end{array} \right\rangle,$$

$$\Gamma_i = \left\langle S, T, U \mid \begin{array}{l} S^2 = (TS)^3 = 1, TUT^{-1}U^{-1} = 1, \\ (SUSU^{-1})^3 = (SU^2SU^{-1})^2 = 1, (TUSTU^{-1}S)^2 = 1 \end{array} \right\rangle.$$

Die Präsentation  $G_i$  befindet sich in leicht abgewandelter Form in [GruSchw1993]. Eine  $G_i$  entsprechende Präsentation von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$  ist in [Swan1971] enthalten. Die Präsentation  $\Gamma_i$  wird in [ElsGruMe1997] aufgeführt.

**Beweis (Lemma):** Wir zeigen, daß die beiden folgenden Präsentierungen äquivalent sind.

$$G = \langle S, T, C, D, U \mid \begin{array}{l} S^2 = (ST)^3 = 1, C^2 = D^2 = 1, \\ (SC)^3 = (SD)^2 = (DT)^2 = (CT)^2 = 1, U = CD \end{array} \rangle,$$

$$\Gamma = \langle S, T, C, D, U \mid \begin{array}{l} S^2 = (TS)^3 = 1, TUT^{-1}U^{-1} = 1, \\ (SUSU^{-1})^3 = (SU^2SU^{-1})^2 = 1, (TUSTU^{-1}S)^2 = 1, \\ C = SUSU^{-1}S, D = C^{-1}U \end{array} \rangle.$$

- „ $\Rightarrow$ “: Gegeben seien die Relationen von  $G$ . Daraus leiten wir die Relationen von  $\Gamma$  her. Zuerst gewinnen wir einige Hilfsrelationen:

- $DT = T^{-1}D$ , wegen  $(DT)^2 = 1$  und  $D^2 = 1$ ,
- $CT = T^{-1}C$ , wegen  $(CT)^2 = 1$  und  $C^2 = 1$ ,
- $SD = DS$ , wegen  $(SD)^2 = 1, S^2 = 1$  und  $D^2 = 1$ ,
- $CU = CCD = D, U^{-1}C = D^{-1}C^{-1}C = D$ ,
- $U^{-1} = D^{-1}C^{-1} = DC$ .

Nun leiten wir die Relationen von  $\Gamma$  her.

$$\begin{aligned} (TS)^3 &= S^2(TS)^3 = S(ST)^3S = S^2 = 1, \\ TUT^{-1}U^{-1} &= TCDT^{-1}D^{-1}C^{-1} = TCDT^{-1}DC \stackrel{a)}{=} TCTDDC \stackrel{b)}{=} TT^{-1}CD^2C = 1, \\ SUSU^{-1}S &= SCDS^{-1}C^{-1}S = SCDSDCS \stackrel{c)}{=} SCDDSCS = SCSCS \\ &= (SC)^3C^{-1} = C, \\ D &= C^{-1}U, \\ (SUSU^{-1})^3 &= \underline{SUSU^{-1}SUSU^{-1}SUSU^{-1}} = CUSU^{-1}\underline{SUSU^{-1}SS} = \underline{CUSU^{-1}CS} \\ &\stackrel{d)}{=} DSDS = S(SD)^2S = 1, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(SU^2SU^{-1})^2 &= SU \cdot USU^{-1}SU \cdot USU^{-1}SS = \underline{SUSSUSU^{-1}SUSSUSU^{-1}SS} \\
&= \underline{SUSCUSCS} = \underline{SUSDSCS} = \underline{SUDCS} = \underline{SUU^{-1}US} = 1, \\
(TUSTU^{-1}S)^2 &= (TCDSTU^{-1}S)^2 = (TCSDTU^{-1}S)^2 \stackrel{(CS)^3=1}{=} (TSCSCDTU^{-1}S)^2 \\
&= (TSCSUTU^{-1}S) \stackrel{UT \equiv TU}{=} (TSCSTS)^2 = TSCSTSTSCSTS \\
&= TSCSTSTSTT^{-1}CSTS \stackrel{(ST)^3=1}{=} TSC \underline{T^{-1}CSTS} \stackrel{b)}{=} TSCCTSTS \\
&= (TS)^3 = 1.
\end{aligned}$$

• „ $\Leftarrow$ “: Gegeben seien die Relationen von  $\Gamma$ . Wir benutzen folgende Hilfsrelationen:

- a)  $SUSU^{-1}SU = USU^{-1}SUS$ , wegen  $(SUSU^{-1})^3 = 1$ ,
- b)  $SU^2SU^{-1} = USU^{-2}S$ , wegen  $(SU^2SU^{-1})^2 = 1$ ,
- c)  $SU^{-1}T^{-1} = TU^{-1}STUSTU^{-1}S$ , wegen  $(TUSTU^{-1}S)^2 = 1$ .

Nun leiten wir die Relationen von  $G$  her:

$$\begin{aligned}
(ST)^3 &= S(TS)^3S^{-1} = 1, \\
C^2 &= SUSU^{-1}SSUSU^{-1}S = 1, \\
D &= C^{-1}U = CU = SUSU^{-1}SU, \\
D^2 &= (SUSU^{-1}SU)^2 = \underline{SUSU^{-1}SUSUSU^{-1}SU} \\
&\stackrel{a)}{=} USU^{-1}SUS \cdot \underline{SUSU^{-1}SU} = USU^{-1} \underline{SU^2SU^{-1}SU} \\
&\stackrel{b)}{=} USU^{-1} \cdot USU^{-2}S \cdot SU = 1, \\
(SC)^3 &= (SSUSU^{-1}S)^3 = (USU^{-1}S)^3 = (SUSU^{-1})^{-3} = 1, \\
(SD)^2 &= (SSUSU^{-1}SU)^2 = (USU^{-1}SU)^2 \\
&= USU^{-1} \underline{SU^2SU^{-1}SU} = USU^{-1} \cdot USU^{-2}S \cdot SU = 1, \\
(DT)^2 &= SUSU^{-1}SUT \cdot \underline{SUSU^{-1}SUT} \stackrel{D^2=1}{=} SUSU^{-1}SUT \cdot \underline{U^{-1}SUSU^{-1}S} \cdot T \\
&= SUSU^{-1} \underline{STSUSU^{-1}ST} \stackrel{(ST)^3=1}{=} \underline{SUSU^{-1} \cdot T^{-1}ST^{-1}} \cdot USU^{-1}ST \\
&\stackrel{c)}{=} SU \cdot \underline{TU^{-1}STUSTU^{-1}S} \cdot ST^{-1}USU^{-1}ST = \underline{SUTU^{-1}ST} \cdot 1 \cdot ST \\
&= S \cdot T \cdot STST = 1, \\
(CT)^2 &= SUSU^{-1}ST \cdot \underline{SUSU^{-1}ST} \stackrel{(ST)^3=1}{=} \underline{SUSU^{-1} \cdot T^{-1}ST^{-1}} \cdot USU^{-1}ST \\
&\stackrel{c)}{=} SU \cdot \underline{TU^{-1}STUSTU^{-1}S} \cdot ST^{-1}USU^{-1}ST = \underline{SUTU^{-1}STUS} \cdot 1 \cdot \underline{SU^{-1}ST} \\
&= \underline{SUTU^{-1}ST} \cdot 1 \cdot ST = S \cdot T \cdot STST = 1.
\end{aligned}$$

□

Ein Fundamentalbereich von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  ist

$$\mathcal{F} := \left\{ (x + yi, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{>0} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, r \geq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\},$$

siehe z. B. [Stramm1994] und [ElsGruMe1997]. Seine Ecken sind  $e_0 = \infty$  und

$$e_1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), e_2 = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), e_3 = \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), e_4 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

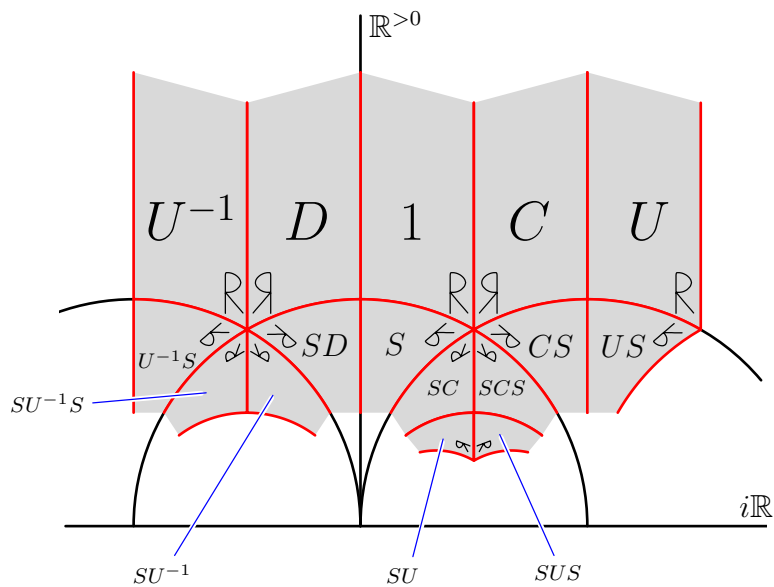
$\mathcal{F}$  ist eine hyperbolische Pyramide (Schornstein) mit rechteckigem Querschnitt, deren Spitze sich im Unendlichen befindet. Die Kantenwinkel an den vier senkrechten Kanten  $e_1e_0$ ,  $e_2e_0$ ,

$e_3e_0$  und  $e_4e_0$  betragen  $\pi/2$ . Der Kantenwinkel von Kante  $e_1e_4$  lautet ebenfalls  $\pi/2$ . Die Kantenwinkel an den drei restlichen Kanten  $e_1e_2$ ,  $e_2e_3$  und  $e_3e_4$  belaufen sich auf jeweils  $\pi/3$ . Die Elemente  $S, T, U, C$  und  $D$  von  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  repräsentieren wir durch folgende Matrizen:

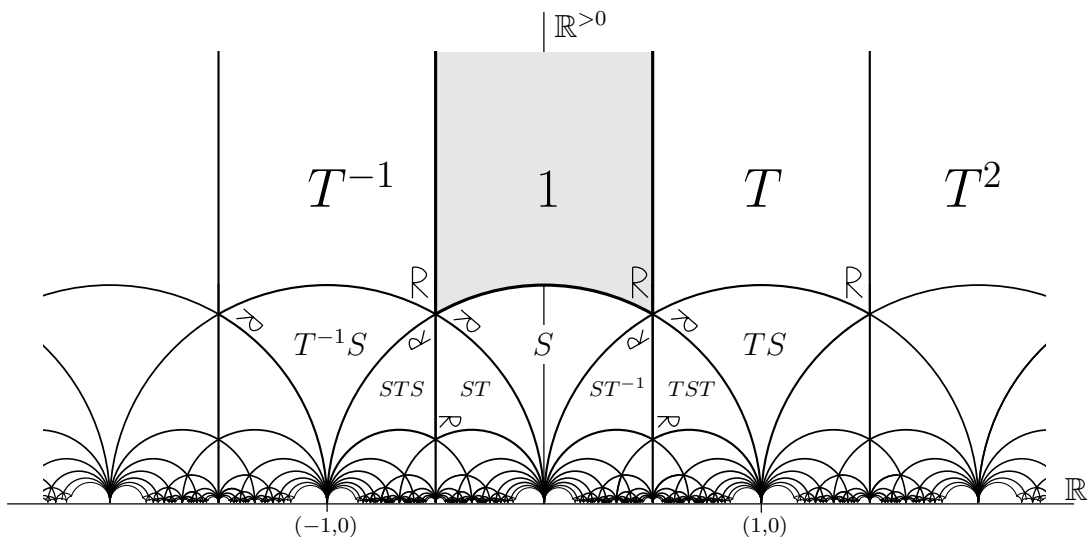
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

$S$  ist eine Drehung um  $180^\circ$  um die Achse von  $(-i, 0)$  bis  $(i, 0)$ ,  $T$  ist eine Translation des oberen Halbraums in die reelle Richtung,  $U$  ist eine Translation des oberen Halbraums in die imaginäre Richtung,  $D$  ist eine Drehung um  $180^\circ$  um die Achse  $\{0\} \times \mathbb{R}^{>0}$  und  $C$  ist eine Drehung um  $180^\circ$  um die Achse  $\{i/2\} \times \mathbb{R}^{>0}$ .

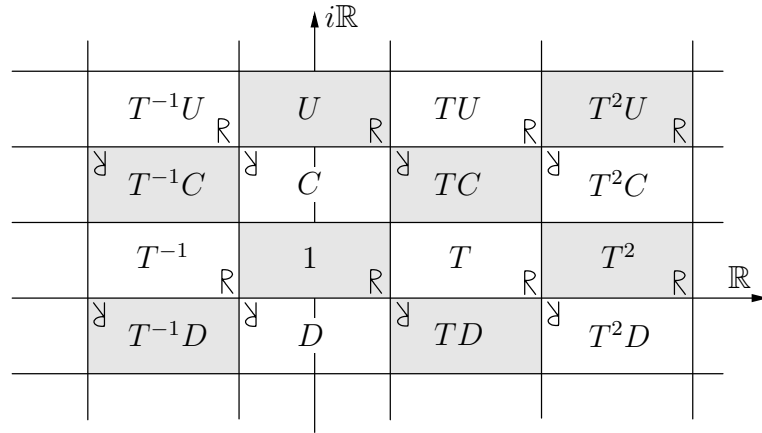
Die folgende Zeichnung zeigt die Operation von  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  auf der hyperbolischen Ebene  $(0 + i\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{>0}$  im oberen Halbraum.



Die nächste Zeichnung zeigt die Operation von  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  auf der hyperbolischen Ebene  $(\mathbb{R} + 0i) \times \mathbb{R}^{>0}$ . Die Gruppe  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^2 = (ST)^3 = 1 \rangle$  ist eine Untergruppe von  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ .



Die folgende Zeichnung zeigt die Operation von  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  in der Horosphäre  $\mathbb{C} \times \{2\}$ . Dort operiert der Stabilisator  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])_\infty$  der Spitze  $(0, \infty)$ .



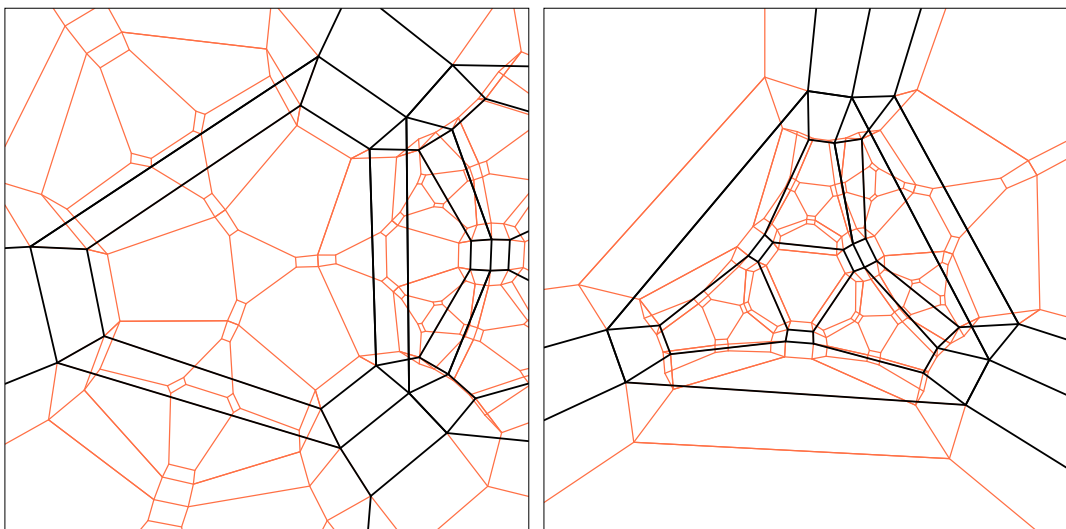
Für das Verständnis der Operation von  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  auf dem oberen Halbraum ist das Studium der zu  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) \cdot \mathcal{F}$  dualen Pflasterung hilfreich. Die duale Pflasterung besteht aus Prismen mit sechseckiger Grundfläche und aus abgestumpften Oktaedern.

Die 3-Wachstumsfunktion – also die Wachstumsfunktion, deren Erzeugendensystem aus allen Flächen-, Kanten- und Ecknachbarn des Schornsteinfundamentalbereichs besteht – von  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  lautet

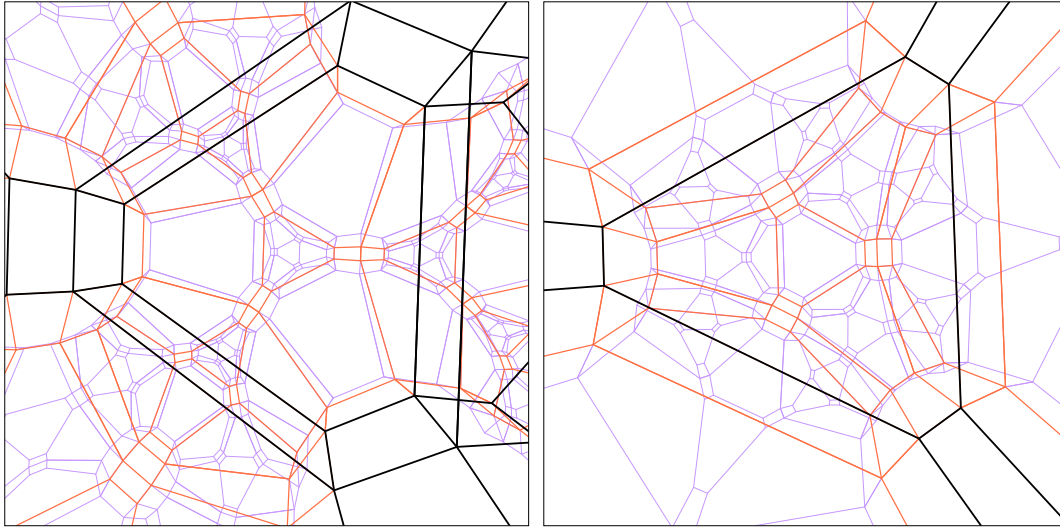
$$f(x) = \frac{1 + 48x + 127x^2 - 174x^3 - 282x^4 - 16x^5 - 40x^6}{1 - 3x - 20x^2 + 38x^3 + 24x^4 - 40x^5},$$

das Residuum an der Stelle 1 ist  $\frac{112}{11}$ . Diese Funktion gewinnen wir durch Betrachten der dualen Pflasterung. Nachfolgend zeigen wir vier Bilder, die bei der Berechnung benutzt werden.

Die folgenden beiden Bilder zeigen das Kantengerüst der zur  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) \cdot \mathcal{F}$  dualen Pflasterung im  $\mathbb{H}^3$ . Die Kanten der vier Hauptpflastersteine sind schwarz und die Kanten der Nachbarpflastersteine rot eingefärbt.



Die folgenden beiden Bilder zeigen die erste Schale (in rot) und die zweite Schale (in blau) der dualen Pflasterung:



### 5.3 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$

Im folgenden Lemma zeigen wir die Äquivalenz zweier Präsentierungen von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ . Die Präsentation  $G_{\sqrt{-2}}$  wird in [GruSchw1993] verwendet. Eine  $G_{\sqrt{-2}}$  entsprechende Präsentation von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  ist in [Swan1971] enthalten. Die Präsentation  $\Gamma_{\sqrt{-2}}$  stammt aus [Floege1983].

**Lemma 5.3.1** *Die beiden folgenden Präsentierungen von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  sind äquivalent:*

$$G_{\sqrt{-2}} = \langle a, b, c \mid b^2 = (ab)^3 = 1, ac = ca, (cbc^{-1}b)^2 = 1 \rangle,$$

$$\Gamma_{\sqrt{-2}} = \left\langle A, M, S, V, U \mid \begin{array}{l} A^2 = S^3 = (AM)^2 = 1, \\ AM = SV^2, U^{-1}AU = M, U^{-1}SU = V \end{array} \right\rangle.$$

**Beweis:** Wir zeigen, daß die beiden folgenden Präsentierungen äquivalent sind:

$$G = \langle a, b, c, A, M, S, V, U \mid \begin{array}{l} b^2 = (ab)^3 = 1, ac = ca, (cbc^{-1}b)^2 = 1, \\ A = b, M = cbc^{-1}, S = ba^{-1}, V = cbc^{-1}a^{-1}, U = c^{-1} \end{array} \rangle,$$

$$\Gamma = \langle a, b, c, A, M, S, V, U \mid \begin{array}{l} A^2 = S^3 = (AM)^2 = 1, \\ AM = SV^2, U^{-1}AU = M, U^{-1}SU = V, \\ a = S^{-1}A, b = A, c = U^{-1} \end{array} \rangle.$$

- „ $\Rightarrow$ “: Gegeben seien die Relationen von  $G$ . Daraus leiten wir nun die Relationen von  $\Gamma$  her.

$$\begin{aligned} A^2 &= b^2 = 1, \\ S^3 &= (ba^{-1})^3 = (ab^{-1})^{-3} = (ab)^{-3} = 1, \\ (AM)^2 &= (b \cdot cbc^{-1})^2 = (cb^{-1}c^{-1}b^{-1})^{-2} = (cbc^{-1}b)^2 = 1, \\ U^{-1}SU &= c \cdot \underline{ba^{-1}} \cdot \underline{c^{-1}} = cbc^{-1}a^{-1} = V, \\ V^3 &= (U^{-1}SU)^3 = U^{-1}S^3U = 1, \\ SV^2 &= SV^{-1} = ba^{-1} \cdot acb^{-1}c^{-1} = bcbc^{-1} = AM, \\ U^{-1}AU &= cbc^{-1} = M, S^{-1}A = ab^{-1} \cdot b = a. \end{aligned}$$

- „ $\Leftarrow$ “: Gegeben seien die Relationen von  $\Gamma$ .

$$\begin{aligned}
b^2 &= A^2 = 1, \\
(ab)^3 &= (S^{-1}A \cdot A)^3 = S^{-3} = 1, \\
AU &= UM, \quad SU = UV, \\
V^3 &= (U^{-1}SU)^3 = U^{-1}S^3U = 1, \\
V^2 &= S^{-1}AM, \\
ca &= U^{-1} \cdot S^{-1}A = (ASU)^{-1} = (AUV)^{-1} = (UMV)^{-1} \\
&= V^{-1}M^{-1}U^{-1} = V^2M^{-1}U^{-1} = S^{-1}AMM^{-1}U^{-1} = S^{-1}A \cdot U^{-1} = ac. \\
M &= U^{-1}AU = cbc^{-1}, \\
(abc^{-1}b)^2 &= (MA)^2 = M(AM)^2M^{-1} = 1, \\
S &= Aa^{-1} = ba^{-1}, \\
V &= U^{-1}SU = cba^{-1}c^{-1} = cbc^{-1}a^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Ein Fundamentalbereich von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  lautet

$$\mathcal{F} := \left\{ (x + yi, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{>0} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{-2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{-2}}{2}, r \geq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\},$$

siehe [Floege1983] und [Stramm1994]. Seine Ecken sind durch  $e_0 = \infty$  und

$$e_1 = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{1}{2} \right), \quad e_2 = \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{1}{2} \right), \quad e_3 = \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{1}{2} \right), \quad e_4 = \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{1}{2} \right)$$

gegeben.  $\mathcal{F}$  ist eine hyperbolische Pyramide (Schornstein) mit rechteckigem Querschnitt, deren Spitze sich im Unendlichen befindet. Die senkrechten Seitenflächen stoßen an den senkrechten Kanten  $e_1e_0$ ,  $e_2e_0$ ,  $e_3e_0$  und  $e_4e_0$  rechtwinklig zusammen. Der Winkel an den Kanten  $e_4e_1$  und  $e_3e_2$  beträgt jeweils  $\pi/3$ , und der Winkel an den Kanten  $e_1e_2$  und  $e_4e_3$  jeweils  $\pi/4$ .

Die Erzeuger  $a$ ,  $b$  und  $c$  können mit den folgenden Elementen von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  identifiziert werden:

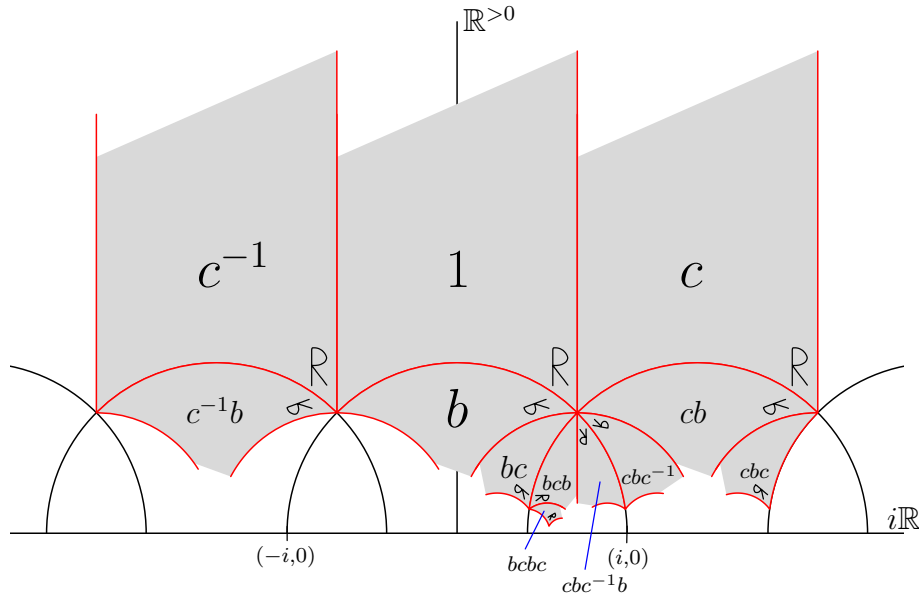
$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$a$  ist eine Translation des oberen Halbraums in  $x$ -Richtung,  $c$  ist eine Translation des oberen Halbraums in  $y$ -Richtung, und  $b$  ist eine Drehung um  $180^\circ$  um die Achse durch  $(-i, 0)$  und  $(i, 0)$ . Die Drehachse ist Teil des Fundamentalbereichbodens von  $(-\sqrt{2}i/2, \sqrt{2}/2)$  bis  $(\sqrt{2}i/2, \sqrt{2}/2)$ .

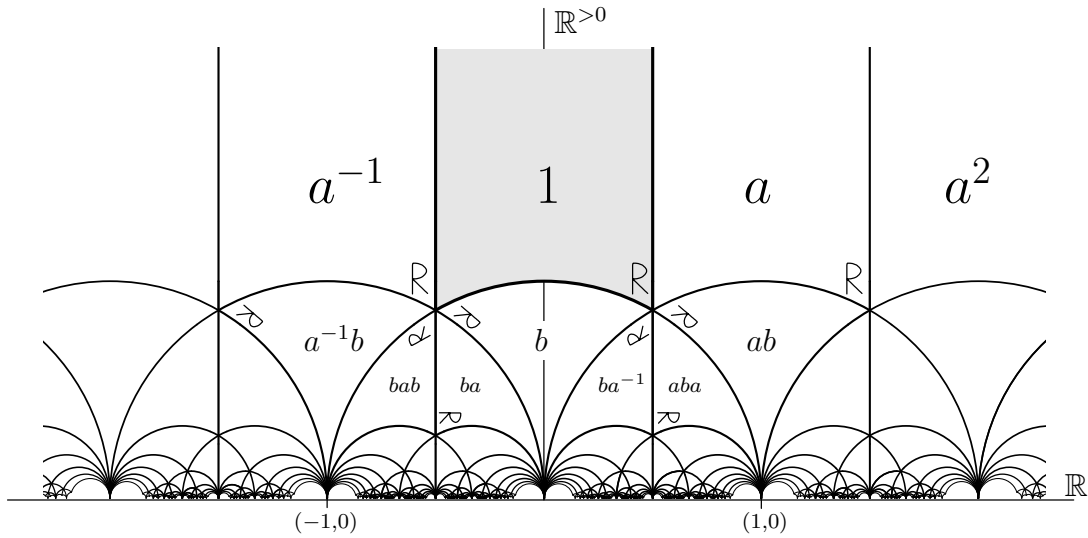
$a$ ,  $b$  bzw.  $c$  werden oft auch mit  $T$ ,  $S$  bzw.  $U$  bezeichnet. Eine Präsentation lautet mit  $T$ ,  $S$  und  $U$ :

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) = \langle S, T, U \mid S^2 = (ST)^3 = 1, TU = UT, (USU^{-1}S)^2 = 1 \rangle.$$

Die folgende Zeichnung zeigt einen Schnitt der Operation von  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  auf dem oberen Halbraum  $\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{>0}$  mit der imaginären Ebene  $i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$ . Die 180°-Drehung  $b$  ist darin als Spiegelung der hyperbolischen Ebene  $i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$  sichtbar.



Die nächste Zeichnung zeigt die Operation von  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  auf der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0} = \mathbb{H}^2$ . Die Gruppe  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle a, b \mid b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle$  ist eine Untergruppe von  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ .



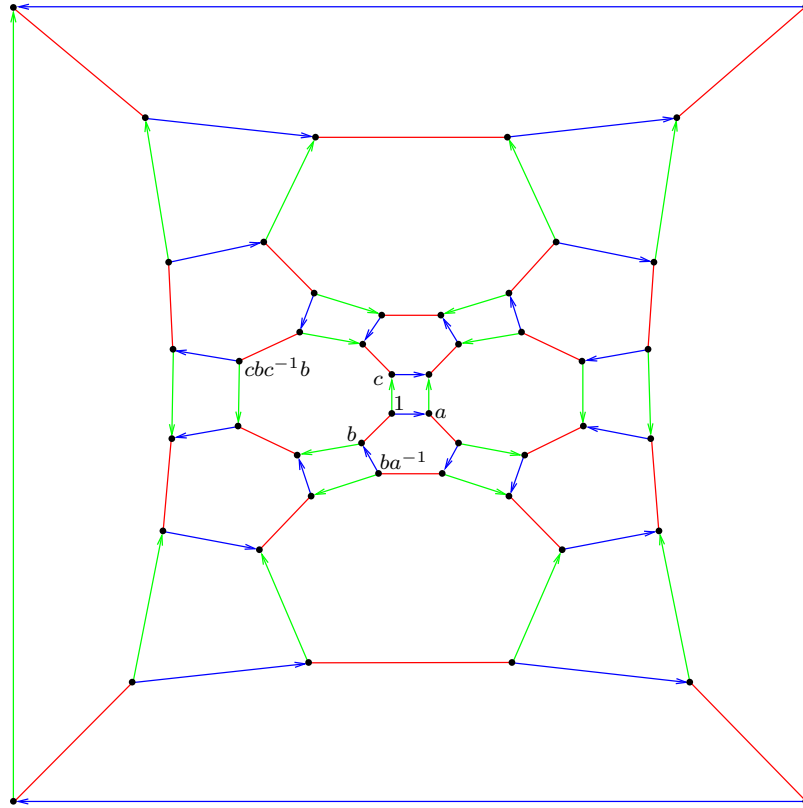
Das kleine „R“ in den Zeichnungen dient zum Veranschaulichen der Operation von  $a$ ,  $b$  und  $c$  auf den Ebenen. So operiert  $b$  beispielsweise orientierungsumkehrend auf der Ebene  $i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$  und orientierungserhaltend auf der Ebene  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$ .

Wir betrachten nun das Geschehen an der Ecke  $e_1$ , diese Ecke ist in den beiden oben dargestellten Ebenen nicht enthalten. Es sei

$$\mathcal{F}_{e_1} := \{ \gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) \mid e_1 \in \gamma \cdot \mathcal{F} \}$$

die Menge der Elemente von  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ , die den Fundamentaltbereich  $\mathcal{F}$  zur Ecke  $e_1$  bringen. Diese Menge enthält genau 48 Elemente. Die folgende Zeichnung zeigt den Cayleygraphen

von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  eingeschränkt auf  $\mathcal{F}_{e_1}$ , die Kanten entsprechen den Erzeugern  $a$  (blau),  $b$  (rot) und  $c$  (grün). Die Ecken sind angeordnet in Form eines abgestumpften Kuboktaeders (auch großes Rhombenkuboktaeder  $\{4, 6, 8\}$  genannt).



Die Knoten markieren die Elemente von  $\mathcal{F}_{e_1}$ . Eine rote Kante  $(\gamma_1, \gamma_2)$  bedeutet, daß  $\gamma_2 = \gamma_1 \cdot b$ . Eine blaue gerichtete Kante von  $\gamma_1$  nach  $\gamma_2$  steht für  $\gamma_2 = \gamma_1 \cdot a$ . Eine grüne gerichtete Kante von  $\gamma_1$  nach  $\gamma_2$  kennzeichnet, daß  $\gamma_2 = \gamma_1 \cdot c$ .

Jedes Element von  $\mathcal{F}_{e_1}$  verschiebt eine der Ecken  $e_1, e_2, e_3$  oder  $e_4$  des Fundamentalbereichs nach  $e_1$ . Es ist beispielsweise  $a \cdot e_2 = e_1, b \cdot e_1 = e_1$  und  $c \cdot e_4 = e_1$ . In  $\mathcal{F}_{e_1}$  enthalten ist der 12-elementige Stabilisator  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])_{e_1}$  von  $e_1$ . Dieser ist isomorph zu  $\mathcal{A}_4$ , siehe [Floege1983]. Der Stabilisator von  $e_1$  in [GruGuMe1982] besitzt 24 Elemente, weil er zu einer Obergruppe von Index 2 von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  gehört.

Fügen wir zu  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  die Relationen  $a^2 = 1$  und  $c^2 = 1$  hinzu, so verwandeln sich die gerichteten blauen und grünen Kanten in ungerichtete Kanten, und es entsteht der Cayleygraph von

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) / \langle\langle a^2, c^2 \rangle\rangle = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (ac)^2 = (cb)^4 = 1 \rangle,$$

einer 48-elementigen Coxetergruppe.

Die vier Ecken  $e_1, e_2, e_3$  und  $e_4$  des Fundamentalbereichs  $\mathcal{F}$  von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  sind symmetrisch in dem Sinne, daß die Symmetriegruppe von  $\mathcal{F}$  transitiv darauf operiert. An jeder Ecke  $e_i$  des Fundamentalbereichbodens gibt es also 48 Kopien von  $\mathcal{F}$ , die in Form eines abgestumpften Kuboktaeders angeordnet sind.

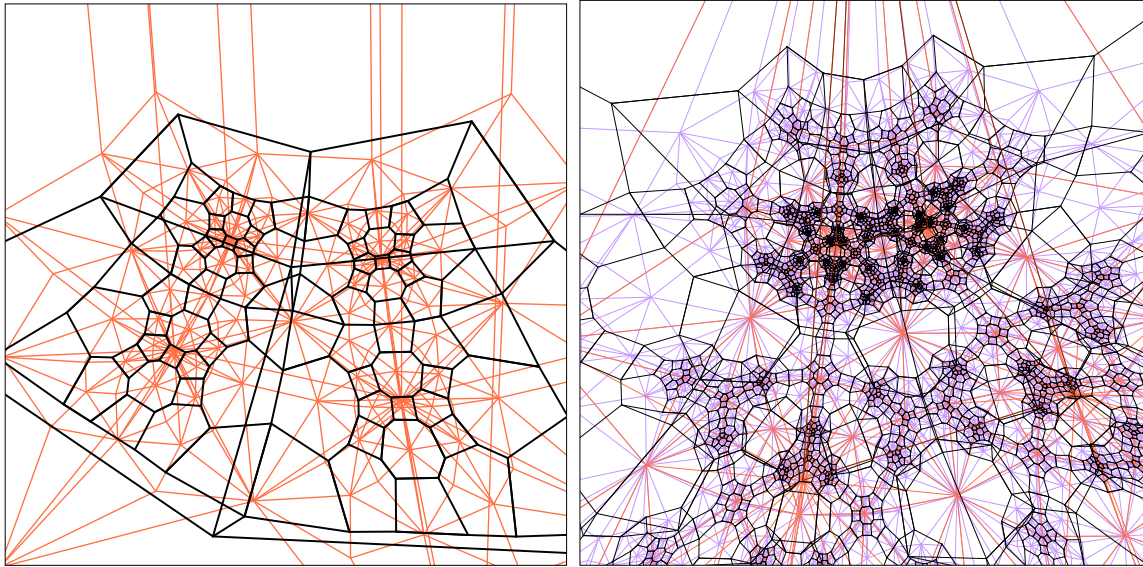
Die zu  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) \cdot \mathcal{F}$  duale Pflasterung besteht aus abgestumpften Kuboktaedern. Die abgestumpften Kuboktaeder der dualen Pflasterung pflastern allerdings nicht den ganzen  $\mathbb{H}^3$ , sondern nur  $\mathbb{H}^3$  ohne Horobälle an den Repräsentanten der Spitze von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ :

$$\mathbb{H}^3 \setminus \{g \cdot (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{>2}) \mid g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])\}.$$



Wir können die duale Pflasterung als Spiegelungsgruppe auffassen. Dabei wird die Spiegelungsgruppe von den Spiegelungen an den Sechseck- und Achteckseiten der abgestumpften Kuboktaeder erzeugt.

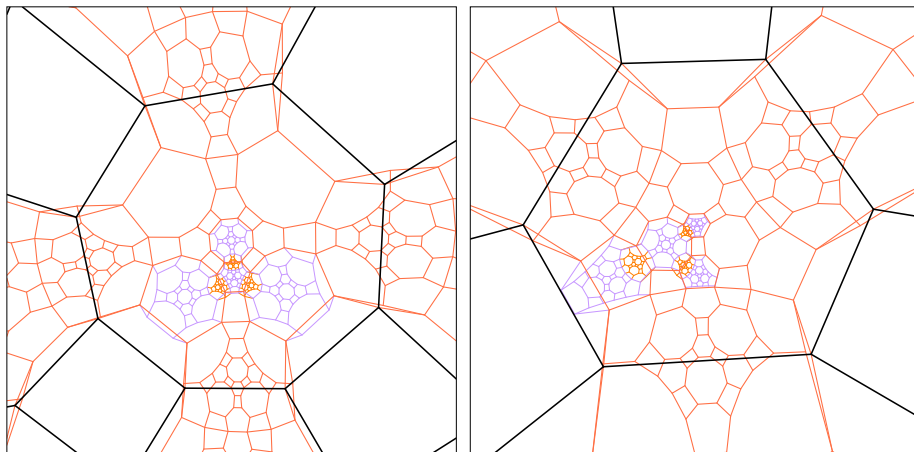
Die folgenden beiden Bilder zeigen die Kanten der Pflasterung  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) \cdot \mathcal{F}$ . Die Kanten der dazu dualen Pflasterung aus abgestumpften Kuboktaedern sind schwarz eingezeichnet.



Zum Bestimmen der 3-Wachstumsfunktion einer Dodekaederkettenpflasterung haben wir in Abschnitt 4.3 verschiedene Typen von Dodekaederketten definiert. Ebenso können wir verschiedene Typen von abgestumpften Kuboktaedern definieren, um die Wachstumsfunktion der hier betrachteten dualen Pflasterung zu  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  zu berechnen.

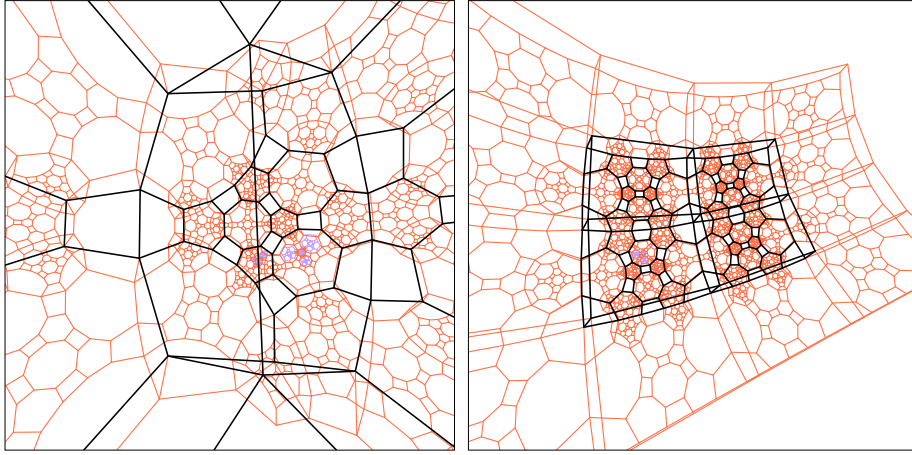
Es seien  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$  und  $\mathcal{G}_4$  die abgestumpften Kuboktaeder der dualen Pflasterung mit einer Ecke im Fundamentalebereich  $\mathcal{F}$ . Um die nullte Schale  $S_0 = \{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4\}$  können wir Schalen  $S_k$  von abgestumpften Kuboktaedern betrachten. Wir definieren nun drei verschiedene Typen von abgestumpften Kuboktaedern. Ein abgestumpftes Kuboktaeder vom Typ 1 hat ein Achteck mit der vorigen Schale gemeinsam, ein abgestumpftes Kuboktaeder vom Typ 2 besitzt ein Sechseck mit der vorigen Schale gemeinsam und ein abgestumpftes Kuboktaeder vom Typ 3 hat nur eine Kante mit der vorigen Schale gemeinsam.

Die folgenden beiden Bilder zeigen ein abgestumpftes Kuboktaeder vom Typ 1 (links) und ein abgestumpftes Kuboktaeder vom Typ 2 (rechts).





Links ist ein abgestumpftes Kuboktaeder vom Typ 3 dargestellt, rechts die erste Schale von „fast  $\infty$ “ aus gesehen.



Aus diesen Bildern können wir eine Wachstumsmatrix und einen Initialvektor für die duale Pflasterung gewinnen.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 7 \\ 12 & 12 & 18 \end{pmatrix}, \quad v_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Wachstumsfunktion der dualen Pflasterung mit der nullten Schale  $S_0 = \{ \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4 \}$  lautet:

$$\begin{aligned} f_{\{4,6,8\} \setminus 4}(x) &= (1 \ 1 \ 1) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} A^i v_d x^i = 4 \cdot \frac{1 - 6x^2}{(1-x)(1-29x+66x^2)} \\ &= 4 + 120x + 3196x^2 + 84744x^3 + \dots \end{aligned}$$

Die Wachstumsfunktion der dualen Pflasterung mit nur einem abgestumpften Kuboktaeder in der nullten Schale lautet:

$$\begin{aligned} f_{\{4,6,8\}}(x) &= 1 + (1 \ 1 \ 1) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} A^i v_d^1 x^{i+1} = \frac{1 + 8x - 23x^2 - 6x^3}{(1-x)(1-29x+66x^2)} \\ &= 1 + 38x + 1022x^2 + 27110x^3 + \dots, \end{aligned}$$

als Initialvektor verwenden wir  $v_d^1 = (6 \ 8 \ 24)^t$ .

Durch Modifikation des Zeilenvektors und des Initialvektors erhalten wir eine 3-Wachstumsfunktion von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ . Als Zeilenvektor und Initialvektor wählen wir:

$$s = (48 - 8 - 4 \cdot 4/2 \quad 48 - 6 - 3 \cdot 6/2 \quad 48 - 2 - 10/2) = (32 \ 33 \ 41), \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ein abgestumpftes Kuboktaeder vom Typ 1 hat eine Achteckfläche mit einem Polyeder der vorigen Schale gemeinsam. Die acht Ecken dieser Achteckfläche zählen in der  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ -Pflasterung daher zur vorigen Schale. Es verbleiben  $48 - 8$  Ecken des abgestumpften Kuboktaeders, die in der  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ -Pflasterung zur selben Schale zählen können.  $4 \cdot 4$ -Ecken des abgestumpften Kuboktaeders vom Typ 1 sind aber auch Ecken benachbarter abgestumpfter Kuboktaeder derselben Schale. Daher trägt ein abgestumpftes Kuboktaeder vom Typ 1 mit  $s_1 = 48 - 8 - 4 \cdot 4/2$  Kopien des  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ -Fundamentaltbereichs  $\mathcal{F}$  zur  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ -Pflasterung bei. Entsprechend ergeben sich die Komponenten  $s_2$  und  $s_3$  des Zeilenvektors  $s$ .

Ein Korrektursummand  $x$  ist nötig, damit auch das Element  $b$ , das zu allen vier Kantenpolyedern der ersten Schale gehört, mitgezählt wird. Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \sum_{i=0}^{\infty} s \cdot A^i v \cdot x^{i+1} \\ &= \frac{1 + 135x - 339x^2 + 29x^3 - 66x^4}{(1-x)(1-29x+66x^2)} = 1 + 165x + 4516x^2 + 119900x^3 + \dots \end{aligned}$$

Das Residuum dieser Wachstumsfunktion von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  an der Stelle 1 lautet  $120/19$ .

Diese Wachstumsfunktion von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  haben wir mittels geometrischer Betrachtungen bestimmt. Das zugehörige Erzeugendensystem besteht aus 165 Elementen. Dieses Paar  $(G, \Sigma)$  ist ein Beispiel für eine diskrete Untergruppe von  $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^3)$ , deren Wachstumsfunktion geometrisch bestimmt werden kann, aber deren algebraische Bestimmung Probleme bereitet. Zum Zeitpunkt der Abfassung dieser Arbeit konnte KBMAG diese Wachstumsfunktion nicht berechnen.

## 5.4 Visualisierung von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-3})$

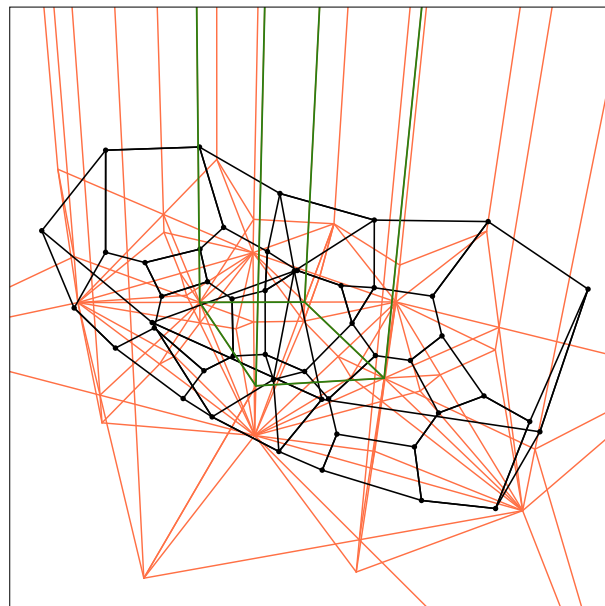
Eine Präsentation von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$  mit  $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$  lautet:

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega]) = \left\langle T, U, S, L \mid \begin{array}{l} S^2 = (TS)^3 = 1, TU = UT, L^3 = (SL)^2 = 1, \\ L^{-1}TL = T^{-1}U^{-1}, L^{-1}UL = T, (USL)^3 = 1 \end{array} \right\rangle.$$

Diese Präsentation entsteht durch Quotientenbildung aus der entsprechenden Präsentation von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$  in [Swan1971]. Die Elemente  $T, U, S$  und  $L$  können identifiziert werden mit

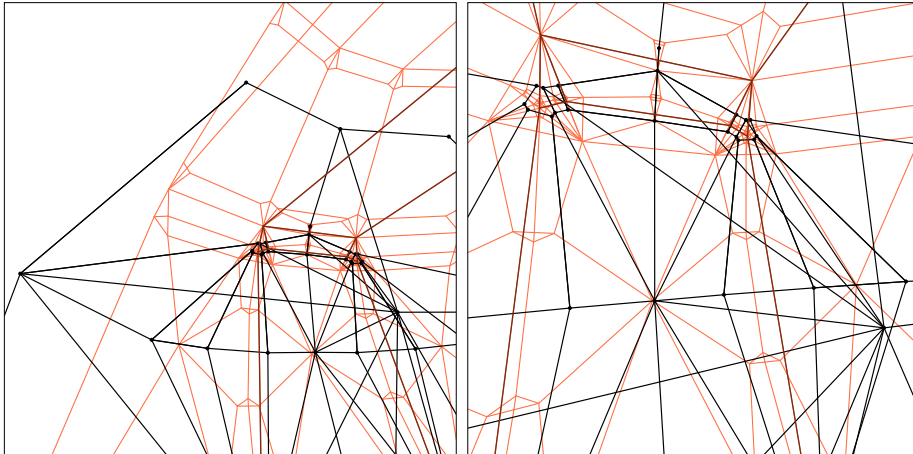
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

Das folgende Bild zeigt einen Fundamentalbereich von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$  mit grünen Kanten und alle benachbarten Polyeder mit orangen Kanten. Kanten der zugehörigen dualen Pflasterung sind schwarz eingezeichnet.



## 5.5 Visualisierung von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$

Die folgenden beiden Bilder zeigen Kanten eines Fundamentalbereichs von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$  (grün) und benachbarter Kopien (orange). Kanten der dualen Pflasterung sind schwarz eingezeichnet. Im Gegensatz zu  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  und  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  wirkt diese duale Pflasterung eher unübersichtlich.



## 5.6 Wachstumsfunktionen von Untergruppen

Mit der Hilfe der Funktion `LowIndexSubgroupsFpGroup` des Softwarepaketes `GAP` ([GAP2000]) erstellen wir eine Liste von Untergruppen von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  bzw.  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  und berechnen mittels `KBMAG` Wachstumsfunktionen und Residuen an der Stelle 1 dieser Untergruppen.

Wir beginnen mit  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  in der Präsentation

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) = \left\langle S, T, C, D \mid \begin{array}{l} S^2 = (ST)^3 = 1, C^2 = D^2 = 1, \\ (CS)^3 = (DS)^2 = (CT)^2 = (DT)^2 = 1 \end{array} \right\rangle.$$

$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  besitzt  $1+3+1+4+4+21 = 34$  Untergruppen, deren Index  $\leq 6$  ist. Zu jeder dieser Untergruppen haben wir mit `GAP` eine Präsentation gewonnen und mit `KBMAG` die zugehörige Wachstumsfunktion berechnet. In der folgenden Liste geben wir das Residuum an der Stelle 1 der berechneten Wachstumsfunktion als Quotient aus. Jeder Eintrag in der Liste ist von der Form

*Index der Untergruppe   laufende Nr.   Residuum   6/Residuum.*

Sofern `KBMAG` keine automatische Struktur bestimmen konnte, ist die entsprechende Untergruppe mit ? (a) markiert. Falls die Wachstumsfunktion aufgrund sehr großer Koeffizienten nicht bestimmt werden konnte, ist die entsprechende Untergruppe mit ? (f) markiert.

Ind.	Nr.	Residuum	6/Residuum	Ind.	Nr.	Residuum	6/Residuum
1	1	6	1.000000	4	4	12/5	2.500000
2	1	4	1.500000	5	1	96/49	3.062500
2	2	24/7	1.750000	5	2	12/7	3.500000
2	3	24/7	1.750000	5	3	? (a)	
3	1	8/3	2.250000	5	4	? (a)	
4	1	96/41	2.562500	6	1	3/2	4.000000
4	2	? (a)		6	2	152/107	4.223684
4	3	624/281	2.701923	6	3	4/3	4.500000

Ind.	Nr.	Residuum	6/Residuum	Ind.	Nr.	Residuum	6/Residuum
6	4	2	3.000000	6	14	8/7	5.250000
6	5	? (a)		6	15	2	3.000000
6	6	? (a)		6	16	2	3.000000
6	7	? (a)		6	17	4/3	4.500000
6	8	2	3.000000	6	18	20/11	3.300000
6	9	4/3	4.500000	6	19	? (a)	
6	10	149/85	3.422819	6	20	88/43	2.931818
6	11	? (a)		6	21	? (a)	
6	12	300/161	3.220000				
6	13	8/7	5.250000				

Nun betrachten wir  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  in der Präsentation

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) = \langle S, T, U \mid S^2 = (ST)^3 = 1, TU = UT, (USU^{-1}S)^2 = 1 \rangle.$$

$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  besitzt  $1 + 3 + 5 + 9 + 3 + 47 = 68$  Untergruppen, deren Index  $\leq 6$  ist. Die Residuen an der Stelle 1 der Wachstumsfunktionen der von GAP berechneten Präsentierungen lauten:

Ind.	Nr.	Residuum	6/Residuum	Ind.	Nr.	Residuum	6/Residuum
1	1	8/3	2.250000	6	11	? (a)	
2	1	8/5	3.750000	6	12	? (a)	
2	2	12/5	2.500000	6	13	24/29	7.250000
2	3	12/5	2.500000	6	14	? (a)	
3	1	8/7	5.250000	6	15	? (a)	
3	2	24/19	4.750000	6	16	? (f)	
3	3	4/3	4.500000	6	17	? (a)	
3	4	192676/132475	4.125319	6	18	? (f)	
3	5	192676/132475	4.125319	6	19	15/17	6.800000
4	1	8/9	6.750000	6	20	? (f)	
4	2	12/11	5.500000	6	21	? (a)	
4	3	? (a)		6	22	4/5	7.500000
4	4	? (a)		6	23	? (a)	
4	5	1	6.000000	6	24	? (a)	
4	6	121651/109094	5.380671	6	25	? (f)	
4	7	121651/109094	5.380671	6	26	4/5	7.500000
4	8	? (a)		6	27	8/7	5.250000
4	9	? (a)		6	28	20/27	8.100000
5	1	8/11	8.250000	6	29	? (a)	
5	2	6/7	7.000000	6	30	1	6.000000
5	3	24/25	6.250000	6	31	? (a)	
6	1	8/13	9.750000	6	32	? (a)	
6	2	12/17	8.500000	6	33	? (a)	
6	3	? (a)		6	34	? (a)	
6	4	? (a)		6	35	? (a)	
6	5	4/5	7.500000	6	36	4/5	7.500000
6	6	8/11	8.250000	6	37	4/5	7.500000
6	7	8/11	8.250000	6	38	3642/3679	6.060956
6	8	20/27	8.100000	6	39	28/33	7.071429
6	9	? (a)		6	40	4/5	7.500000
6	10	? (a)		6	41	1366/1461	6.417277

Ind.	Nr.	Residuum	6/Residuum	Ind.	Nr.	Residuum	6/Residuum
6	42	34/37	6.529412	6	45	? (f)	
6	43	1087/1216	6.712052	6	46	92/153	9.978261
6	44	92/153	9.978261	6	47	1087/1216	6.712052

Jetzt betrachten wir  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  in der Präsentation

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) = \left\langle A, M, S, V, U \mid \begin{array}{l} A^2 = 1, S^3 = 1, (MA)^2 = 1, \\ UM = AU, UV = SU, V^2M^{-1}AS = 1 \end{array} \right\rangle.$$

Aufgrund der anderen Präsentation liefert GAP für viele Untergruppen andere Präsentierungen. Damit erhalten wir andere Wachstumsfunktionen mit anderen Residuen an der Stelle 1.

Ind.	Nr.	Residuum	6/Residuum	Ind.	Nr.	Residuum	6/Residuum
1	1	8/3	2.250000	6	14	? (a)	
2	1	? (a)		6	15	? (a)	
2	2	6/5	5.000000	6	16	? (a)	
2	3	6/5	5.000000	6	17	4/3	4.500000
3	1	424/405	5.731132	6	18	? (a)	
3	2	3/2	4.000000	6	19	? (a)	
3	3	3/2	4.000000	6	20	1	6.000000
3	4	3/2	4.000000	6	21	? (a)	
3	5	3/2	4.000000	6	22	? (a)	
4	1	? (a)		6	23	? (a)	
4	2	200/137	4.110000	6	24	1	6.000000
4	3	? (a)		6	25	? (a)	
4	4	1371/1024	4.481400	6	26	488/553	6.799180
4	5	200/137	4.110000	6	27	? (a)	
4	6	? (a)		6	28	? (a)	
4	7	? (a)		6	29	? (f)	
4	8	? (a)		6	30	? (a)	
4	9	-2	-3.000000	6	31	? (a)	
5	1	? (a)		6	32	? (a)	
5	2	? (a)		6	33	12/13	6.500000
5	3	5592/5101	5.473176	6	34	12/13	6.500000
6	1	? (a)		6	35	4/5	7.500000
6	2	? (a)		6	36	4/5	7.500000
6	3	12/13	6.500000	6	37	12/13	6.500000
6	4	12/13	6.500000	6	38	12/13	6.500000
6	5	100/121	7.260000	6	39	2/3	9.000000
6	6	26/29	6.692308	6	40	4/3	4.500000
6	7	4/5	7.500000	6	41	160/153	5.737500
6	8	? (a)		6	42	? (a)	
6	9	? (a)		6	43	? (a)	
6	10	4/3	4.500000	6	44	? (a)	
6	11	? (a)		6	45	25/23	5.520000
6	12	? (a)		6	46	? (a)	
6	13	? (a)		6	47	? (a)	

Interessant ist das negative Residuum der neunten Untergruppe von Index 4.

Die Spalte 6/Residuum wurde hinzugefügt, um feststellen, ob es einen Zusammenhang zwischen dem Untergruppenindex und dem Kehrwert des Residuums gibt.



# Kapitel 6

## Cusp-Closing

Wir betrachten die Gruppe

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) = \langle T, S, U \mid S^2 = (ST)^3 = 1, TU = UT, (USU^{-1}S)^2 = 1 \rangle.$$

Die Elemente

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugen den zu  $\mathbb{Z}^2 = \langle T, U \mid TU = UT \rangle$  isomorphen Stabilisator einer Konjugationsklasse der Spitze von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$ .

Es seien  $k, l \in \mathbb{N}_0$  mit  $k + l > 0$ . Wir entfernen die Spitze, indem wir den von  $T^k U^l$  erzeugten Normalteiler  $\langle\langle T^k U^l \rangle\rangle$  aus  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  herausschneiden:

$$G_{k,l} := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) / \langle\langle T^k U^l \rangle\rangle.$$

Mit Hilfe des Programmpakets `KBMAG` berechnen wir Wachstumsfunktionen der Quotienten  $G_{k,l}$ . Die Residuen an der Stelle 1 dieser Wachstumsfunktionen scheinen gegen das Residuum von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  selbst zu konvergieren:

$$\lim_{k+l \rightarrow \infty} \mathrm{res}_1(f_{G_{k,l}, \Sigma}) = \mathrm{res}_1(f_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]), \Sigma}).$$

Genauer gilt für kleines  $k \geq 3$  und  $0 \leq i \leq k$ :

$$\mathrm{res}_1(f_{G_{2k-i,i}, \Sigma}) = \mathrm{res}_1(f_{G_{i,2k-i}, \Sigma}) = 8 \cdot \frac{k(k+6) - 3i}{(3k-2)(k+6) - 10i}.$$

Wir vermuten, daß diese Formel für beliebig großes  $k$  gilt. Zum Berechnen der Wachstumsfunktionen von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  und den Quotienten  $G_{k,l}$  verwenden wir das Erzeugendensystem  $\Sigma = \{T, T^{-1}, S, U, U^{-1}\}$ .

Ebenso betrachten wir Quotienten der Gruppen  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ ,  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$ ,  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-7})$  und einer Gruppe  $\Gamma^d < \mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ . Ferner studieren wir zwei Untergruppen vom Index 2 in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ . Bei diesen Gruppen beobachten wir ebenfalls das Phänomen, daß die Residuen an der Stelle 1 von Wachstumsfunktionen der Quotienten für wachsendes  $k + l$  gegen das Residuum an der Stelle 1 der Ursprungsgruppe zu konvergieren scheinen. Für viele Quotienten formulieren wir Vermutungen über den exakten Wert des Residuums.

Wir zeigen, daß die Residuen an der Stelle 1 der Wachstumsfunktionen einer Serie von Quotienten von  $\Gamma^d$  gegen das Residuum von  $\Gamma^d$  selbst konvergieren.

Bei der Gruppe  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-7})$  beobachten wir das Phänomen, daß für kleine  $k$  und  $l$  auch einige negative Residuen auftreten.

## 6.1 Cusp-Closings von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$

Wir verwenden die Präsentation

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) = \left\langle S, T, C, D \mid \begin{array}{l} S^2 = (ST)^3 = 1, C^2 = D^2 = 1, \\ (SC)^3 = (SD)^2 = (DT)^2 = (CT)^2 = 1 \end{array} \right\rangle$$

mit dem Erzeugendensystem  $\Sigma := \{S, T, T^{-1}, C, D\}$ .

Seien  $k, l \in \mathbb{N}_0$  mit  $k + l > 0$ . Dann können wir folgende Spitzenkompaktifizierung von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  betrachten:

$$G_{k,l} := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) / \langle\langle T^k U^l \rangle\rangle, \quad (6.1.1)$$

wobei  $U := CD$  und  $\langle\langle T^k U^l \rangle\rangle$  der von  $T^k U^l$  erzeugte Normalteiler in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  ist. Es sei  $\Sigma = \{S, T, T^{-1}, C, D\}$  das Erzeugendensystem von  $G_{k,l}$ .

Aus der Präsentation von  $G_{k,l}$  für festes  $k$  und  $l$  liefert uns **KBMAG** bei erfolgreicher Rechnung zwei endliche Automaten, nämlich einen Wortakzeptor und einen allgemeinen Multiplikator. **KBMAG** – Knuth-Bendix on Monoids and Automatic Groups – bestimmt die Automaten mit Hilfe des Knuth-Bendix-Algorithmus. Der allgemeine Multiplikator (*general multiplier*) liefert eine ShortLex-automatische Struktur, siehe [ECHLPT1992] und [KBMAG2000]. Mit Hilfe des Wortakzeptors können wir die Wachstumsfunktion gewinnen. Im **KBMAG**-Programmpaket ist das Programm **fsagrowth** von Laurent Bartholdi enthalten. **fsagrowth** haben wir so modifiziert, daß Wachstumsfunktionen mit bis zu neunstelligen Polynomkoeffizienten berechnet werden können. Aus der Wachstumsfunktion gewinnen wir anschließend das Residuum an der Stelle 1.

Mit Hilfe eines Perl-Skripts können wir automatisch für endlich viele  $k$  und  $l$  das Residuum an der Stelle 1 der Wachstumsfunktion von  $(G_{k,l}, \Sigma)$  bestimmen. Das Perl-Skript ruft für jedes Paar  $(k, l)$  nacheinander die Programme **autgroup** – ein Programm im **KBMAG**-Paket – zum Berechnen und Verifizieren der ShortLex-automatischen Struktur, **fsagrowth** zum Bestimmen der Wachstumsfunktion und **Maple** zum Berechnen des Residuums auf. **Maple** liefert das Residuum in Form eines Bruchs. In den Tabellen geben wir die auf drei Nachkommastellen gerundeten Residuen an.

Die Auswertung der so erhaltenen Brüche der Residuen an der Stelle 1 der Wachstumsfunktion von  $(G_{k,l}, \Sigma)$  führt uns zu folgender Vermutung. Für kleine  $k$  und  $l$  ist die Vermutung aufgrund der Berechnungen von **KBMAG** verifiziert.

**Vermutung 6.1.1** Seien  $k, l \in \mathbb{N}_0$  mit  $2k + l \geq 6$ . Die Wachstumsfunktion  $f_{G_{2k,l}, \Sigma}(x)$  von  $(G_{2k,l}, \Sigma)$  besitzt an der Stelle 1 eine einfache Polstelle mit dem Residuum

$$\mathrm{res}_{2k,l}(1) = \begin{cases} 12 \cdot \frac{2l^2 + 3(k+2)l + k^2}{4l^2 + 6(k+1)l + 2k^2 - 9k - 18}, & k+l \text{ gerade,} \\ \frac{12l}{2l-3}, & k+l \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Der Kehrwert des Residuums lautet

$$\frac{1}{\mathrm{res}_{2k,l}(1)} = \begin{cases} \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2l + 3k + 6}{2l^2 + 3(k+2)l + k^2}, & k+l \text{ gerade,} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{4l}, & k+l \text{ ungerade.} \end{cases}$$





Manche Residuen wurden nicht berechnet, weil der Knuth-Bendix-Algorithmus innerhalb einer gewissen Zeit nicht terminierte oder die ShortLex-Automaten aufgrund der Komplexität der Zwischenergebnisse nicht bestimmt werden konnten. Diese Residuen sind mit einem roten Fragezeichen markiert.

Wir fügen in der Präsentation das Element  $U = CD$  hinzu:

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) = \left\langle S, T, C, D, U \mid \begin{array}{l} S^2 = (ST)^3 = 1, C^2 = D^2 = 1, \\ (SC)^3 = (SD)^2 = (DT)^2 = (CT)^2 = 1, \\ U = CD \end{array} \right\rangle.$$

Als Erzeugendensystem definieren wir  $\Sigma' := \{S, T, T^{-1}, C, D, U, U^{-1}\}$ .

Nach KBMAG lautet die Wachstumsfunktion von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  zum Erzeugendensystem  $\Sigma'$ :

$$f(x) = \frac{1 + x - 5x^2 - 2x^3 - 6x^4 + 2x^5 + 5x^6 + x^7 + 8x^8 + 7x^9 + 6x^{10} + 13x^{11} + x^{12} - 6x^{13} - 6x^{14} - 4x^{15}}{1 - 6x + 12x^2 - 9x^3 + 3x^4 - x^5 - 6x^6 + 15x^7 - 14x^8 + 9x^{10} - 9x^{11} + 7x^{12} - 2x^{14}}.$$

Das Residuum an der Stelle 1 lautet 8.

**Definition:** Für  $k, l \in \mathbb{N}_0$  sei  $G'_{k,l}$  der Quotient  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])/\langle\langle T^k U^l \rangle\rangle$  zusammen mit dem Erzeugendensystem  $\Sigma'$ . Es sei  $\mathrm{res}_{k,l}$  das Residuum der Wachstumsfunktion von  $G'_{k,l}$ , sofern vorhanden.

Aus den von KBMAG gelieferten Wachstumsfunktionen berechnet **Maple** das Residuum in Form eines Bruchs. Die Residuen  $\mathrm{res}_{k,0}$  mit  $6 \leq k \leq 24$  lauten beispielsweise:

Zi_06_00	12	Zi_16_00	64/7
Zi_07_00	11	Zi_17_00	9796/1081
Zi_08_00	32/3	Zi_18_00	9
Zi_09_00	1156/113	Zi_19_00	1153/129
Zi_10_00	10	Zi_20_00	80/9
Zi_11_00	595/61	Zi_21_00	18820/2129
Zi_12_00	48/5	Zi_22_00	44/5
Zi_13_00	1388/147	Zi_23_00	6211/709
Zi_14_00	28/3	Zi_24_00	96/11
Zi_15_00	1651/179		

Durch geschicktes Erweitern der Residuen  $\mathrm{res}_{2k,0}$  erhalten wir die Zahlenfolge

$$\frac{24}{2}, \frac{32}{3}, \frac{40}{4}, \frac{48}{5}, \frac{56}{6}, \frac{64}{7}, \frac{72}{8}, \dots$$

Diese Zahlenfolge führt zusammen mit der Betrachtung der Brüche  $\mathrm{res}_{2k+1, 2l+1}$  zu folgender Vermutung:

**Vermutung 6.1.2** Für  $k \geq 6$  und  $0 \leq l \leq k$  mit geradem  $k+l$  gilt:

$$\mathrm{res}_{k,l} = \mathrm{res}_{l,k} = 8 \cdot \frac{k}{k-2}.$$

Eine Analyse der Residuen  $\mathrm{res}_{2k-1,0}$  liefert folgende Vermutung:

**Vermutung 6.1.3** Für  $k \geq 4$  gilt

$$\mathrm{res}_{2k-1,0} = 4 \cdot \frac{4k^3 - 2k^2 - 36k + 19}{2k^3 - 3k^2 - 18k + 28}.$$



## 6.2 Cusp-Closings von $\Gamma <_2 \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$

In diesem Abschnitt betrachten wir Untergruppen vom Index 2 in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ .

**Lemma 6.2.1** *Der von  $T$  erzeugte Normalteiler  $\Gamma$  in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  besitzt die Präsentation*

$$\Gamma = \langle S, T, C, DCD \mid S^2 = (ST)^3 = C^2 = (DCD)^2 = 1, \\ (SC)^3 = (S \cdot DCD)^3 = (TC)^2 = (T \cdot DCD)^2 = 1 \rangle.$$

Mit Hilfe folgender Befehle liefert das Programm GAP, [GAP2000], eine zur angegebenen Präsentation offensichtlich äquivalente Präsentation.

```
F4 := FreeGroup("S", "T", "C", "D");
S := F4.1; T := F4.2; C := F4.3; D := F4.4;
Pic := F4 / [S^2, (S*T)^3, C^2, D^2, (S*C)^3, (S*D)^2, (D*T)^2, (C*T)^2 ];
p := PresentationNormalClosureRrs(Pic, Subgroup(Pic, [Pic.2]) );
PrimaryGeneratorWords( p );
GeneratorsOfPresentation( p ); TzPrintRelators( p );
```

Die Elemente  $T$  und  $C \cdot DCD$  in der Gruppe  $\Gamma$  erzeugen ein  $\mathbb{Z}^2$ -Gitter vom Index 2 in der Spitze  $\Gamma_\infty$ . Wir teilen den von  $T^k (C \cdot DCD)^l$  erzeugten Normalteiler aus  $\Gamma$  heraus und betrachten das Residuum an der Stelle 1 der zugehörigen Wachstumsfunktion.

**Definition:** Für  $k, l \in \mathbb{N}_0$  sei

$$\Gamma_{k,l} := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) / \langle\langle T^k (C \cdot DCD)^l \rangle\rangle.$$

Als Erzeugendensystem verwenden wir  $\Sigma := \{ S, T, T^{-1}, C, DCD \}$ .

Mittels KBMAG werden die Wachstumsfunktionen bestimmt. Die Auswertung der Residuen der Wachstumsfunktionen führt uns zur folgenden Vermutung.

**Vermutung 6.2.1** *Die Wachstumsfunktion  $f_{\Gamma_{k,l}, \Sigma}(x)$  von  $(\Gamma_{k,l}, \Sigma)$  hat an der Stelle 1 für  $k + l \geq 6$  eine einfache Polstelle. Das Residuum, welches wir mit  $\mathrm{res}_{k,l}$  bezeichnen, nimmt folgende Werte an:*

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{2k,l} &= \frac{4l}{l-1}, & l \geq 3 \wedge l \geq k, \\ \mathrm{res}_{1,l} &= 2 \cdot \frac{4l^4 + 16l^3 - 34l^2 - 141l + 3}{2l^4 + 6l^3 - 25l^2 - 53l + 74}, & l \geq 3, \\ \mathrm{res}_{3,l} &= 2 \cdot \frac{4l^4 + 28l^3 - 30l^2 - 353l + 8}{2l^4 + 12l^3 - 29l^2 - 161l + 184}, & l \geq 2, \\ \mathrm{res}_{5,l} &= 2 \cdot \frac{4l^4 + 40l^3 - 2l^2 - 589l + 17}{2l^4 + 18l^3 - 21l^2 - 293l + 308}, & l \geq 3, \\ \mathrm{res}_{7,l} &= 2 \cdot \frac{4l^4 + 52l^3 + 50l^2 - 825l + 30}{2l^4 + 24l^3 - l^2 - 437l + 434}, & l \geq 4, \\ \mathrm{res}_{9,l} &= 2 \cdot \frac{4l^4 + 64l^3 + 126l^2 - 1037l + 47}{2l^4 + 30l^3 + 31l^2 - 581l + 550}, & l \geq 5. \end{aligned}$$

Für ungerades  $k$  sind die Werte des Residuums  $\mathrm{res}_{k,l}$  an der Stelle 1 komplizierter, liegen aber zwischen den Werten der benachbarten Residuen mit geradem  $k$ .

**Vermutung 6.2.2** Für  $1 \leq k \leq l$  und  $l \geq 3$  gilt

$$\text{res}_{2k-1,l} = 2 \cdot \frac{4l^4 + 4(3k+1)l^3 + 2(6k^2 - 16k - 7)l^2 + (4k^3 - 36k^2 - 132k + 23)l + (2k^2 - k + 2)}{2l^4 + 6kl^3 + (6k^2 - 22k - 9)l^2 + (2k^3 - 24k^2 - 50k + 19)l - (2k^3 - 19k^2 - 67k + 10)},$$

$$1 - \frac{4}{\text{res}_{2k-1,l}} = \frac{4l^3 + (12k+4)l^2 + (12k^2 - 32k - 15)l + (4k^3 - 36k^2 - 135k + 22)}{4l^4 + (12k+4)l^3 + (12k^2 - 32k - 14)l + (4k^3 - 36k^2 - 132k + 23)l + (2k^2 - k + 2)}.$$

Die letzte Zeile in Vermutung 6.2.2 läßt sich umformen in

$$-4l + \frac{1}{-l + \frac{1}{1 - \frac{4}{\text{res}_{2k-1,l}}}} = \frac{(4k^2 - 28k - 23)l + (4k^3 - 36k^2 - 135k + 22)}{l^2 + (3k+1)l + (2k^2 - k + 2)}.$$

**Lemma 6.2.2** Der von  $U$  erzeugte Normalteiler  $\Gamma$  in  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  hat die Präsentation

$$\Gamma' = \langle TS, T^{-1}S, CS, DS \mid (TS)^3 = (T^{-1}S)^3 = (CS)^3 = (DS)^2 = 1, \\ (CS \cdot (TS)^{-1})^2 = (CS \cdot (T^{-1}S)^{-1})^2 = 1, \\ (TS \cdot DS)^2 = (T^{-1}S \cdot DS)^2 = 1 \rangle.$$

GAP liefert eine zu dieser Präsentation äquivalente Präsentation.

```
F4 := FreeGroup("S", "T", "C", "D");
S := F4.1; T := F4.2; C := F4.3; D := F4.4;
Pic := F4 / [S^2, (S*T)^3, C^2, D^2, (S*C)^3, (S*D)^2, (D*T)^2, (C*T)^2 ];
p := PresentationNormalClosureRrs(Pic, Subgroup(Pic, [Pic.3*Pic.4] ));
GeneratorsOfPresentation(p); TzPrintRelators(p);
```

Es ist  $T^2 = TS \cdot (T^{-1}S)^{-1}$  und  $U = CD = CS \cdot SD = CS \cdot DS$ .

Für  $k, l \in \mathbb{N}_0$  definieren wir den Quotienten

$$\Gamma'_{k,l} := \Gamma' / \langle\langle (T^2)^k \cdot U^l \rangle\rangle.$$

Als Erzeugendensystem nehmen wir

$$\Sigma' := \{TS, ST^{-1}, T^{-1}S, ST, CS, SC, DS\}.$$





### 6.3 Cusp-Closings von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$

Wir verwenden in diesem Abschnitt die Präsentation

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) = \langle T, S, U \mid S^2 = (ST)^3 = 1, TU = UT, (USU^{-1}S)^2 = 1 \rangle$$

zusammen mit dem Erzeugendensystem

$$\Sigma = \{T, T^{-1}, S, U, U^{-1}\}.$$

Nach KBMAG lautet die Wachstumsfunktion von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  zum Erzeugendensystem  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]), \Sigma}(x) &= \frac{1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 2x^6 + x^7}{1 - 3x + x^2 - x^4 + x^5 + x^6} \\ &= \frac{(1+x)^3(1-x+x^2)(1+x^2)}{(1-x)(1-2x-x^2-x^3-2x^4-x^5)}. \end{aligned}$$

**Definition:** Für  $k, l \geq 0$  sei  $G_{k,l}$  der Quotient  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) / \langle\langle T^k U^l \rangle\rangle$  zusammen mit dem Erzeugendensystem  $\Sigma$ . Es sei  $\mathrm{res}_{k,l}$  das Residuum der Wachstumsfunktion von  $G_{k,l}$ , sofern vorhanden.

**Vermutung 6.3.1** Für  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 3$  und  $0 \leq i \leq k$  gilt:

$$\mathrm{res}_{2k-i, i} = \mathrm{res}_{i, 2k-i} = 8 \cdot \frac{k(k+6) - 3i}{(3k-2)(k+6) - 10i}.$$

Für ungerades  $k+l$  ist das Residuum an der Stelle 1 etwas komplizierter aufgebaut.

**Vermutung 6.3.2** Für  $k \geq 4$  gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{2k-1, 0} &= 8 \cdot \frac{2k^2 - 6k + 3}{6k^2 - 22k + 19}, \\ \mathrm{res}_{0, 2k-1} &= 8 \cdot \frac{k^2 - 4k + 2}{3k^2 - 14k + 13}. \end{aligned}$$

Diese Vermutungen basieren auf den von KBMAG berechneten Wachstumsfunktionen und deren Residuen. Für größer werdende  $k$  konvergieren die angegebenen Ausdrücke gegen das Residuum  $8/3$  von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$  selbst.





## 6.4 Cusp-Closings von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$

Wir verwenden die Präsentation

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]) = \langle S, T, U, B, C \mid S^2 = (ST)^3 = 1, TU = UT, B^2 = (SB)^2 = 1, \\ (SUBU^{-1})^2 = 1, SCS = TCT^{-1}, \\ UBU^{-1}CB = TCT^{-1} \rangle$$

zusammen mit dem Erzeugendensystem

$$\Sigma := \{S, T, T^{-1}, U, U^{-1}, B, C, C^{-1}\}.$$

Nach KBMAG lautet die Wachstumsfunktion von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$  zum Erzeugendensystem  $\Sigma$ :

$$f_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]), \Sigma}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

$P(x) = 1 - 3x^2 - 2x^3 + \dots \in \mathbb{Z}[x]$  ist ein Polynom vom Grad 31 mit den Koeffizienten

$$1, 0, -3, -2, -4, 3, 18, 10, -2, -18, -35, 12, 27, -9, 13, 0, \\ 14, -4, -33, 19, -1, 20, 18, 1, 6, -14, 2, 3, 3, 2, 0, 1.$$

$Q(x) = 1 - 8x + 10x^2 + \dots \in \mathbb{Z}[x]$  ist ein Polynom vom Grad 31 mit den Koeffizienten

$$1, -8, 10, 12, -1, -32, -20, 13, 46, 42, -37, -64, -13, 134, -188, 165, \\ -123, 98, 45, -196, 235, -274, 215, -110, 82, -20, -29, 21, -11, 8, -4, 3.$$

Im Zähler ist der Faktor  $1 + x$ , im Nenner ist der Faktor  $1 - x$  enthalten.

**Definition:** Für  $k, l \geq 0$  sei  $G_{k,l}$  der Quotient  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]) / \langle\langle T^k U^l \rangle\rangle$  zusammen mit dem Erzeugendensystem  $\Sigma$ . Es sei  $\mathrm{res}_{k,l}$  das Residuum der Wachstumsfunktion von  $G_{k,l}$ , falls es existiert.

Für wachsendes  $k+l$  scheinen auch diese Koeffizienten gegen das Residuum  $3/4$  an der Stelle 1 von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$  selbst zu konvergieren.

**Vermutung 6.4.1** Für  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 3$  und  $0 \leq i \leq k$  gilt:

$$\mathrm{res}_{2k-i, i} = \mathrm{res}_{i, 2k-i} = \frac{k(6k-8) + 4i}{8k^2 - 12k + 2 + 5i}.$$



## 6.5 Cusp-Closings von $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-7})$

Wir benutzen die Präsentation von  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-7})$ , die auch in [GruSchw1993] verwendet wird.

$$\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-7}) = \langle T, S, T_\omega \mid S^2 = (ST)^3 = 1, TT_\omega = T_\omega T, (T_\omega STT_\omega^{-1}S)^2 = 1 \rangle,$$

wobei  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $T_\omega = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Es ist  $\mathcal{O}_{-7} = \mathbb{Z}[\omega]$  mit  $\omega = \frac{1+\sqrt{7}i}{2}$ . Als Erzeugendensystem legen wir  $\Sigma := \{S, T, T^{-1}, T_\omega, T_\omega^{-1}\}$  zugrunde.

Nach KBMAG lautet die Wachstumsfunktion von  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-7})$  zum Erzeugendensystem  $\Sigma$ :

$$f_{\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-7}), \Sigma}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

$P(x) = 1 + 4x + 8x^2 + \dots \in \mathbb{Z}[x]$  ist ein Polynom vom Grad 22 mit den Koeffizienten

$$1, 4, 8, 12, 17, 21, 17, 6, -3, -12, -23, -28, \\ -27, -22, -17, -20, -25, -23, -17, -12, -8, -4, -1.$$

$Q(x) = 1 - x - 3x^2 + \dots \in \mathbb{Z}[x]$  ist ein Polynom vom Grad 21 mit den Koeffizienten

$$1, -1, -3, -3, -2, -1, 2, 4, 5, 7, 6, -4, -5, -1, 0, 4, 3, -2, -3, -3, -3, -1.$$

Im Zähler ist der Faktor  $(1+x)^2$  und im Nenner der Faktor  $1-x$  enthalten.

**Definition:** Für  $k, l \geq 0$  sei  $G_{k,l}$  der Quotient  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-7})/\langle\langle T^k T_\omega^l \rangle\rangle$  zusammen mit dem Erzeugendensystem  $\Sigma$ . Es sei  $\mathrm{res}_{k,l}$  das Residuum der Wachstumsfunktion von  $G_{k,l}$  an der Stelle 1, falls es existiert.

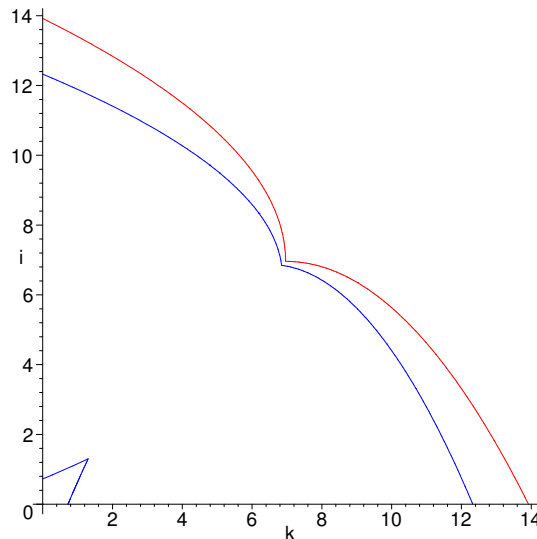
Die Auswertung der Brüche der berechneten Residuen der  $G_{k,l}$  führt uns zur folgenden Vermutung.

**Vermutung 6.5.1** Für  $k \geq 2$  und  $0 \leq i \leq k$  gilt:

$$\mathrm{res}_{2k-i,i} = \mathrm{res}_{i,2k-i} = 6 \cdot \frac{26k^2 - 362k + 181i}{61k^2 - 796k + 543 + 299i}.$$

$\mathrm{res}_{2k-i,i}$  und  $\mathrm{res}_{i,2k-i}$  konvergieren für  $k \rightarrow \infty$  gegen das Residuum  $156/61$  von  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-7})$ .

Bei dieser Gruppe tritt das Phänomen auf, daß für kleine  $k$  und  $l$  auch negative Residuen auftreten. Dies wird erklärt durch die Polstellen- und Nullstellenmenge der Residuenformel in Vermutung 6.5.1. Die folgende Skizze zeigt die Polstellenmenge (in blau) und die Nullstellenmenge (in rot). In der Skizze wird die Symmetrie  $\mathrm{res}_{2k-i,i} = \mathrm{res}_{i,2k-i}$  berücksichtigt.





## 6.6 Quotienten von $\Gamma^d < \text{Iso}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$

Wir betrachten nun eine diskrete Untergruppe  $\Gamma^d < \text{Iso}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$  der Isometriegruppe von  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Die Isometriegruppe von  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  ist das direkte Produkt der Isometriegruppen von  $\mathbb{H}^2$  und  $\mathbb{R}$  (siehe [Scott1983]):

$$\text{Iso}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) = \text{Iso}(\mathbb{H}^2) \times \text{Iso}(\mathbb{R}).$$

$\Gamma^d$  ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \Gamma^d := & \langle T^{-1}C, TC, SC, U \mid (SC)^2 = (TC)^2 = (T^{-1}C)^2 = 1, \\ & (TC \cdot SC)^3 = (T^{-1}C \cdot SC)^3 = 1, \\ & (U \cdot TC)^2 = (U \cdot T^{-1}C)^2 = 1, \\ & (U \cdot SC)^2 = 1 \rangle \\ = & \langle T^{-1}C, TC, SC, U \mid (SC)^2 = (TC)^2 = (T^{-1}C)^2 = 1, \\ & (TC \cdot SC)^3 = (T^{-1}C \cdot SC)^3 = 1, \\ & TC \cdot U \cdot (TC)^{-1} = U^{-1}, \\ & T^{-1}C \cdot U \cdot (T^{-1}C)^{-1} = U^{-1}, \\ & SC \cdot U \cdot (SC)^{-1} = U^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

Diese Gruppe ist ein semidirektes Produkt von  $\mathbb{Z}$  und der Coxetergruppe  $C_{3,3,\infty}$ , die auf der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}^2$  operiert. Wir definieren  $C_{3,3,\infty}$  wie folgt:

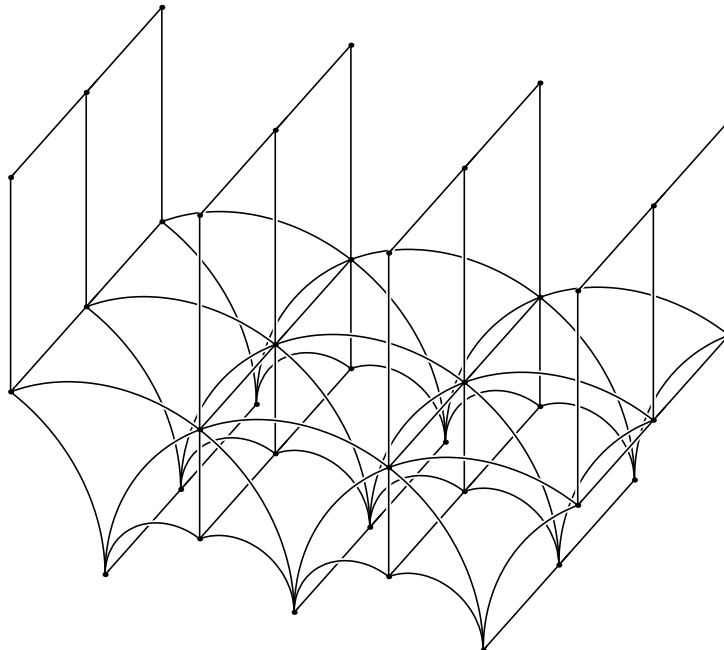
$$C_{3,3,\infty} := \left\langle T^{-1}C, TC, SC \mid \begin{array}{l} (SC)^2 = (TC)^2 = (T^{-1}C)^2 = 1, \\ (TC \cdot SC)^3 = (T^{-1}C \cdot SC)^3 = 1 \end{array} \right\rangle.$$

Dann erhalten wir

$$\Gamma^d = \mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} C_{3,3,\infty}$$

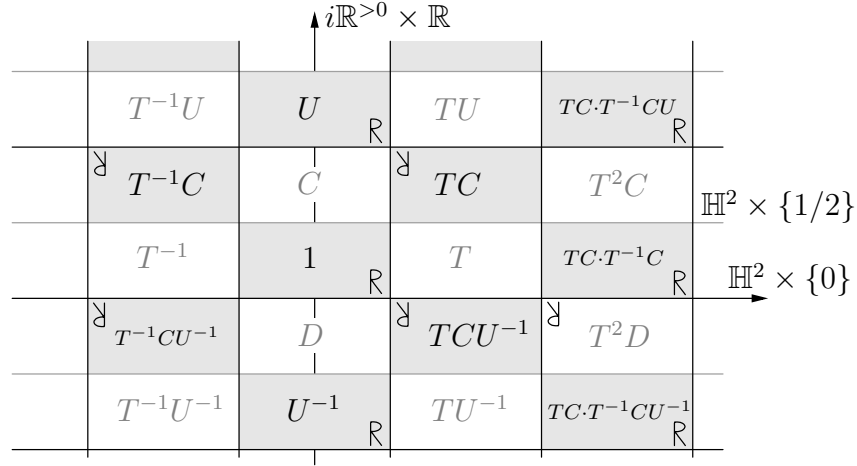
mit  $\mathbb{Z} = \langle U \mid \rangle$  und

$$\varphi: C_{3,3,\infty} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}), \quad \begin{array}{l} TC \mapsto (U \mapsto U^{-1}), \\ T^{-1}C \mapsto (U \mapsto U^{-1}), \\ SC \mapsto (U \mapsto U^{-1}). \end{array}$$

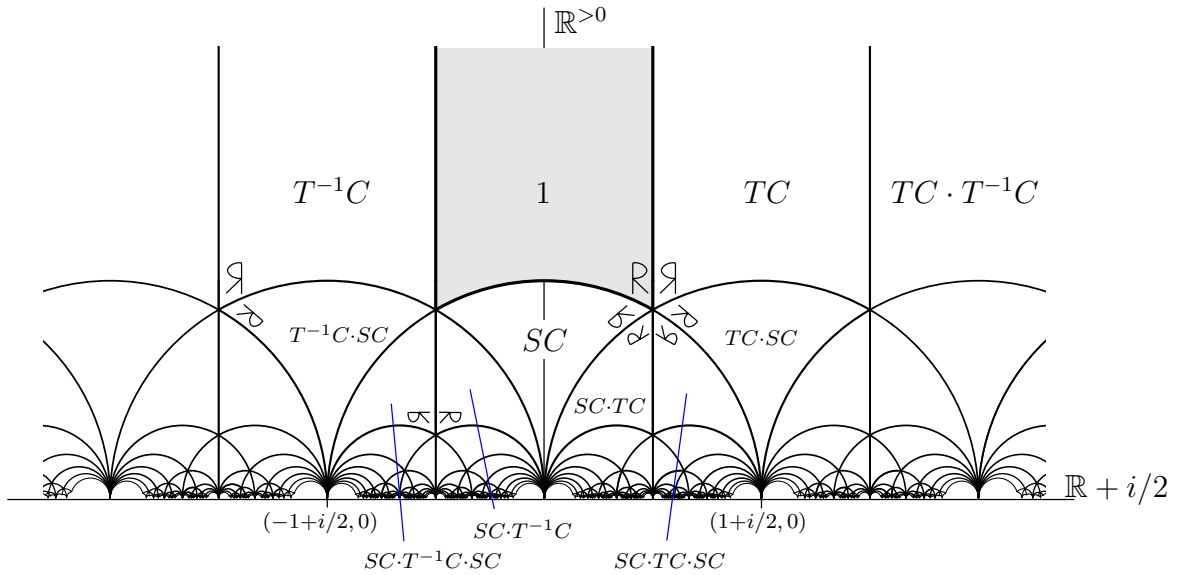


Auf der vorigen Seite sind unten 20 Kopien eines Fundamentalbereichbereichs von  $\Gamma^d$  abgebildet. Der Fundamentalbereich ist das Produkt eines hyperbolischen Dreiecks in  $\mathbb{H}^2$  und dem Einheitsintervall  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Das Dreieck besitzt die Winkel  $0, \pi/3$  und  $\pi/3$  und wird oft als Fundamentalbereich von  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  verwendet.

Die folgende Zeichnung zeigt die Operation von  $\Gamma^d$  in einer Horosphäre in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , die das Produkt  $(\mathbb{R} + 2i) \times \mathbb{R}$  einer Horosphäre in  $\mathbb{H}^2$  mit  $\mathbb{R}$  ist.



Die nächste Zeichnung zeigt die Operation von  $\Gamma^d$  in der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}^2 \times \{1/2\}$ . In dieser Ebene ist nur die Operation der Coxeteruntergruppe  $C_{3,3,\infty}$  von  $\Gamma^d$  sichtbar.



**Definition:** Setze  $a := TC$ ,  $b := SC$ ,  $c := T^{-1}C$  und  $u := U$ . Für  $p \in \mathbb{Z}$  sei

$$\Gamma_p^d := \Gamma^d / \langle\langle (ac)^p \rangle\rangle = \left\langle a, c, b, u \mid \begin{array}{l} a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (cb)^3 = (ac)^p = 1, \\ aua^{-1} = cuc^{-1} = bub^{-1} = u^{-1} \end{array} \right\rangle.$$

Es ist  $\Gamma_0^d = \Gamma^d$ . Auch für  $p \neq 0$  ist  $\Gamma_p^d = \mathbb{Z} \rtimes C_{3,3,p}$  ein semidirektes Produkt von  $\mathbb{Z}$  und einer Coxetergruppe. Für  $p \geq 4$  operiert die Dreiecksgruppe  $C_{3,3,p}$  auf der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}^2$ , und der Fundamentalbereich ist ein Dreieck mit den Winkeln  $\pi/3, \pi/3$  und  $\pi/p$ . Beim Bilden des Quotienten wird also aus dem  $0^\circ$ -Winkel des Fundamentalbereichs von  $C_{3,3,\infty}$  ein  $\pi/p$ -Winkel.

**Definition:** Für  $p \geq 2$  definieren wir  $[p] := 1 + x + \dots + x^{p-1}$ . Ferner sei  $[\infty](x) := 1 + x + x^2 + \dots = 1/(1-x)$ .

**Lemma 6.6.1** Die Wachstumsfunktion der Gruppe  $\Gamma^d < \text{Iso}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$  zum Erzeugendensystem  $\Sigma := \{a, b, c, u, u^{-1}\}$  lautet:

$$f_{\Gamma^d, \Sigma}(x) = \frac{(1+x)^2(1+x+x^2)}{(1-x)(1-x-x^2)} = \frac{1+3x+4x^2+3x^3+x^4}{1-2x+x^3}.$$

**Beweis:** Die Formel erhalten wir durch das gleiche Verfahren wie im Beweis des folgenden Lemmas.

$$f_{C_{3,3,\infty}, \{a,b,c\}}(x) = \frac{[2][3]^2[\infty]}{[2][3]^2[\infty] - 2x[2][3][\infty] - x[3]^2[\infty]} = \dots = \frac{(1+x)(1+x+x^2)}{1-x-x^2}.$$

□

**Lemma 6.6.2** Die Wachstumsfunktion von  $\Gamma_p^d$  zum Erzeugendensystem  $\Sigma := \{a, b, c, u, u^{-1}\}$  lautet für  $p \geq 4$ :

$$f_{\Gamma_p^d, \Sigma}(x) = \frac{[2]^2[3][p]}{(1-x)([2][3][p] - 2x[2][p] - x[3][p-1])}$$

**Beweis:** Nach [CanWagr1992, Prop. 3.1] ist die Wachstumsfunktion der Coxetergruppe

$$C_{p,q,r} = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^p = (bc)^q = (ac)^r = 1 \rangle$$

zum Erzeugendensystem  $S = \{a, b, c\}$  für  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$  gegeben durch

$$f_{C_{p,q,r}, S}(x) = \frac{[2][p][q][r]}{[2][p][q][r] - x([p-1][q][r] + [p][q-1][r] + [p][q][r-1])}.$$

Im Fall  $C_{3,3,p}$  erhalten wir daher

$$\begin{aligned} f_{C_{3,3,p}, \{a,b,c\}}(x) &= \frac{[2][3]^2[p]}{[2][3]^2[p] - 2x[2][3][p] - x[3]^2[p-1]} \\ &= \frac{[2][3][p]}{[2][3][p] - 2x[2][p] - x[3][p-1]}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$f_{C_{3,3,p}, \{a,b,c\}}(1) = \frac{2 \cdot 3 \cdot p}{2 \cdot 3 \cdot p - 2 \cdot 2 \cdot p - 3 \cdot (p-1)} = \frac{6p}{3-p} \neq 0,$$

deshalb können wir Lemma 1.3.3 auf  $\Gamma_p^d = \mathbb{Z} \rtimes C_{3,3,p}$  anwenden und erhalten die Wachstumsfunktion  $f_{\Gamma_p^d, \Sigma}(x)$ . □

**Corollar 6.6.3**  $\Sigma = \{a, b, c, u, u^{-1}\}$ . Es gilt

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{res}_1(f_{\Gamma_p^d, \Sigma}) = \text{res}_1(f_{\Gamma^d, \Sigma}).$$

**Beweis:** Aus den vorherigen Ergebnissen und Lemma 1.3.3 folgen

$$\begin{aligned} \text{res}_1 f_{\Gamma^d, \Sigma} &= -2 \cdot f_{C_{3,3,\infty}, \{a,b,c\}}(1) = 12, \\ \text{res}_1 f_{\Gamma_p^d, \Sigma} &= -2 \cdot f_{C_{3,3,p}, \{a,b,c\}}(1) = \frac{12p}{p-3}. \end{aligned}$$

□



**Definition:** Für  $k, l \geq 0$  definieren wir den Quotienten

$$G_{k,l} := \Gamma^d / \langle\langle (TC \cdot T^{-1}C)^k \cdot U^l \rangle\rangle$$

mit dem Erzeugendensystem  $\Sigma := \{T^{-1}C, TC, SC, U, U^{-1}\}$ .

Für kleine  $k$  und  $l$  haben wir mit KBMAG Wachstumsfunktionen von  $(G_{k,l}, \Sigma)$  und deren Residuen an der Stelle 1 bestimmt. Die folgende Tabelle stellt die Residuen für kleine  $k$  und  $l$  dar, soweit diese bestimmt werden konnten. Ein großer Teil der Residuen konnte nicht berechnet werden.

12	0												
11	0	0											
10	0	0	0										
9	0	0	0	?									
8	0	0	0	?									
7	0	0	0	?	?								
6	0	0	0	?	?	?							
5	0	0	0	?	?	?	?						
4	0	0	0	?	?	?	?	?					
3	0	0	0	?	?	?	?	?	?				
2	0	0	0	?	?	?	?	?	?	?	?		
1	0	0	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	
0	12	-12	-48	-5	48	30	24	21	19.20	18	17.14	16.50	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

$k \longrightarrow$

Die Residuen von  $G_{k,0}$  für  $k = 0$  und  $k \geq 4$  stimmen mit den auf der vorhergehenden Seite berechneten Residuen überein.

Die folgende Tabelle zeigt die Werte  $f_{G_{k,l},\Sigma}(1)$  der Wachstumsfunktion des Quotienten  $G_{k,l}$ .

12	-72												
11	-66	198											
10	-60	180	1440										
9	-54	162	1296	?									
8	-48	144	1152	?									
7	-42	126	1008	?	?								
6	-36	108	864	?	?	?							
5	-30	90	720	?	?	?	?						
4	-24	72	576	?	?	?	?	?					
3	-18	54	432	?	?	?	?	?	?				
2	-12	36	288	?	?	?	?	?	?	?			
1	-6	18	144	?	?	?	?	?	?	?	?		
0	Pol	Pol	Pol	Pol	Pol	Pol	Pol	Pol	Pol	Pol	Pol	Pol	Pol
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	$k \longrightarrow$												

Für  $l \geq 1$  ist  $G_{0,l} = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \rtimes C_{3,3,\infty}$  ein semidirektes Produkt. Die Wachstumsfunktion lautet:

$$f_{G_{0,l},\Sigma}(x) = f_{\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}}(x) \cdot f_{C_{3,3,\infty}}(x).$$

Sie besitzt keine Polstelle bei 1, denn es gilt:

$$f_{G_{0,l}}(1) = l \cdot (-6) = -6l.$$

Das Fehlen einer Polstelle ist dadurch zu erklären, daß  $C_{3,3,\infty}$  auf der zweidimensionalen hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}^2$  operiert und  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  endlich ist.

Die Gruppen  $G_{k,l}$  mit  $k \in \{1, 2\}$  und  $1 \leq l \leq 10$  sind ohne Ausnahme endlich.  $f_{G_{k,l},\Sigma}(1)$  gibt dabei die Anzahl der Elemente von  $G_{k,l}$  an.

## 6.7 Weitere Gruppen

Zu den Gruppen  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-3})$ ,  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-6}])$ ,  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-11})$  und  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-15})$  hat KBMAG mit den unten angegebenen Präsentierungen nur sehr wenige Wachstumsfunktionen von Quotienten der Form  $G/\langle\langle T^k U^l \rangle\rangle$  bestimmen können.

$$\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-3}) = \left\langle S, T, U, L \mid \begin{array}{l} S^2 = (ST)^3 = 1, L^3 = (SL)^2 = 1, TU = UT, \\ L^{-1}TL = TU, L^{-1}UL = T, (USL)^3 = 1 \end{array} \right\rangle.$$

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]) = \left\langle S, T, U, B, C \mid \begin{array}{l} S^2 = (ST)^3 = 1, TU = UT, B^2 = 1, SC = CS, \\ T^{-1}CTUBU^{-1} = BC, (STB)^3 = 1, \\ (STUBU^{-1})^3 = 1 \end{array} \right\rangle.$$

$$\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-11}) = \langle S, T, U \mid S^2 = (ST)^3 = 1, TU = UT, (USTU^{-1}S)^3 = 1 \rangle.$$

$$\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-15}) = \left\langle S, T, U, C \mid \begin{array}{l} S^2 = (ST)^3 = 1, TU = UT, SC = CS, \\ UCUST = TSUCU \end{array} \right\rangle.$$

Die Formulierung von Vermutungen zu den Residuen ist daher nicht möglich.



# Kapitel 7

## Quotienten des Achterknotens

Der Achterknoten ist der einfachste Knoten, der ein hyperbolisches Komplement hat. Seine Fundamentalgruppe ist eine Untergruppe vom Index 12 der Bianchigruppe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$  mit  $\omega = e^{2\pi i/3}$ . Siehe auch [Riley1975], [Jørgensen1977], [Thurston1980], [Thurston1982], [Francis1983] und [Ratcliffe1994, §10.3.].

In diesem Kapitel werden einige Quotienten der Fundamentalgruppe  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus F_8)$  des Achterknotenkomplements betrachtet. Wir zeigen, daß die betrachteten Quotienten endlich sind. Aufgrund der Endlichkeit der Quotienten ergeben sich die Wachstumsfunktionen als einfache Polynome. Die Wachstumsfunktionen besitzen somit keine Polstellen.

In Abschnitt 7.1 benutzen wir eine Präsentation des Achterknotenkomplements, die einfach aus dem Knotendiagramm hergeleitet werden kann. In den Abschnitten 7.2 bis 7.5 rechnen wir mit einer Präsentation, die der Darstellung des Achterknotenkomplements als Faserung über einem Kreis mit einem punktierten Torus als Faser entspricht.

Mit der Hilfe von `KBMAG` und `SnapPea` berechnen wir Wachstumsfunktionen der Fundamentalgruppe des Achterknotens selbst und anderer Knoten. Die Residuen dieser Wachstumsfunktionen listen wir in Abschnitt 7.6 auf. Wir vergleichen den Kehrwert des Residuums mit dem hyperbolischen Volumen des zugehörigen Knotenkomplements, falls dieses eine hyperbolische Struktur besitzt.

### 7.1 Präsentation $\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$

Es ist

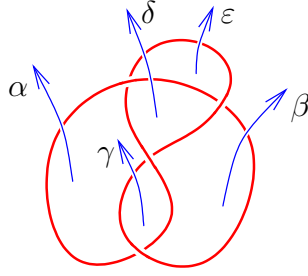
$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus F_8) &= \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 \rangle \\ &= \langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta^{-1}]\alpha = \beta[\alpha, \beta^{-1}] \rangle\end{aligned}$$

eine Präsentation der Fundamentalgruppe des Achterknotenkomplements in der dreidimensionalen Sphäre  $\mathbb{S}^3$  (siehe [Milnor1982]).

Das Achterknotenkomplement besitzt folgende Darstellung in der Bianchigruppe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$  mit  $\omega = e^{2\pi i/3}$ :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Präsentation kann aus einem Diagramm des Achterknotens  $F_8$  gewonnen werden:



$$\begin{aligned}
 \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus F_8) &= \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \mid \beta\gamma^{-1}\alpha = \gamma\alpha^{-1}\delta\beta^{-1} = \alpha\delta^{-1}\epsilon = \beta\epsilon\delta^{-1} = 1 \rangle \\
 &= \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \mid \gamma = \alpha\beta, \delta = \alpha\gamma^{-1}\beta, \epsilon = \beta^{-1}\delta = \delta\alpha^{-1} \rangle \\
 &= \langle \alpha, \beta, \delta \mid \delta = \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta, \beta^{-1}\delta = \delta\alpha^{-1} \rangle \\
 &= \langle \alpha, \beta, \delta \mid \delta = [\alpha, \beta^{-1}], \beta\delta = \delta\alpha \rangle. \tag{7.1.1}
 \end{aligned}$$

Für  $k, l \in \mathbb{N}$  definieren wir den Quotienten

$$\begin{aligned}
 G_{k,l} &:= \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1, \alpha^k\beta^l = 1 \rangle \\
 &= \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus F_8) / \langle\langle \alpha^k\beta^l \rangle\rangle
 \end{aligned}$$

von  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus F_8)$ . Mit Hilfe dreier Lemmas zeigen wir nun, daß  $G_{k,l}$  eine endliche zyklische Gruppe ist, falls  $k$  und  $l$  teilerfremd sind.

**Lemma 7.1.1**  $\alpha^k$  und  $\beta^l$  sind im Zentrum  $Z(G_{k,l})$  von  $G_{k,l}$ .

**Beweis:** Aus  $\alpha^k\beta^l = 1$  folgt  $\alpha^k = \beta^{-l}$ . Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \alpha^k &\in Z(G_{k,l}), \text{ da } \alpha^k \cdot \beta = \beta^{-l} \cdot \beta = \beta \cdot \beta^{-l} = \beta \cdot \alpha^k, \\
 \beta^l &\in Z(G_{k,l}), \text{ da } \beta^l \cdot \alpha = \alpha^{-k} \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha^{-k} = \alpha \cdot \beta^l.
 \end{aligned}$$

□

**Lemma 7.1.2**  $\alpha$  und  $\beta$  sind konjugiert zueinander.

**Beweis:** Sei  $\delta = [\alpha, \beta^{-1}]$ . Aus der Präsentation von  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus F_8)$  folgt direkt  $\beta\delta = \delta\alpha$  bzw.  $\delta\alpha\delta^{-1} = \beta$ . □

**Lemma 7.1.3**  $\alpha^k = \beta^k$  und  $\alpha^l = \beta^l$ .

**Beweis:** Sei  $g \in G_{k,l}$  mit  $g\alpha g^{-1} = \beta$ . Da  $\alpha^k, \beta^l \in Z(G_{k,l})$ , ist  $g\alpha^k g^{-1} = \alpha^k$ ,  $g\beta^l g^{-1} = \beta^l$ . Damit folgen

$$\beta^l = (g\alpha g^{-1})^l = g\alpha^l g^{-1} = \alpha^l \quad \text{und} \quad \alpha^k = (g\alpha g^{-1})^k = g\beta^k g^{-1} = \beta^k.$$

□

**Satz 7.1.4** Sei  $\text{ggT}(k, l) = 1$ . Dann ist  $G_{k,l} = \mathbb{Z}/(k+l)\mathbb{Z}$ .

**Beweis:** Aus Lemma 7.1.3 folgt

$$\alpha^{\text{ggT}(k,l)} = \beta^{\text{ggT}(k,l)}.$$

Aus  $\text{ggT}(k, l) = 1$  folgt daher  $\alpha = \beta$ . Damit ist  $G = \langle \alpha, \beta \mid \alpha = \beta, 1 = 1, \alpha^{k+l} = 1 \rangle$ , die Rückrichtung ist klar:

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1.$$

□

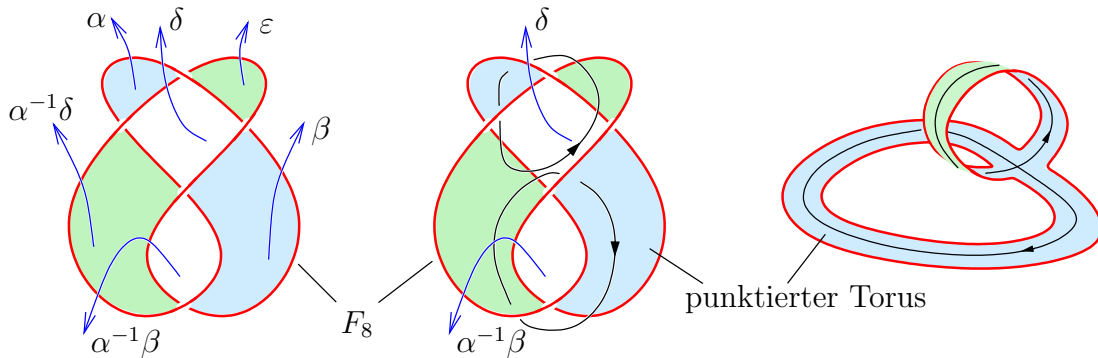
## 7.2 Präsentation $xax^{-1} = aca$ , $xcx^{-1} = ca$

Eine andere Präsentation des Achterknotens lautet

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus F_8) = \langle a, c, x \mid xax^{-1} = aca, xcx^{-1} = ca \rangle, \quad (7.2.2)$$

siehe beispielsweise [Hi Lo M-A1992].

Diese Präsentation spiegelt wider, daß das Achterknotenkomplement eine Faserung über einem Kreis mit einem punktierten Torus als Faser ist. Die linke Zeichnung zeigt einen Achterknoten mit einer Seifert-Fläche, die isomorph zu einem punktierten Torus ist. Es sind die Fundamentalgruppenelemente  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\varepsilon$  aus Abschnitt 7.1 eingezeichnet. Die rechte Zeichnung zeigt einen punktierten Torus, der in einer  $\mathbb{S}^1$  eingespannt ist. Die beiden Erzeuger der Fundamentalgruppe des punktierten Torus sind eingezeichnet. In der mittleren Zeichnung sind die Erzeuger der Fundamentalgruppe des punktierten Torus in der Seifert-Fläche eingezeichnet.



Die beiden Erzeuger der Fundamentalgruppe des punktierten Torus entsprechen den Elementen  $a$  und  $c$  in der Präsentation (7.2.2) dieses Abschnittes. Die Erzeuger  $a$ ,  $c$  und  $x$  in (7.2.2) besitzen in den Erzeugern von (7.1.1) folgende Darstellung, siehe [Hi Lo M-A1992]:

$$a = \alpha^{-1}\beta, \quad c = \delta = [\alpha, \beta^{-1}], \quad x = \beta^{-1}.$$

Die Erzeuger  $a$ ,  $c$  und  $x$  in (7.2.2) lassen sich wie folgt in der Bianchigruppe  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}[w])$  mit  $w^2 + w + 1 = 0$  präsentieren:

$$a = \begin{pmatrix} 1+w & -1 \\ -w & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ -1-w & 1-w \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix}.$$

Für  $k, l \in \mathbb{N}_0$  definieren wir den Quotienten

$$G_{k,l} := \langle a, c, x \mid xax^{-1} = aca, xcx^{-1} = ca, x^k a^l = 1 \rangle \quad (7.2.3)$$

von  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus F_8)$ .

Für alle  $l \in \mathbb{N}_0$  ist  $G_{1,l} = \{1\}$ , denn aus  $xa^l = 1$  folgen  $a = aca$ ,  $c = a^{-1}$ ,  $c = 1$ ,  $a = 1$  und  $x = 1$ .

Mit Hilfe von KBMAG haben wir für kleine  $k$  und  $l$  den Wert  $f(1)$  der Wachstumsfunktion von  $G_{k,l}$  zum Erzeugendensystem  $\{a, a^{-1}, c, c^{-1}, x, x^{-1}\}$  bestimmt und die Ergebnisse in der folgenden Tabelle aufgelistet. Die Werte der Wachstumsfunktionen, die nicht von KBMAG berechnet werden konnten, sind mit einem Fragezeichen gekennzeichnet.

15	14.93																	
14	13.93	1																
13	12.93	1	2															
12	11.93	1	2	?														
11	10.93	1	2	3	?													
10	9.929	1	10	3000	?	?												
9	8.929	1	2	3	?	?	?											
8	7.951	1	2	1536	?	?	?	?										
7	?	1	2	3	?	?	?	?	?									
6	?	1	2	648	?	?	?	?	?	?								
5	?	1	10	3	?	?	?	?	?	?	?							
4	?	1	2	192	1344	?	?	?	?	?	?	?						
3	?	1	2	3	108	5	720	2352	?	?	?	?	?					
2	Pol	1	2	24	4	5	48	7	8	72	10	11	96	13				
$\uparrow$ $l$	1	Pol	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
0	Pol	1	10	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
		$k \longrightarrow$																

Die Wachstumsfunktion der Fundamentalgruppe  $G_{0,0} = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus F_8)$  des Achterknotens selbst besitzt eine Polstelle an der Stelle 1 mit dem Residuum 2.

In diesem Kapitel zeigen wir, daß die Gruppen  $G_{2,l}$  und  $G_{3,l}$  für  $l \geq 1$  endlich sind, und bestimmen ihre Struktur.

Aus der Relation  $xcx^{-1} = ca$  folgt  $a = c^{-1}xcx^{-1}$ , deshalb können wir  $G_{3,k}$  schreiben als

$$\begin{aligned}
 G_{3,k} &= \langle c, x \mid x \cdot c^{-1}xcx^{-1} \cdot x^{-1} = c^{-1}xcx^{-1} \cdot c \cdot c^{-1}xcx^{-1}, x^3(c^{-1}xcx^{-1})^k \rangle \\
 &= \langle c, x \mid xc^{-1}xcx^{-1} = c^{-1}xc^2, x^3(c^{-1}xcx^{-1})^k = 1 \rangle.
 \end{aligned}$$



### 7.3 Spezialfall $G_{2,k}$

Wir betrachten die Gruppe  $G_{2,k}$  mit  $k \in \mathbb{N}$ .

$$G_{2,k} := \langle a, c, x \mid xax^{-1} = aca, xcx^{-1} = ca, x^2a^k = 1 \rangle. \quad (7.3.4)$$

**Lemma 7.3.1** *Es gelten:*

$$a) \quad ax^2 = x^2a, \quad (7.3.5)$$

$$b) \quad ca \cdot ca \cdot aca = 1, \quad (7.3.6)$$

$$c) \quad cca = 1, \quad (7.3.7)$$

$$d) \quad xc = c^{-1}x, \quad (7.3.8)$$

$$e) \quad c^5 = 1, \quad (7.3.9)$$

$$f) \quad x^2 = c^{2k}, \quad (7.3.10)$$

$$g) \quad c^{4k} = 1. \quad (7.3.11)$$

**Beweis:**

$$a) \quad a \cdot x^2 = a \cdot a^{-k} = a^{-k} \cdot a = x^2 \cdot a.$$

b) Wir benutzen  $xa = acax$  und  $xc = cax$ :

$$ax^2 = x^2a = xxa = x \cdot aca \cdot x = aca \cdot ca \cdot aca \cdot x^2.$$

$$c) \quad 1 = ca \cdot ca \cdot aca \stackrel{(7.3.4)}{=} xcx^{-1} \cdot xcx^{-1} \cdot xax^{-1} = xcca x^{-1}.$$

$$d) \quad xc = cax \stackrel{(7.3.7)}{=} c^{-1}x.$$

$$e) \quad a \stackrel{(7.3.7)}{=} c^{-2}, cacaaca = 1 \implies c^{-5} = 1.$$

$$f) \quad x^2 = a^{-k} \stackrel{(7.3.7)}{=} (c^{-2})^{-k} = c^{2k}.$$

$$g) \quad x \cdot c^{-2k} \stackrel{(7.3.8)}{=} c^{2k} \cdot x = x^2 \cdot x = x \cdot x^2 = x \cdot c^{2k}.$$

□

**Satz 7.3.2**

$$G_{2,k} = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } 5 \nmid k, \\ \mathbf{D}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } 5 \mid k. \end{cases}$$

**Beweis:**

Fall 1:  $5 \nmid k$ , d. h., 5 ist kein Teiler von  $k$ .

Weil 5 und  $4k$  teilerfremd sind, gibt es  $r, s \in \mathbb{Z}$  mit

$$5 \cdot r + 4k \cdot s = \text{ggT}(5, 4k) = 1.$$

Daraus folgen dann

$$\begin{aligned} c &= (c^5)^r \cdot (c^{4k})^s = 1^r \cdot 1^s = 1, \\ x^2 &= 1, \\ a &= 1. \end{aligned}$$

Aus  $x^2 = a = c = 1$  folgen die Ausgangsrelationen von  $G_{2,k}$ , damit hat  $G_{2,k}$  die Präsentation

$$\begin{aligned} G_{2,k} &= \langle x \mid x^2 = 1 \rangle \\ &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Fall 2:  $5 \mid k$ , d. h. 5 ist ein Teiler von  $k$ .

Es ist  $x^2 = c^{2k} = 1$ , da  $c^5 = 1$ . Definiere  $d := xc$ . Dann gelten  $xd = xxc = c$  und

$$d^2 = (xc)^2 = \underline{xcxc} \stackrel{(7.3.8)}{=} c^{-1}xxc = c^{-1}c = 1.$$

Somit erhalten wir

$$x^2 = 1, d^2 = 1 \text{ und } (xd)^5 = 1, \text{ sowie } c = x^{-1}d \text{ und } a = c^{-2}.$$

Wir zeigen noch die Rückrichtung, d. h., aus diesen fünf Gleichungen folgen die Gleichungen

$$xax^{-1} = aca, \quad xcx^{-1} = ca \text{ und } x^2a^k = 1$$

der Ausgangspräsentierung (7.3.4).

$$\begin{aligned} c &= x^{-1}d \stackrel{x^2=1}{=} xd, & c^5 &= (xd)^5 = 1, \\ a &= c^{-2} = c^3, \\ xcx &= xcxc \cdot c^{-1} = d^2 \cdot c^{-1} = c^{-1} = c^4, \\ xcx^{-1} &= xcx = c^4 = c \cdot c^3 = ca, \\ xc &= xcx \cdot x^{-1} = c^4x^{-1} = c^4x, \\ xax^{-1} &= xax = xc^3x = c^4c^4x^2 = c^{12} = c^7 = c^3cc^3 = aca, \\ x^2a^k &= (c^3)^k = c^{3k} \stackrel{5 \mid k}{=} 1. \end{aligned}$$

Damit sind die Präsentierungen äquivalent, und wir erhalten

$$\begin{aligned} G_{2,k} &= \langle x, d \mid x^2 = 1, d^2 = 1, (xd)^5 = 1 \rangle \\ &= \mathbf{D}_5. \end{aligned}$$

□

## 7.4 Spezialfall $G_{3,k}$

Wir betrachten die Gruppe  $G_{3,k}$  mit  $k \in \mathbb{N}$ :

$$G_{3,k} = \langle a, c, x \mid xax^{-1} = aca, xcx^{-1} = ca, x^3a^k = 1 \rangle. \quad (7.4.12)$$

In diesem Abschnitt zeigen wir folgenden Satz.

**Satz 7.4.1** *Sei  $k$  ungerade. Dann gilt*

$$G_{3,k} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Den folgenden Satz zeigen wir in Abschnitt 7.5.

**Satz 7.4.2** *Sei  $k$  gerade. Dann ist  $G_{3,k}$  eine abelsche Erweiterung der alternierenden Gruppe  $\mathcal{A}_4$ . Es gibt einen Normalteiler von  $G_{3,k}$ , der isomorph zu einem diskreten 3-Torus ist.*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(k/2)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(k/2)\mathbb{Z} \longrightarrow G_{3,k} \longrightarrow \mathcal{A}_4 \longrightarrow 0. \quad (7.4.13)$$

Ferner können wir folgende Präsentierung von  $G_{3,k}$  angeben.

$$\begin{aligned} ZA_{3,k} &:= \langle u, v, w, c, x \mid uv = vu, uw = wu, vw = wv, \\ &u^{k/2} = v^{k/2} = w^{k/2} = x^3, \\ &c^2 = v, (cx)^3 = x^3, x^6 = 1, \\ &cuc^{-1} = u^{-1}, cvc^{-1} = v, cwc^{-1} = w^{-1}, \\ &xux^{-1} = v^{-1}, xvx^{-1} = w, xwx^{-1} = u^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

Mit geradem  $k$  läßt sich  $G_{3,k}$  auch in Form von zwei Erweiterungen beschreiben.  $G_{3,k}$  enthält  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  als Normalteiler,  $\tilde{G}_{3,k}$  ist der zugehörige Quotient:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow G_{3,k} \longrightarrow \tilde{G}_{3,k} \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow (\mathbb{Z}/k/2\mathbb{Z})^3 \longrightarrow \tilde{G}_{3,k} \longrightarrow \mathcal{A}_4 \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (7.4.14)$$

In diesem Abschnitt leiten wir zuerst einige Aussagen her, die unabhängig von der Parität von  $k$  sind. Anschließend zeigen wir, daß  $G_{3,k} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  für ungerades  $k$ .

**Lemma 7.4.3** *Es gelten:*

$$a) \quad ax^3 = x^3a, \quad (7.4.15)$$

$$b) \quad ca \cdot ca \cdot aca \cdot ca \cdot aca \cdot aca \cdot ca \cdot aca = 1, \quad (7.4.16)$$

$$c) \quad c \cdot ca \cdot ca \cdot aca = 1, \quad (7.4.17)$$

$$d) \quad a^2ca^2 = c \text{ und } a^{2l}ca^{2l} = c \text{ für } l \in \mathbb{Z}, \quad (7.4.18)$$

$$a^2c = ca^{-2} \text{ und } a^{-2}c = ca^2.$$

$$e) \quad x^3c = cx^3, \quad (7.4.19)$$

$$f) \quad c^2a = ac^{-2} \text{ und } c^{-2}a = ac^2, \quad (7.4.20)$$

$$g) \quad xa^2 = c^{-2}x. \quad (7.4.21)$$

**Beweis:**

$$a) \quad ax^3 = aa^{-k} = a^{-k}a = x^3a.$$

b) Wir benutzen mit Blick auf (7.4.12)  $xa = acax$  und  $xc = cax$ :

$$\begin{aligned} ax^3 &= x^3a = x^2 \cdot aca \cdot x = x \cdot aca \cdot ca \cdot aca \cdot x^2 \\ &= aca \cdot ca \cdot aca \cdot ca \cdot aca \cdot aca \cdot ca \cdot aca \cdot x^3. \end{aligned}$$

c)  $ca = xcx^{-1}$  und  $aca = xax^{-1}$  angewendet auf b) ergeben

$$x \cdot ccacaaca \cdot x^{-1} = 1.$$

d) Wir benutzen  $ca \cdot ca \cdot aca = c^{-1}$ :

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{b)}{=} \underline{ca \cdot ca \cdot aca \cdot ca \cdot aca \cdot a \cdot ca \cdot ca \cdot aca} \\ &= c^{-1} \cdot ca \cdot aca \cdot a \cdot c^{-1} = a^2ca^2c^{-1}. \end{aligned}$$

$$e) \quad x^3c = x^2 \cdot ca \cdot x = x \cdot ca \cdot aca \cdot x^2$$

$$= \underline{ca \cdot aca \cdot a \cdot ca \cdot ca \cdot aca} \cdot x^3$$

$$\stackrel{d),c)}{=} c \cdot c \cdot c^{-1} \cdot x^3 = cx^3.$$

$$f) \quad cx^3 = x^3c = \underline{ca \cdot aca \cdot a \cdot ca \cdot ca \cdot aca} \cdot x^3$$

$$\stackrel{d)}{=} cca \cdot cca^{-2}a \cdot x^3 = c \cdot c^2a \cdot c^2a^{-1} \cdot x^3.$$

$$\Rightarrow c^2a \cdot c^2a^{-1} = 1 \Rightarrow c^2a = ac^{-2}.$$

$$g) \quad xa^2 = \underline{aca \cdot acax} \stackrel{d)}{=} ac \cdot ca^{-2} \cdot ax = \underline{ac^2a^{-1}}x$$

$$\stackrel{f)}{=} c^{-2}a \cdot a^{-1}x = c^{-2}x.$$

□

**Lemma 7.4.4** *Sei  $k$  ungerade. Dann gelten:*

$$a) \quad x^6 c x^6 = c \text{ und } x^6 = a c a c^{-1}, \quad (7.4.22)$$

$$b) \quad c^2 a = a c^2, \quad (7.4.23)$$

$$c) \quad c^4 = 1, \quad (7.4.24)$$

$$d) \quad x a^2 = c^2 x. \quad (7.4.25)$$

**Beweis:** Weil  $k$  ungerade ist, gibt es ein  $l \in \mathbb{Z}$  mit  $2l + 1 = -k$ .

$$\begin{aligned} a) \quad x^3 &= a^{-k} = a a^{2l} = a^{2l} a, \\ x^3 c x^3 &= a a^{2l} c a^{2l} a \\ &\stackrel{(7.4.18)}{=} a c a \stackrel{(7.4.18)}{=} a^{-1} a^{-2l} c a^{-2l} a^{-1} \\ &= x^{-3} c x^{-3}, \\ x^6 c &\stackrel{(7.4.19)}{=} x^3 c x^3 = a a^{2l} c a^{2l} a \stackrel{(7.4.18)}{=} a c a. \\ b) \quad c^2 a &\stackrel{a)}{=} x^6 c x^6 \cdot c a \stackrel{(7.4.22)}{=} a c a c^{-1} \cdot c \cdot a c a c^{-1} \cdot c a \\ &= a c a c a a \stackrel{(7.4.18)}{=} a c^2. \\ c) \quad a c^2 &\stackrel{b)}{=} c^2 a \stackrel{(7.4.20)}{=} a c^{-2}. \\ d) \quad x a^2 &\stackrel{(7.4.21)}{=} c^{-2} x \stackrel{c)}{=} c^2 x. \end{aligned}$$

□

**Beweis (Satz 7.4.1):** Da  $k$  ungerade ist, hat  $k$  modulo 4 entweder Rest 1 oder Rest 3.

Fall 1:  $k \equiv 1(4)$ . Sei  $l \in \mathbb{N}_0$  mit  $k = 4l + 1$ .

Wir folgern zuerst, daß  $a = x^{-3}$ ,  $c = x^3$  und  $x^3 = 1$ .

$$\begin{aligned} 1 = x^3 a^k &= x^3 a^{4l+1} \stackrel{(7.4.25)}{=} x^2 c^{4l} x a \stackrel{(7.4.24)}{=} x^3 a \Rightarrow a = x^{-3}. \\ x a x^{-1} &= a c a \Rightarrow x^{-3} = x^{-3} c x^{-3} \Rightarrow c = x^3. \\ x c x^{-1} &= c a \Rightarrow x^3 = x^3 x^{-3} \Rightarrow x^3 = 1. \end{aligned}$$

Damit ist  $x^3 = 1$ ,  $a = 1$  und  $c = 1$ . Wegen

$$x^3 = a = c = 1 \Rightarrow (x a x^{-1} = a c a \wedge x c x^{-1} = c a \wedge x^3 a^k = 1)$$

gilt auch die Rückrichtung, und es folgt

$$\begin{aligned} G_{3,k} &= \langle x \mid x^3 = 1 \rangle \\ &= \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Fall 2:  $k \equiv 3(4)$ . Sei  $l \in \mathbb{N}_0$  mit  $k = 4l + 3$ .

Wir zeigen zuerst, daß  $a = x^3$ .

$$\begin{aligned} 1 &= x^3 a^k = x^3 a^{4l+3} \stackrel{(7.4.25)}{=} x^3 c^{4l+2} x a^3 \stackrel{(7.4.24)}{=} x^2 c^2 x a \\ &= x \cdot c a \cdot c a \cdot x^2 a = c a \cdot a c a \cdot c a \cdot a c a \cdot x^3 a \\ &\stackrel{(7.4.17)}{=} c a a c^{-1} \cdot x^3 a \stackrel{(7.4.18)}{=} a^{-2} c \cdot c^{-1} x^3 a = a^{-2} x^3 a. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $a = x^3$ . Ähnlich wie im vorigen Fall folgt nun  $x^3 = a = c = 1$ :

$$\begin{aligned} x a x^{-1} &= a c a \Rightarrow x^3 = x^3 c x^3 \Rightarrow c = x^{-3}, \\ x c x^{-1} &= c a \Rightarrow x^{-3} = x^{-3} x^3 \Rightarrow x^3 = 1. \end{aligned}$$

Damit gilt auch in diesem Fall

$$\begin{aligned} G_{3,k} &= \langle x \mid x^3 = 1 \rangle \\ &= \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

## 7.5 Struktur von $G_{3,k}$ für gerades $k$

Wir beginnen mit einigen Relationen in  $G_{3,k}$  für gerades  $k$ .

**Lemma 7.5.1** *Sei  $k$  gerade. Dann gelten:*

$$a) \quad x^3 c x^3 = c \text{ und } x^6 = 1, \quad (7.5.26)$$

$$b) \quad a^{2k} = 1, \quad a^k = c^k = (ca)^k = x^3, \quad (7.5.27)$$

$$c) \quad a^2 c^2 = c^2 a^2, \quad (7.5.28)$$

$$d) \quad a^2 (ca)^2 = (ca)^2 a^2, \quad (7.5.29)$$

$$e) \quad c^2 (ca)^2 = (ca)^2 c^2, \quad (7.5.30)$$

$$f) \quad (ac)^2 = (ca)^{-2}. \quad (7.5.31)$$

**Beweis:**

a) Weil  $-k$  gerade ist, gelten

$$x^3 c x^3 = a^{-k} c a^{-k} \stackrel{(7.4.18)}{=} c \text{ und}$$

$$x^6 c = x^3 x^3 c \stackrel{(7.4.19)}{=} x^3 c x^3 = c.$$

b)  $a^{2k} = a^k a^k = x^{-3} x^{-3} = x^{-6} \stackrel{a)}{=} 1.$

$$a^{-k} x = x^3 x = x x^3 = x a^k \stackrel{(7.4.21)}{=} c^{-k} x. \Rightarrow c^k = a^k = x^3.$$

$$(ca)^k = (x c x^{-1})^k = x c^k x^{-1} = x x^3 x^{-1} = x^3. \quad \square$$

c)  $a^2 c^2 = a a c^2 \stackrel{(7.4.20)}{=} a c^{-2} a \stackrel{(7.4.20)}{=} c^2 a^2.$

d)  $a^2 (ca)^2 = a^2 c a c a \stackrel{(7.4.18)}{=} c a^{-2} a c a = c a a^{-2} c a \stackrel{(7.4.18)}{=} c a c a a^2.$

e)  $c^2 (ca)^2 = c c^2 a c a \stackrel{(7.4.20)}{=} c a c^{-2} c a = c a c c^{-2} a \stackrel{(7.4.20)}{=} c a c a c^2.$

f)  $c a c a \cdot a c a c = c a c a^2 c a c \stackrel{(7.4.18)}{=} c a c c a^{-2} a c \stackrel{(7.4.20)}{=} c c^{-2} a a^{-2} a c = 1.$

**Lemma 7.5.2**  $a, c$  und  $x$  operieren wie folgt per Konjugation auf  $a^2, c^2$  und  $(ca)^2$ :

$$\begin{aligned} a \cdot a^2 \cdot a^{-1} &= a^2, & c \cdot a^2 \cdot c^{-1} &= a^{-2}, & x \cdot a^2 \cdot x^{-1} &= c^{-2}, \\ a \cdot c^2 \cdot a^{-1} &= c^{-2}, & c \cdot c^2 \cdot c^{-1} &= c^2, & x \cdot c^2 \cdot x^{-1} &= (ca)^2, \\ a \cdot (ca)^2 \cdot a^{-1} &= (ca)^{-2}, & c \cdot (ca)^2 \cdot c^{-1} &= (ca)^{-2}, & x \cdot (ca)^2 \cdot x^{-1} &= a^{-2}. \end{aligned}$$

**Beweis:**  $ac^2 a^{-1} = c^{-2}$  bzw.  $ca^2 c^{-1} = a^{-2}$  sind äquivalent zu (7.4.20) bzw. (7.4.18).

$$a \cdot (ca)^2 = a c a c a = (ac)^2 \cdot a \stackrel{(7.5.31)}{=} (ca)^{-2} \cdot a,$$

$$c \cdot (ca)^2 = c^2 a c a \stackrel{(7.4.20)}{=} a c^{-2} c a = a c c^{-2} a \stackrel{(7.4.20)}{=} a c a c^2 \stackrel{(7.5.31)}{=} (ca)^{-2} \cdot c.$$

Nun berechnen wir die drei Konjugationen mit  $x$ :

$$\begin{aligned} x \cdot a^2 &= a c a \cdot x a = a c a \cdot a c a \cdot x = a c a^2 c a \cdot x \stackrel{(7.4.18)}{=} a c c a^{-2} a \cdot x \\ &= a c^2 a^{-1} \cdot x \stackrel{(7.4.20)}{=} c^{-2} a a^{-1} \cdot x = c^{-2} \cdot x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \cdot c^2 &= ca \cdot xc = ca \cdot ca \cdot x = (ca)^2 \cdot x, \\
x \cdot (ca)^2 &= xcaca = ca \cdot aca \cdot ca \cdot aca \cdot x = ca^2(ca)^2(ac)^2c^{-1} \cdot x \\
&\stackrel{(7.5.31)}{=} ca^2c^{-1} \cdot x \stackrel{(7.4.18)}{=} a^{-2}cc^{-1} \cdot x = a^{-2} \cdot x.
\end{aligned}$$

□

**Lemma 7.5.3**  $G_{3,k}$  ist isomorph zur Gruppe  $ZA_{3,k}$ .

**Beweis:** Die Präsentation von  $ZA_{3,k}$  geben wir in Satz 7.4.2 an. Wir ergänzen die Präsentation von  $G_{3,k}$  um die Erzeuger  $u$ ,  $v$  und  $w$  sowie die Relationen  $u = a^2$ ,  $v = c^2$  und  $w = (ca)^2$ . Ferner hinterlegen wir in der Präsentation von  $ZA_{3,k}$  den Erzeuger  $a$  und die Relation  $a = c^{-1}xcx^{-1}$ . Die Gruppenstrukturen von  $G_{3,k}$  und  $ZA_{3,k}$  ändern sich dadurch nicht.

$$\begin{aligned}
G_{3,k} &= \langle a, c, x, u, v, w \mid xax^{-1} = aca, xcx^{-1} = ca, x^3a^k = 1 \\
&\quad u = a^2, v = c^2, w = (ca)^2 \rangle, \\
ZA_{3,k} &= \langle u, v, w, a, c, x \mid uv = vu, uw = wu, vw = wv, \\
&\quad u^{k/2} = v^{k/2} = w^{k/2} = x^3, \\
&\quad c^2 = v, (cx)^3 = x^3, x^6 = 1, a = c^{-1}xcx^{-1}, \\
&\quad cuc^{-1} = u^{-1}, cvc^{-1} = v, cwc^{-1} = w^{-1}, \\
&\quad xux^{-1} = v^{-1}, xv x^{-1} = w, xwx^{-1} = u^{-1} \rangle.
\end{aligned}$$

Es reicht zu zeigen, daß aus den Relationen der Präsentation von  $G_{3,k}$  die Relationen der Präsentation von  $ZA_{3,k}$  folgen und umgekehrt.

a)  $G_{3,k} \Rightarrow ZA_{3,k}$ :

Zuerst zeigen wir, daß sich die Relationen von  $ZA_{3,k}$  aus den Relationen von  $G_{3,k}$  herleiten lassen. Gegeben seien also die Relationen von  $G_{3,k}$ .

Nach Lemma 7.5.1 kommutieren  $a^2 = u$ ,  $c^2 = v$  und  $(ca)^2 = w$ , so daß  $uv = vu$ ,  $uw = wu$  und  $vw = wv$  gelten.

Ebenfalls nach Lemma 7.5.1 erhalten wir  $u^{k/2} = v^{k/2} = w^{k/2} = x^3$  aus  $a^k = c^k = (ca)^k = x^3$ .

$c^2 = v$  ist bereits eine definierende Relation von  $G_{3,k}$ .

$$\begin{aligned}
(cx)^3 &= cxcxcx = c \cdot ca \cdot xxcx = c \cdot ca \cdot x \cdot cax^2 \\
&= c \cdot ca \cdot ca \cdot aca \cdot x^3 \stackrel{(7.4.17)}{=} x^3.
\end{aligned}$$

Nach (7.5.26) gilt  $x^6 = 1$ , die Relation  $a = c^{-1}xcx^{-1}$  folgt aus  $xcx^{-1} = ca$ . Die sechs Konjugationen  $cuc^{-1} = u^{-1}, \dots, xwx^{-1} = u^{-1}$  ergeben sich direkt aus Lemma 7.5.2.

b)  $ZA_{3,k} \Rightarrow G_{3,k}$ :

$xcx^{-1} = ca$  erhalten wir direkt aus  $a = c^{-1}xcx^{-1}$ .

Aus  $(cx)^3 = x^3$  folgt durch Inversenbildung zunächst  $x^{-1}c^{-1}x^{-1}c^{-1}x^{-1}c^{-1} = x^{-3}$  und daraus die Hilfsgleichung  $x^{-2} = c^{-1}x^{-1}c^{-1}x^{-1}c^{-1}$ .

$$\begin{aligned}
xax^{-1} &= xc^{-1}xcx^{-1}x^{-1} = xc^{-1}xc \cdot c^{-1}x^{-1}c^{-1}x^{-1}c^{-1} = xc^{-1}c^{-1}x^{-1}c^{-1} \\
&= xv^{-1}x^{-1}c^{-1} = w^{-1}c^{-1} = (cw)^{-1} = (w^{-1}c)^{-1} = c^{-1}w, \\
aca &= c^{-1}xcx^{-1} \cdot c \cdot c^{-1}xcx^{-1} = c^{-1}xc^2x^{-1} = c^{-1}xvx^{-1} = c^{-1}w, \quad \Rightarrow xax^{-1} = aca. \\
w &= c \cdot c^{-1}w = c \cdot aca = (ca)^2.
\end{aligned}$$

Aus  $x^3 = (cx)^3$  gewinnen wir  $ca \cdot ca \cdot aca = c^{-1}$ :

$$x^3 = cxcxcx = c \cdot ca \cdot x^2cx = c \cdot ca \cdot ca \cdot aca \cdot x^3.$$

Damit zeigen wir nun  $a^2 = u$ .

$$\begin{aligned} u^{-1} &= xwx^{-1} = xcacax^{-1} = ca \cdot \underline{aca} \cdot ca \cdot aca \\ &= ca \cdot ac^{-1} = ca^2c^{-1}, \quad \Rightarrow a^2 = c^{-1}u^{-1}c = u. \end{aligned}$$

Weil  $k$  gerade ist, gilt  $x^3a^k = x^3u^{k/2} = x^3x^3 = 1$ . Damit sind alle Relationen von  $G_{3,k}$  aus den Relationen von  $ZA_{3,k}$  gezeigt. □

**Lemma 7.5.4**  $U_{3,k}$  sei die von  $u$ ,  $v$  und  $w$  erzeugte Untergruppe von  $ZA_{3,k}$ . Dann ist  $U_{3,k}$  normal in  $ZA_{3,k}$ , und es gilt

$$ZA_{3,k}/U_{3,k} \cong \mathcal{A}_4 = \langle c, x \mid c^2 = x^3 = (cx)^3 = 1 \rangle. \quad (7.5.32)$$

$\mathcal{A}_4$  ist die alternierende Gruppe mit 12 Elementen, siehe [CoxMo1957].

**Beweis:** In der Präsentation von  $ZA_{3,k}$  sind die Relationen

$$\begin{aligned} cuc^{-1} &= u^{-1}, & cvc^{-1} &= v, & cwc^{-1} &= w^{-1}, \\ xux^{-1} &= v^{-1}, & xvx^{-1} &= w, & xwx^{-1} &= u^{-1}, \end{aligned}$$

enthalten. Aus diesen sechs Konjugationen folgt, daß  $U_{3,k}$  ein Normalteiler von  $ZA_{3,k}$  ist. Wir erhalten eine Präsentation von  $ZA_{3,k}/U_{3,k}$ , indem wir zur Präsentation von  $ZA_{3,k}$  die Relationen  $u = 1$ ,  $v = 1$  und  $w = 1$  hinzufügen. Die so entstandene Präsentation von  $ZA_{3,k}/U_{3,k}$  ist äquivalent zu

$$\langle u, v, w, c, x \mid u = v = w = 1, c^2 = x^3 = (cx)^3 = 1 \rangle. \quad \square$$

**Satz 7.5.5** Es sei  $\Gamma_{3,k}$  die von  $a^2$ ,  $c^2$  und  $(ca)^2$  erzeugte Untergruppe von  $G_{3,k}$ . Die Untergruppe  $\Gamma_{3,k}$  ist ein Normalteiler, und der Quotient ist isomorph zu  $\mathcal{A}_4$ .

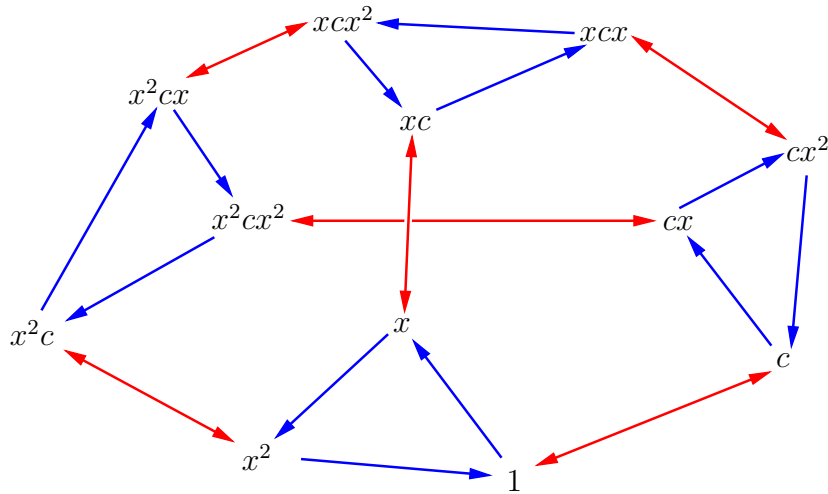
$$G_{3,k}/\Gamma_{3,k} = \langle x, c \mid c^2 = x^3 = (cx)^3 \rangle \cong \mathcal{A}_4. \quad (7.5.33)$$

**Beweis:** Wegen der Isomorphie  $G_{3,k} \cong ZA_{3,k}$  in Lemma 7.5.3 folgt die Behauptung aus Lemma 7.5.4. □

**Satz 7.5.6**  $\Gamma_{3,k}$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(k/2)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(k/2)\mathbb{Z}$ .

**Beweis:** Wir zeigen die Behauptung unter Anwendung der Methode von Reidemeister-Schreier, siehe [Reidemeister1927], [Schreier1927], [Stillwell1993] und [CoGriKuZi1998]. Dazu bestimmen wir zuerst ein Schreier-Erzeugendensystem von  $G_{3,k}/\Gamma_{3,k}$ . Anschließend geben wir eine endliche Präsentation von  $\Gamma_{3,k}$  in den Schreier-Erzeugenden an.

Das folgende Bild zeigt den Cayleygraphen von  $\mathcal{A}_4 = \langle c, x \mid c^2 = x^3 = (cx)^3 = 1 \rangle$  zum Erzeugendensystem  $\{c, x\}$ .



Die Eckpunkte des Graphen sind die Elemente von  $\mathcal{A}_4$ . Die einfach-gerichteten blauen Kanten stehen für eine Multiplikation mit  $x$  von rechts, die doppelt-gerichteten roten Kanten stehen für eine Multiplikation mit  $c$  von rechts. Der Graph hat die Form eines abgestumpften Tetraeders.

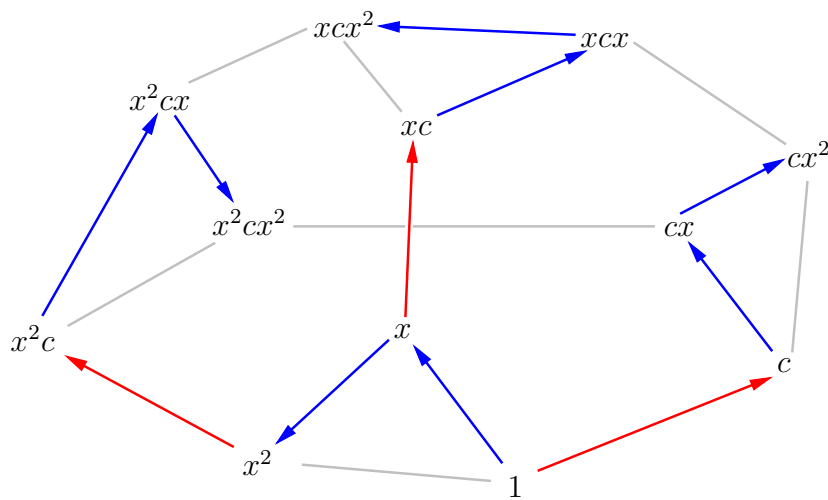
$G_{3,k}/\Gamma_{3,k}$  wird repräsentiert durch

$$\mathcal{K} := \{1, x, x^2, c, cx, cx^2, xc, xcx, xcx^2, x^2c, x^2cx, x^2cx^2\},$$

d. h., es gilt

$$G_{3,k}/\Gamma_{3,k} = \bigcup_{u \in \mathcal{K}} u\Gamma_{3,k}.$$

Die Repräsentanten in  $\mathcal{K}$  besitzen die *Schreier-Eigenschaft*, d. h., jeder Wortanfang eines Wortes von  $\mathcal{K}$  ist selbst ein Element von  $\mathcal{K}$ . Dadurch definieren wir eine Baum-Struktur auf dem Cayleygraphen von  $G_{3,k}/\Gamma_{3,k}$ :



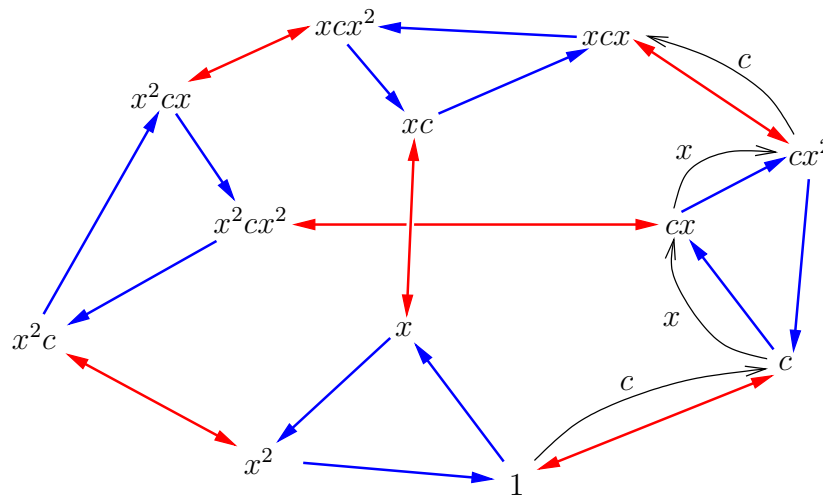
Zu jedem  $g \in G_{3,k}$  gibt es einen eindeutig bestimmten Nebenklassenvertreter  $u \in \mathcal{K}$  mit  $g \in u\Gamma_{3,k}$ , den wir mit  $\bar{g} := u$  bezeichnen. Damit verfügen wir über eine Abbildung  $\bar{\cdot}: G_{3,k} \rightarrow \mathcal{K}$ , so daß  $g \in \bar{g}\Gamma_{3,k}$  für alle  $g \in G_{3,k}$ .

Für ein gegebenes Element  $g \in G$  können wir  $\bar{g} \in \mathcal{K}$  wie folgt bestimmen: Wir schreiben  $g$  als Wort in den Erzeugern  $c$  und  $x$ . Dieses Wort definiert einen Weg im Cayleygraphen



von  $G_{3,k}/\Gamma_{3,k}$ . Der Knoten am Ende des Weges ist  $\bar{g}$ . Wegen  $a = c^{-1}xcx^{-1}$  können wir jedes Element in  $G_{3,k}$  als Wort in  $c$  und  $x$  auffassen.

Die folgende Zeichnung illustriert  $\overline{cx^2c} = \overline{xcx}$ .



Es seien  $w_1, \dots, w_{12}$  die zwölf Elemente von  $\mathcal{K}$ . Ferner seien  $e_1 := c$  und  $e_2 := x$  die Erzeuger von  $G_{3,k}$ . Die Schreier-Erzeugenden der Untergruppe  $\Gamma_{3,k}$  von  $G_{3,k}$  sind

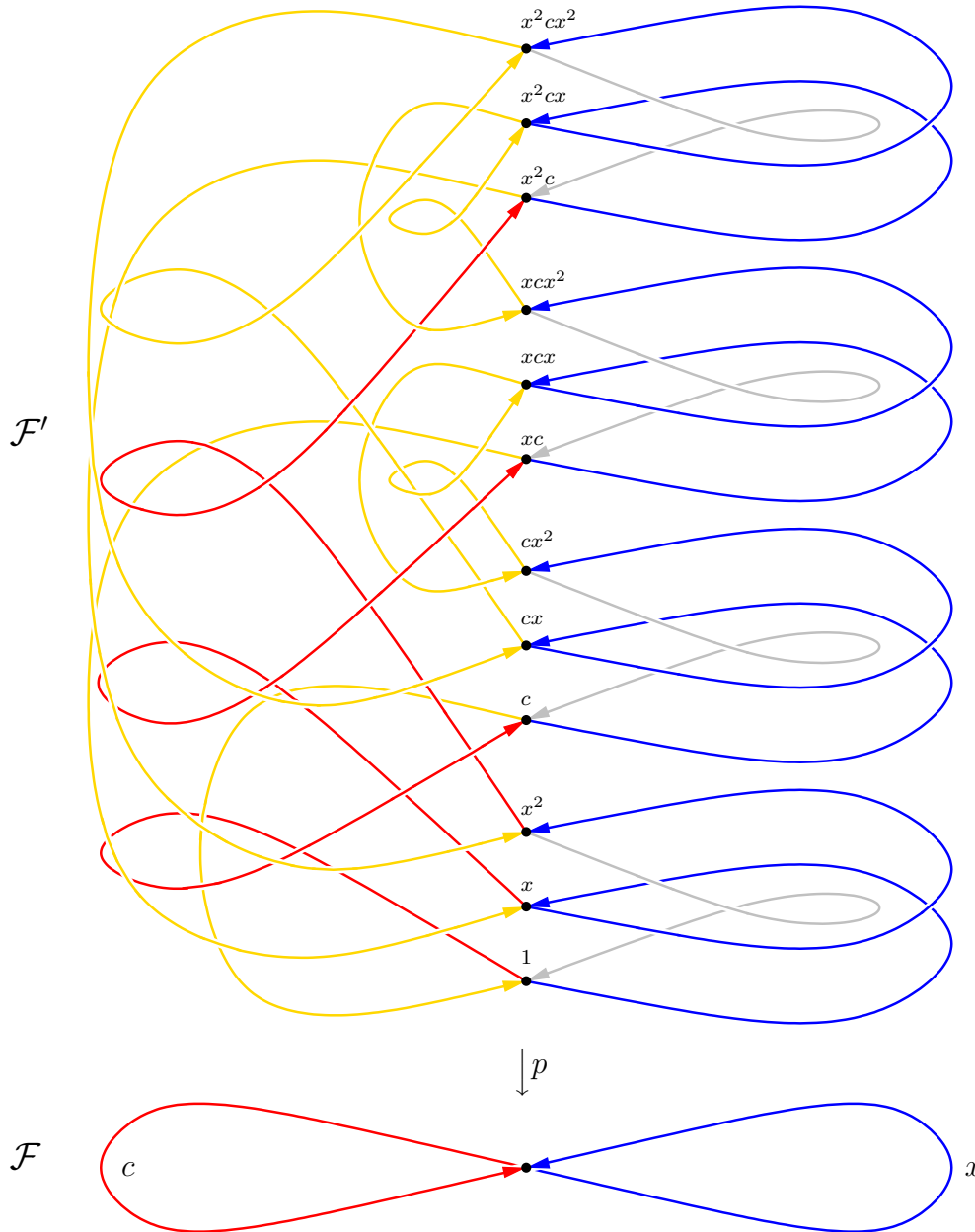
$$w_i e_j \overline{w_i e_j}^{-1}$$

für  $i = 1, \dots, 12$  und  $j = 1, 2$ .

Die Schreier-Erzeugenden besitzen folgenden topologischen Hintergrund. Die Gruppe  $G_{3,k}$  mit der Präsentation

$$G_{3,k} = \langle c, x \mid xc^{-1}xcx^{-1} = c^{-1}xc^2, x^3(c^{-1}xcx^{-1})^k = 1 \rangle$$

ist die Fundamentalgruppe eines 2-dimensionalen CW-Komplexes  $\mathcal{F}$  bestehend aus einem Punkt, zwei 1-Zellen (Erzeuger  $c$  und  $x$ ) und zwei angeklebten 2-Zellen (diese liefern die beiden Relationen von  $G_{3,k}$ ). Die Untergruppe  $\Gamma_{3,k}$  ist die Fundamentalgruppe einer 12-blättrigen Überlagerung  $\mathcal{F}'$  von  $\mathcal{F}$ .



Die Zeichnung zeigt das 1-Skelett der Überlagerung  $p: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ . Die blauen und roten Kanten in  $\mathcal{F}'$  bilden einen Baum, der das 1-Skelett von  $\mathcal{F}'$  aufgrund der Schreier-Eigenschaft von  $\mathcal{K}$  aufspannt. Wir erhalten das Schreier-Erzeugende  $w_i e_j \bar{w}_i e_j^{-1}$ , indem wir in  $\mathcal{F}'$  mit  $w_i$  von  $1$  nach  $w_i$  gehen, dort dem nach  $w_i$  hochgehobenen Erzeuger  $e_j$  folgen und anschließend mit  $\bar{w}_i e_j^{-1}$  zur  $1$  zurückkehren.

Nun berechnen wir Erzeugende von  $\Gamma_{3,k}$ , indem wir die Ausdrücke

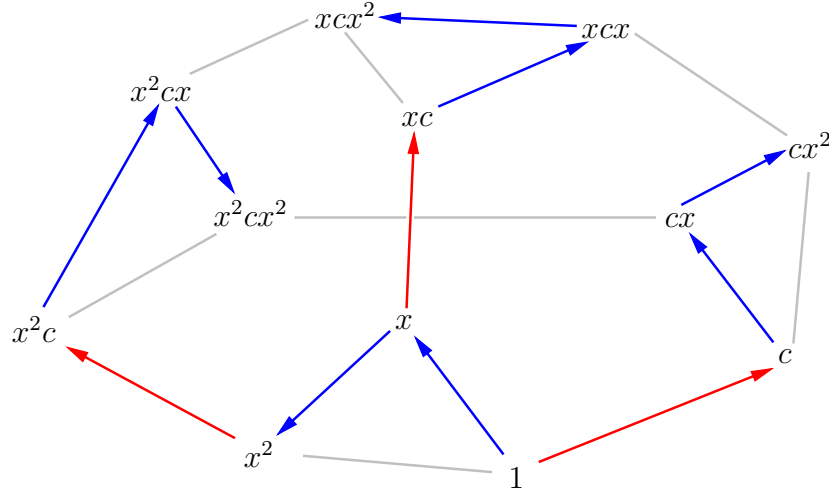
$$w_i e_j \overline{w_i e_j}^{-1}$$

für  $i = 1, \dots, 12$  und  $j = 1, 2$  in  $G_{3,k}$  auswerten. Wir beginnen mit  $e_1 = c$  und betrachten anschließend  $e_2 = x$ .

Mit den folgenden beiden Gleichungen können  $c^{-1}$  und  $a^{-1}$  nach links über  $x$  geschoben werden.

$$xc^{-1} = a^{-1}c^{-1}x, \quad xa^{-1} = a^{-1}c^{-1}a^{-1}x. \quad (7.5.34)$$

Die Gleichungen folgen aus  $x = xcc^{-1} = caxc^{-1}$  bzw.  $x = xaa^{-1} = acaxa^{-1}$ .



$$\begin{aligned}
c \cdot c \cdot \overline{cc}^{-1} &= c^2 \cdot 1^{-1} = c^2, \\
cx \cdot c \cdot \overline{cxc}^{-1} &= cxc(x^2cx^2)^{-1} = cxcx^{-2}c^{-1}x^{-2} \\
&= ccax^{-1}c^{-1}x^{-2} = cca(x^2cx)^{-1} = cca(ca \cdot acax^3)^{-1} \\
&= ccax^{-3}a^{-1}c^{-1}a^{-1}a^{-1}c^{-1} = a^k c^2 a^2 c^{-2} = a^k a^2, \\
cx^2 \cdot c \cdot \overline{cx^2c}^{-1} &= cx^2c(xcx)^{-1} = cx^2cx^{-1}c^{-1}x^{-1} \\
&= c \cdot ca \cdot aca \cdot \underline{xc^{-1}x^{-1}} = c^2 a^2 ca \cdot a^{-1}c^{-1} = c^2 a^2, \\
xc \cdot c \cdot \overline{xc^2}^{-1} &= xc^2x^{-1} = (ca)^2, \\
xcx \cdot c \cdot \overline{xcxc}^{-1} &= xcxc(cx^2)^{-1} = \underline{xcxcx^{-2}c^{-1}} = ca \cdot ca \cdot aca \cdot c^{-1} \\
&= (ca)^2 (ac)^2 c^{-2} \stackrel{(7.5.31)}{=} c^{-2}, \\
xcx^2 \cdot c \cdot \overline{xcx^2c}^{-1} &= xcx^2c(x^2cx)^{-1} = \underline{xcx^2cx^{-1}c^{-1}x^{-2}} \\
&= ca \cdot x^3cx^{-1}c^{-1}x^{-2} = ca \cdot cx^3x^{-1}c^{-1}x^{-2} \\
&= cac \cdot \underline{x^2c^{-1}x^{-2}} = cac \cdot \underline{a^{-1}c^{-1}a^{-1}} \cdot a^{-1}c^{-1} \\
&= cacaa^{-2} \underline{c^{-1}a^{-2}c^{-1}} \stackrel{(7.4.18)}{=} cacaa^{-2} a^2 c^{-2} \\
&= (ca)^2 c^{-2}, \\
x^2c \cdot c \cdot \overline{x^2c^2}^{-1} &= x^2c^2(x^2)^{-1} = x^2c^2x^{-2} = x(ca)^2x^{-1} \\
&= a^{-2}, \\
x^2cx \cdot c \cdot \overline{x^2cxc}^{-1} &= x^2cxc(xcx^2)^{-1} = \underline{x^2cxcx^{-2}c^{-1}x^{-1}} \\
&= ca \cdot aca \cdot \underline{x^3cx^{-2}c^{-1}x^{-1}} = ca \cdot aca \cdot cx^3x^{-2}c^{-1}x^{-1} \\
&= ca^2 \underline{cacxc^{-1}x^{-1}} = ca^2 \underline{cac} \cdot a^{-1}c^{-1} \\
&= c^2 a^{-1} c^2 c^{-1} \cdot a^{-1}c^{-1} = c^2 c^{-2} (ca)^{-2} = (ca)^{-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2cx^2 \cdot c \cdot \overline{x^2cx^2c}^{-1} &= x^2cx^2c(cx)^{-1} = \underline{x^2cx^2}cx^{-1}c^{-1} \\
&= ca \cdot \underline{aca} \cdot x^3xcx^{-1}c^{-1} = \underline{ca^2ca} \cdot x^3cac^{-1} \\
&= a^{-2}c^2a \cdot cac^{-1}x^3 = a^{-2}c^2acacc^{-2}x^3 \\
&= a^{-2}(ca)^{-2}a^{-k}, \\
x^2 \cdot x \cdot \overline{x^3}^{-1} &= a^{-k}(1)^{-1} = a^{-k}, \\
cx^2 \cdot x \cdot \overline{cx^2x}^{-1} &= ca^{-k}(c)^{-1} = cx^3c^{-1} = x^3 = a^{-k}, \\
xcx^2 \cdot x \cdot \overline{xcx^2x}^{-1} &= xcx^3(xc)^{-1} = x^4cc^{-1}x^{-1} = a^{-k}, \\
x^2cx^2 \cdot x \cdot \overline{x^2cx^3}^{-1} &= x^2cx^3(x^2c)^{-1} = x^2x^3cc^{-1}x^{-2} = a^{-k}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten Relationen zur Präsentierung der Untergruppe  $\Gamma_{3,k}$  in den Schreier-Erzeugenden, indem wir jede Relation der Präsentierung von  $G_{3,k}$  zu jedem  $w_i$  in  $\mathcal{F}'$  hochheben.  $G_{3,k}$  wird präsentiert durch

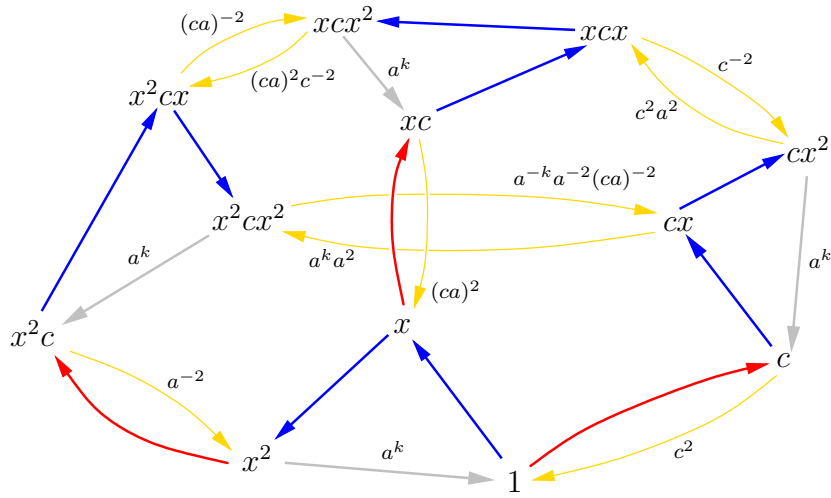
$$G_{3,k} = \langle c, x \mid r_1 = 1, r_2 = 1 \rangle$$

mit  $r_1 = xc^{-1}xcx^{-1}c^{-2}x^{-1}c$  und  $r_2 = x^3(c^{-1}xcx^{-1})^k$ . Die Relationen von  $\mathcal{F}'$  erhalten wir somit, indem wir

$$w_i \cdot r_j \cdot w_i^{-1}$$

für  $i = 1, \dots, 12$  und  $j \in \{1, 2\}$  in Schreier-Erzeugenden schreiben.

Um das Umschreiben in Schreier-Erzeugende zu erleichtern, tragen wir die Schreier-Erzeugenden in die Zeichnung der Überlagerung  $p: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$  ein. Als Alternative zur Zeichnung der Überlagerung auf Seite 150 stellen wir  $\mathcal{F}'$  in Form eines abgestumpften Tetraeders dar:



Weiter leiten wir einige hilfreiche Relationen in  $\Gamma_{3,k}$  her.

Die Relation  $x^6$  von  $G_{3,k}$  liefert – in Schreier-Erzeugenden geschrieben – die Relation  $a^{2k} = 1$  in  $\Gamma_{3,k}$ . Aus  $x^6 = 1$  in  $G_{3,k}$  folgt  $(a^k)^2 = (x^3)^2 = x^6 = 1$  in  $\Gamma_{3,k}$ . Aus  $c^2x^3 = x^3c^2$  in  $G_{3,k}$  folgt  $c^2a^k = c^2x^3 = x^3c^2 = a^kc^2$  in  $\Gamma_{3,k}$ . Wir erhalten also folgende Hilfsrelationen in  $\Gamma_{3,k}$ :

$$(a^k)^2 = 1, \quad (7.5.35)$$

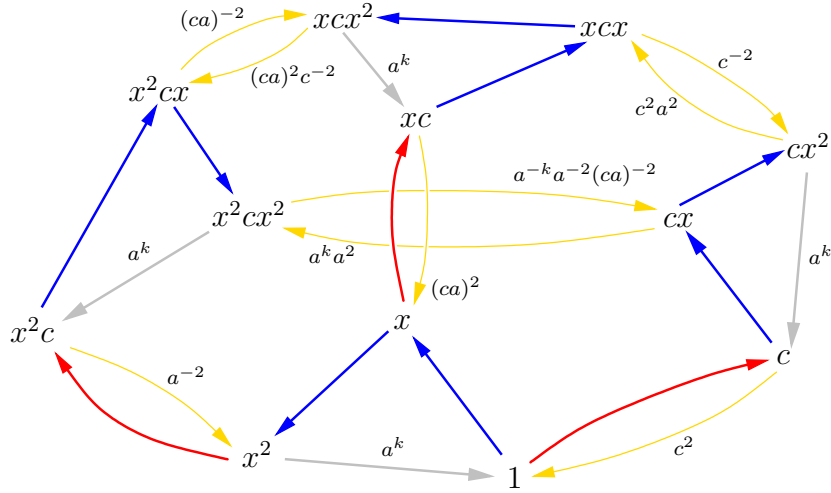
$$c^2a^k = a^kc^2. \quad (7.5.36)$$

Zuerst schreiben wir  $w_i \cdot r_1 \cdot w_i^{-1}$  in Schreier-Erzeugenden:

$$\begin{aligned}
r_1 &= x \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c \\
&= 1 \cdot (ca)^{-2} \cdot 1 \cdot c^{-2} \cdot 1 \cdot (ca)^2 a^{k+2} \cdot a^{-k-2} \cdot 1 \cdot c^2 \\
&= (ca)^{-2} c^{-2} (ca)^2 c^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \cdot r_1 x^{-1} &= x \cdot x \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c \cdot x^{-1} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot a^2 \cdot 1 \cdot (ca)^{-2} \cdot 1 \cdot a^{-2} c^{-2} \cdot c^2 \cdot 1 \cdot (ca)^2 \cdot 1 \\
&= a^2 (ca)^{-2} a^{-2} (ca)^2, \\
x^2 \cdot r_1 x^{-2} &= x^2 \cdot x \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c \cdot x^{-2} \\
&= 1 \cdot a^k \cdot c^{-2} \cdot 1 \cdot a^{k+2} \cdot 1 \cdot c^2 (ca)^2 \cdot (ca)^2 \cdot 1 \cdot a^{-2} \cdot 1 \\
&= a^k c^{-2} a^{k+2} c^2 a^{-2} \stackrel{(7.5.36)}{=} c^{-2} a^2 c^2 a^{-2}, \\
c \cdot r_1 c^{-1} &= c \cdot x \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c \cdot c^{-1} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot (ca)^2 a^{k+2} \cdot a^k \cdot a^{-2} \cdot 1 \cdot (ca)^{-2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= 1, \\
cx \cdot r_1 (cx)^{-1} &= cx \cdot x \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c \cdot (cx)^{-1} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot c^2 \cdot 1 \cdot (ca)^2 c^{-2} \cdot 1 \cdot a^k \cdot a^2 \cdot 1 \cdot a^{-k-2} (ca)^{-2} \cdot 1 \\
&= c^2 (ca)^2 c^{-2} (ca)^2, \\
cx^2 \cdot r_1 (cx^2)^{-1} &= cx^2 \cdot x \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c \cdot (cx^2)^{-1} \\
&= 1 \cdot a^k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a^k \cdot (ca)^2 \cdot c^2 (ca)^{-2} \cdot 1 \cdot c^{-2} \cdot 1 \\
&= (ca)^2 c^2 (ca)^{-2} c^{-2}, \\
xc \cdot r_1 (xc)^{-1} &= xc \cdot x \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c \cdot (xc)^{-1} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot a^{-2} c^{-2} \cdot a^k \cdot c^2 \cdot a^k \cdot a^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= a^{-2} \cdot c^{-2} a^k c^2 a^k \cdot a^2 \stackrel{(7.5.36), (7.5.35)}{=} 1, \\
xcx \cdot r_1 (xcx)^{-1} &= xcx \cdot x \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c \cdot (xcx)^{-1} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot (ca)^2 \cdot 1 \cdot a^{-k-2} (ca)^{-2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot c^{-2} \cdot a^k \cdot c^2 a^2 \cdot 1 \\
&= (ca)^2 a^{-2} (ca)^{-2} a^2, \\
xcx^2 \cdot r_1 (xcx^2)^{-1} &= xcx^2 \cdot x \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c \cdot (xcx^2)^{-1} \\
&= 1 \cdot a^k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a^k \cdot a^{-k-2} \cdot (ca)^2 a^{k+2} \cdot 1 \cdot (ca)^{-2} \cdot 1 \\
&= a^{-k-2} (ca)^2 a^{k+2} (ca)^{-2} \stackrel{xr_1 x^{-1}=1}{=} 1, \\
x^2 c \cdot r_1 (x^2 c)^{-1} &= x^2 c \cdot x \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c \cdot (x^2 c)^{-1} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot c^2 (ca)^{-2} \cdot a^k \cdot (ca)^2 \cdot 1 \cdot c^{-2} \cdot 1 \cdot a^k \cdot 1 \cdot 1 \\
&= c^2 (ca)^{-2} a^k (ca)^2 c^{-2} a^k \stackrel{xr_1 x^{-1}=1, (7.5.36)}{=} 1, \\
x^2 cx \cdot r_1 (x^2 cx)^{-1} &= x^2 cx \cdot x \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c \cdot (x^2 cx)^{-1} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot a^{-k-2} \cdot 1 \cdot c^2 a^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (ca)^{-2} \cdot a^k \cdot (ca)^2 c^{-2} \cdot 1 \\
&= a^{-k-2} c^2 a^2 (ca)^{-2} a^k (ca)^2 c^{-2} \stackrel{xr_1 x^{-1}=1, (7.5.36)}{=} a^{-2} c^2 a^2 c^{-2}, \\
x^2 cx^2 \cdot r_1 (x^2 cx^2)^{-1} &= x^2 cx^2 \cdot x \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c \cdot (x^2 cx^2)^{-1} \\
&= 1 \cdot a^k \cdot 1 \cdot a^k \cdot 1 \cdot a^k \cdot a^{-2} c^{-2} \cdot c^2 \cdot 1 \cdot a^{k+2} \cdot 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Die Relationen  $w_i r_1 w_i^{-1}$  liefern damit, daß  $a^2$ ,  $c^2$  und  $(ca)^2$  kommutieren.



Nun schreiben wir  $w_i \cdot r_2 \cdot w_i^{-1}$  in Schreier-Erzeugenden:

$$\begin{aligned} r_2 &= x^3 \cdot (c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1})^{k/2} \\ &= a^k \cdot (c^{-2} \cdot 1 \cdot a^{k+2} \cdot 1 \cdot c^2 (ca)^{-2} \cdot a^k \cdot (ca)^2 \cdot 1)^{k/2} \\ &= a^k \cdot (a^2)^{k/2} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot r_2 \cdot x^{-1} &= x \cdot x^3 \cdot (c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1})^{k/2} \cdot x^{-1} \\ &= 1 \cdot a^k \cdot ((ca)^{-2} \cdot 1 \cdot c^{-2} \cdot 1 \cdot (ca)^2 a^{k+2} \cdot a^k \cdot a^{-2} \cdot 1)^{k/2} \cdot 1 \\ &= a^k (c^{-2})^{k/2} = a^k c^{-k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 \cdot r_2 \cdot x^{-2} &= x^2 \cdot x^3 \cdot (c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1})^{k/2} \cdot x^{-2} \\ &= 1 \cdot a^k \cdot (a^2 \cdot 1 \cdot (ca)^{-2} \cdot 1 \cdot a^{-2} c^{-2} \cdot a^k \cdot c^2 \cdot a^{-k})^{k/2} \cdot 1 \\ &= a^k \cdot ((ca)^{-2})^{k/2} = a^k (ca)^{-k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \cdot r_2 \cdot c^{-1} &= c \cdot x^3 \cdot (c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1})^{k/2} \cdot c^{-1} \\ &= 1 \cdot a^k \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a^{-k} \cdot (ca)^2 \cdot 1 \cdot a^{-k-2} (ca)^{-2} \cdot 1)^{k/2} \cdot 1 \\ &= a^k \cdot (a^{-2})^{k/2} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cx \cdot r_2 (cx)^{-1} &= cx \cdot x^3 \cdot (c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1})^{k/2} \cdot (cx)^{-1} \\ &= 1 \cdot a^k \cdot ((ca)^2 a^{k+2} \cdot a^k \cdot a^{-2} \cdot 1 \cdot (ca)^{-2} \cdot 1 \cdot c^{-2} \cdot 1)^{k/2} \cdot 1 \\ &= a^k \cdot (c^{-2})^{k/2} = a^k c^{-k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cx^2 \cdot r_2 (cx^2)^{-1} &= cx^2 \cdot x^3 \cdot (c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1})^{k/2} \cdot (cx^2)^{-1} \\ &= 1 \cdot a^k \cdot (c^2 \cdot 1 \cdot (ca)^2 c^{-2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot a^k \cdot 1 \cdot a^{-k})^{k/2} \cdot 1 \\ &= a^k \cdot ((ca)^2)^{k/2} = a^k (ca)^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xc \cdot r_2 (xc)^{-1} &= xc \cdot x^3 \cdot (c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1})^{k/2} \cdot (xc)^{-1} \\ &= 1 \cdot a^k \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a^{-k} \cdot a^{-k-2} \cdot 1 \cdot c^2 a^2 \cdot 1)^{k/2} \cdot 1 \\ &= a^k \cdot (c^2)^{k/2} = a^k c^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xcx \cdot r_2 (xcx)^{-1} &= xcx \cdot x^3 \cdot (c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1})^{k/2} \cdot (xcx)^{-1} \\ &= 1 \cdot a^k \cdot (a^{-2} c^{-2} \cdot a^k \cdot c^2 \cdot a^{-k} \cdot a^2 \cdot 1 \cdot (ca)^{-2} \cdot 1)^{k/2} \cdot 1 \\ &= a^k \cdot ((ca)^{-2})^{k/2} = a^k (ca)^{-k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xcx^2 \cdot r_2 (xcx^2)^{-1} &= xcx^2 \cdot x^3 \cdot (c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1})^{k/2} \cdot (xcx^2)^{-1} \\ &= 1 \cdot a^k \cdot ((ca)^2 \cdot 1 \cdot a^{-k-2} (ca)^{-2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a^{-k})^{k/2} \cdot 1 \\ &= a^k \cdot (a^{-2})^{k/2} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2c \cdot r_2(x^2c)^{-1} &= x^2c \cdot x^3 \cdot (c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1})^{k/2} \cdot (x^2c)^{-1} \\
&= 1 \cdot a^k \cdot (1 \cdot a^k \cdot 1 \cdot a^{-k} \cdot c^2 \cdot 1 \cdot (ca)^2 c^{-2} \cdot 1)^{k/q} \cdot 1 \\
&= a^k \cdot ((ca)^2)^{k/2} = a^k (ca)^k, \\
x^2cx \cdot r_2(x^2cx)^{-1} &= x^2cx \cdot x^3 \cdot (c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1})^{k/2} \cdot (x^2cx)^{-1} \\
&= 1 \cdot a^k \cdot (c^2(ca)^{-2} \cdot a^k \cdot (ca)^2 \cdot 1 \cdot c^{-2} \cdot 1 \cdot a^{k+2} \cdot 1)^{k/2} \cdot 1 \\
&= a^k \cdot (a^2)^{k/2} = 1, \\
x^2cx^2 \cdot r_2(x^2cx^2)^{-1} &= x^2cx^2 \cdot x^3 \cdot (c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1} \cdot c^{-1} \cdot x \cdot c \cdot x^{-1})^{k/2} \cdot (x^2cx^2)^{-1} \\
&= 1 \cdot a^k \cdot (a^{-k-2} \cdot 1 \cdot c^2 a^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a^{-k})^{k/2} \cdot 1 \\
&= a^k \cdot (c^2)^{k/2} = a^k c^k.
\end{aligned}$$

Zusammen mit den Hilfsrelationen erhalten wir folgende Präsentation für  $\Gamma_{3,k}$ :

$$\Gamma_{3,k} = \left\langle a^2, c^2, (ca)^2 \mid \begin{array}{l} a^2, c^2 \text{ und } (ca)^2 \text{ kommutieren,} \\ a^{2k} = 1, a^k = c^k = (ca)^k \end{array} \right\rangle. \quad (7.5.37)$$

□

**Lemma 7.5.7** Sei  $u := a^2$ ,  $v := a^2c^2$  und  $w = a^2(ca)^2$ . Dann gilt

$$\Gamma_{3,k} = \left\langle u, v, w \mid \begin{array}{l} u, v \text{ und } w \text{ kommutieren,} \\ u^k = 1, v^{k/2} = 1, w^{k/2} = 1 \end{array} \right\rangle, \quad (7.5.38)$$

$\Gamma_{3,k}$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(k/2)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(k/2)\mathbb{Z}$ .

**Beweis:** (7.5.37)  $\Rightarrow$  (7.5.38): Es folgt, daß  $u$ ,  $v$  und  $w$  kommutieren. Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
u^k &= a^{2k} = 1, \\
v^{k/2} &= (a^2c^2)^{k/2} = a^k c^k = a^k a^k = 1, \\
w^{k/2} &= (a^2(ca)^2)^{k/2} = a^k (ca)^k = a^k a^k = 1.
\end{aligned}$$

(7.5.38)  $\Rightarrow$  (7.5.37): Wegen  $c^2 = u^{-1}v$  und  $(ca)^2 = u^{-1}w$  folgt die Kommutativität von  $a^2$ ,  $c^2$  und  $(ca)^2$ . Ferner:

$$\begin{aligned}
a^{2k} &= u^k = 1, \\
a^k &= u^{k/2} = u^{-k/2} \cdot 1 = u^{-k/2} v^{k/2} = (u^{-1}v)^{k/2} = c^k, \\
a^k &= u^{k/2} = u^{-k/2} \cdot 1 = u^{-k/2} w^{k/2} = (u^{-1}w)^{k/2} = (ca)^k.
\end{aligned}$$

□

Damit gewinnen wir nun die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(k/2)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(k/2)\mathbb{Z} \longrightarrow G_{3,k} \longrightarrow \mathcal{A}_4 \longrightarrow 0.$$

Wegen  $x^3 = a^k$  und  $1 \neq a^k \in \Gamma_{3,k}$  gilt  $x^3 \neq 1$ . Damit ist  $\{1, x^3\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ein Normalteiler von  $G_{3,k}$ . Es sei  $\tilde{G}_{3,k} := G_{3,k}/\{1, x^3\}$  und  $\tilde{\Gamma}_{3,k} := \Gamma_{3,k}/\{1, a^k\}$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{3,k} &= \langle a^2, c^2, (ca)^2 \mid a^2, c^2 \text{ und } (ca)^2 \text{ kommutieren, } a^k = c^k = (ca)^k = 1 \rangle \\
&= (\mathbb{Z}/(k/2)\mathbb{Z})^3.
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die exakten Sequenzen

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow G_{3,k} \longrightarrow \tilde{G}_{3,k} \longrightarrow 0, \\
0 &\longrightarrow (\mathbb{Z}/k/2\mathbb{Z})^3 \longrightarrow \tilde{G}_{3,k} \longrightarrow \mathcal{A}_4 \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

## 7.6 Residuen von Knotenkomplementen

Mit Hilfe des Programms `SnapPea` von Weeks erhalten wir eine Präsentation der Fundamentalgruppe eines Knotenkomplements. Aus dieser Präsentation können wir mit Hilfe von `KBMAG` die zugehörige Wachstumsfunktion bestimmen. In der folgenden Tabelle stellen wir für die Knoten mit bis zu zehn Überkreuzungen die Residuen zusammen, soweit von `KBMAG` die Wachstumsfunktion bestimmt werden konnte.

Die Tabelle besteht aus sechs Spalten. Die ersten beiden Spalten geben den Knoten nach der Numerierung in [Rolfsen1990] an, d. h., die erste Spalte enthält die Anzahl der Überkreuzungen und die zweite Spalte eine laufende Nummer. In der dritten Spalte befindet sich das Residuum an der Stelle 1 einer Wachstumsfunktion, sofern dieses bestimmt werden konnte. Die vierte Spalte enthält den Kehrwert des Residuums multipliziert mit 4, die fünfte Spalte den Kehrwert des Residuums multipliziert mit 5.6.

Falls ein Knoten weder ein Torusknoten noch ein Satellitenknoten ist, so besitzt sein Komplement in der  $\mathbb{S}^3$  eine hyperbolische Struktur. In diesem Fall wird in der sechsten Spalte das hyperbolische Volumen des Knotenkomplements aufgelistet. Das Volumen und andere hyperbolische Invarianten von Knoten und Verschlingungen werden in [AdHiWe1991] behandelt.

In einigen Fällen konnte `KBMAG` keinen Wort-Akzeptor berechnen, diese Knoten sind mit ? (a) markiert. In anderen Fällen konnte die Wachstumsfunktion nicht berechnet werden, weil die Koeffizienten der Zähler- und Nennerpolynome zu groß sind. Solche Fälle sind mit ? (f) markiert.

Cross.	Nr.	res	4/res	5.6/res	vol
3	1	2	2	2.8	—
4	1	2	2	2.8	2.029883212819307
5	1	19/6	1.26316	1.76842	—
5	2	1	4	5.6	2.828122088330784
6	1	4/3	3	4.2	3.163963228883144
6	2	1	4	5.6	4.400832516123047
6	3	2/3	6	8.4	5.693021091281301
7	1	14/5	1.42857	2	—
7	2	506/441	3.48617	4.88063	3.331744231641115
7	3	34/41	4.82353	6.75294	4.592125697027063
7	4	8/9	4.5	6.3	5.13794120187342
7	5	21/20	3.80952	5.33333	6.443537380850573
7	6	29/45	6.2069	8.68966	7.08492595351083
7	7	2/3	6	8.4	7.64337517235996
8	1	4/3	3	4.2	3.427205246274017
8	2	? (a)			4.93524267828066
8	3	238/281	4.72269	6.61176	5.238684100798440
8	4	? (a)			5.50048641634723
8	5	2990/4903	6.5592	9.18288	6.997189147792216
8	6	38/69	7.26316	10.1684	7.475237429505243
8	7	? (a)			7.022196589095254
8	8	14/19	5.42857	7.6	7.80134122444006
8	9	56/89	6.35714	8.9	7.588180223641628



8	10	10/17	6.8	9.52	8.65114855801708
8	11	2/3	6	8.4	8.28631681780659
8	12	? (f)			8.93585692748669
8	13	2/3	6	8.4	8.53123220146042
8	14	2/3	6	8.4	9.21780031602193
8	15	2/3	6	8.4	9.93064829379618
8	16	? (a)			10.57902191689927
8	17	? (a)			10.98590760628482
8	18	83/182	8.77108	12.2795	12.35090620915820
8	19	? (a)			—
8	20	4/5	5	7	4.124903251807676
8	21	6/7	4.66667	6.53333	6.78371351983513
9	1	? (a)			—
9	2	961/1156	4.81165	6.73632	3.486660146295044
9	3	? (a)			4.99485640412571
9	4	72/113	6.27778	8.78889	5.55651881634656
9	5	5/7	5.6	7.84	5.69844175094006
9	6	4322/8505	7.87136	11.0199	7.20360076162317
9	7	? (a)			8.01486145782996
9	8	? (a)			8.19234796243436
9	9	? (f)			8.01681556567802
9	10	? (f)			8.77345728205568
9	11	? (f)			8.28858904285849
9	12	1/2	8	11.2	8.83664234388584
9	13	? (a)			9.13509403793728
9	14	? (f)			8.95498926200255
9	15	? (f)			9.88549866033444
9	16	2/5	10	14	9.88300696001883
9	17	14/23	6.57143	9.2	9.47458045349923
9	18	7/12	6.85714	9.6	10.05772963558100
9	19	? (f)			10.03254744783670
9	20	? (a)			9.64430407380088
9	21	70/159	9.08571	12.72	10.18326553568109
9	22	172/321	7.46512	10.4512	10.62072702123947
9	23	? (a)			10.61134829405251
9	24	? (f)			10.83372910894526
9	25	1/2	8	11.2	11.39030514777366
9	26	? (f)			10.59584051499937
9	27	? (a)			10.99998095828712
9	28	? (f)			11.56317701626512
9	29	? (a)			12.20585616511472
9	30	5/6	4.8	6.72	11.95452696823204

9	31	? (f)			11.68631220787811
9	32	? (f)			13.09989984589253
9	33	? (f)			13.28045563625479
9	34	? (a)			14.34458138778897
9	35	? (f)			7.940579247781312
9	36	? (a)			9.88457865312702
9	37	? (f)			10.98944959257654
9	38	42/97	9.2381	12.9333	12.93285870225283
9	39	? (f)			12.81031000331112
9	40	? (a)			15.01834285786512
9	41	? (a)			12.09893602599079
9	42	? (f)			4.056860224236821
9	43	8/11	5.5	7.7	5.904085858508103
9	44	? (a)			7.40676757236750
9	45	? (f)			8.60203116640150
9	46	3/4	5.33333	7.46667	4.751701965517899
9	47	21/46	8.7619	12.2667	10.04995786127437
9	48	? (f)			9.53187983580098
9	49	20/23	4.6	6.44	9.42707362776928
10	1	110/107	3.89091	5.44727	3.526195990735375
10	2	? (a)			5.114841460302402
10	3	? (a)			5.732104786782052
10	4	? (a)			5.817129692825430
10	5	? (f)			7.37393513427457
10	6	? (f)			8.39093760672445
10	7	86/155	7.2093	10.093	9.11590639562999
10	8	10904/15781	5.78907	8.1047	6.083234837064976
10	9	1	4	5.6	8.29409967522929
10	10	6/11	7.33333	10.2667	9.18057364413895
10	11	? (f)			9.37044244139937
10	12	? (f)			9.81749519069585
10	13	? (a)			10.57848019046472
10	14	? (f)			10.93768941441755
10	15	? (f)			8.97344932600136
10	16	? (f)			9.54664230502845
10	17	? (a)			8.53675559919323
10	18	? (f)			10.63984427125764
10	19	20/41	8.2	11.48	9.84477130266774
10	20	? (a)			8.31737871841501
10	21	? (f)			9.67514114415530
10	22	? (a)			9.98186651789633
10	23	? (a)			11.39322463488506

10	24	? (a)			10.97745473682176
10	25	? (f)			11.87577960365208
10	26	? (a)			11.35201755798784
10	27	? (f)			12.38413196612857
10	28	? (a)			10.26467494650644
10	29	? (f)			11.60290524666798
10	30	? (f)			11.82875756950365
10	31	? (f)			11.04426403104339
10	32	? (f)			12.09093687193192
10	33	? (f)			11.53567393228233
10	34	? (f)			8.42226666786857
10	35	? (f)			10.39449678560532
10	36	? (f)			10.47618554030524
10	37	? (f)			10.96581053242464
10	38	? (a)			11.34931354723683
10	39	? (f)			11.58951872736846
10	40	? (f)			12.88874033027649
10	41	? (a)			12.37661549863504
10	42	? (f)			13.23984836679565
10	43	? (f)			12.60259611426208
10	44	? (a)			12.96899420503250
10	45	? (f)			13.71607598475273
10	46	? (f)			7.716999809324511
10	47	43/60	5.5814	7.81395	9.38519415672769
10	48	? (f)			10.37890144901783
10	49	2267/4839	8.53816	11.9534	11.45319336621993
10	50	? (a)			11.19888979208257
10	51	? (f)			12.63137951994411
10	52	? (f)			11.53754818249897
10	53	? (f)			12.88684742018347
10	54	? (a)			10.59131113363909
10	55	? (f)			12.18554062703974
10	56	? (f)			12.39880215580872
10	57	? (f)			13.58855850222605
10	58	? (a)			12.72133069853760
10	59	? (f)			13.38994414143272
10	60	? (f)			13.98004153570805
10	61	? (a)			8.45858026759131
10	62	? (a)			10.14146903630351
10	63	? (f)			11.51169129183895
10	64	? (a)			10.86809271305100
10	65	? (a)			12.07646143448946

10	66	? (f)			13.02926887083450
10	67	? (a)			12.42163050542115
10	68	? (f)			11.63703522930270
10	69	? (a)			14.12650517067015
10	70	? (f)			12.51088773042080
10	71	? (a)			13.38522874603995
10	72	? (f)			12.92959468704970
10	73	? (a)			13.70688084237153
10	74	? (a)			12.00603699837808
10	75	? (f)			13.43074878428476
10	76	? (f)			11.51286041446981
10	77	? (a)			12.07471168144469
10	78	? (f)			12.50209919698769
10	79	? (a)			12.54029521848435
10	80	? (a)			13.39404447151598
10	81	? (f)			14.49266703158334
10	82	? (f)			12.43147953132619
10	83	? (a)			14.34125613950010
10	84	? (a)			14.70989878155417
10	85	? (a)			11.79777365992887
10	86	? (a)			14.25805184918629
10	87	? (a)			14.27364459807037
10	88	2/5	10	14	15.64664917178013
10	89	? (a)			15.56605892312014
10	90	? (f)			13.86614986327110
10	91	? (a)			13.48702242029779
10	92	? (a)			14.85535017159680
10	93	? (f)			13.01646716490769
10	94	? (a)			13.31156652496759
10	95	? (f)			15.04785288458121
10	96	? (a)			15.17785142772461
10	97	? (f)			14.85274670837590
10	98	? (a)			14.41291902355026
10	99	? (a)			14.33434451904501
10	100	? (f)			12.81088256646549
10	101	? (a)			14.68750683762171
10	102	? (a)			13.72734329713671
10	103	? (f)			13.87478956993314
10	104	? (a)			14.10712668755235
10	105	? (a)			15.18169550461263
10	106	0	$\infty$	$\infty$	13.93301899431439
10	107	? (f)			15.35285269701981

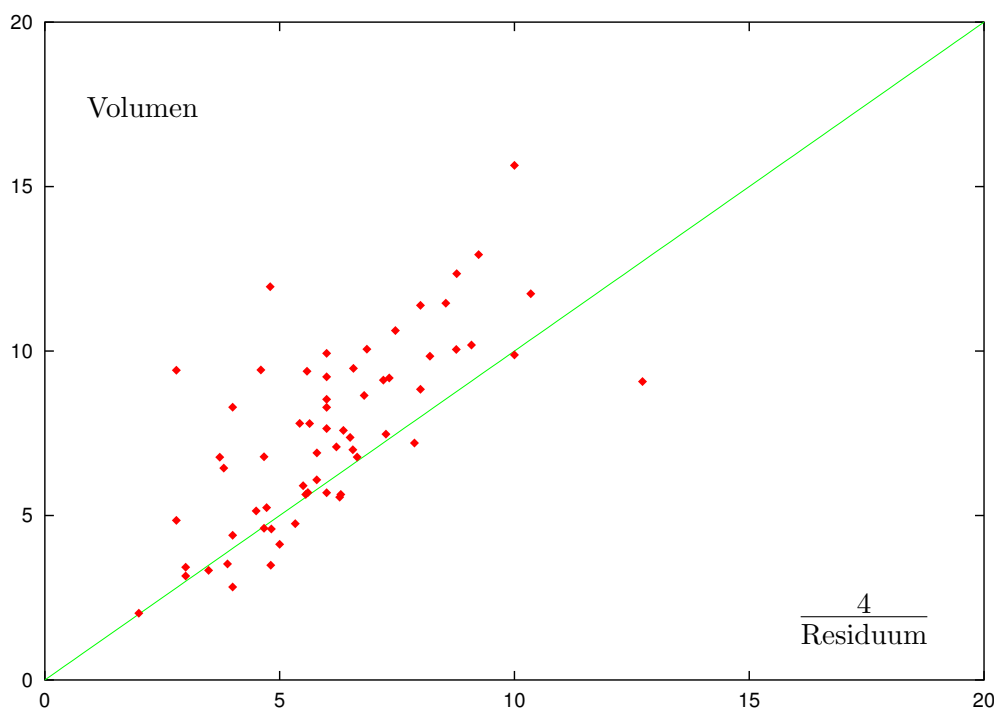
10	108	? (f)			12.90462395290652
10	109	? (f)			14.90020860302684
10	110	? (f)			14.77746266507286
10	111	? (f)			14.26502301349321
10	112	? (f)			14.75588407595319
10	113	? (a)			16.47347366146884
10	114	? (a)			15.30490434344304
10	115	? (f)			16.63803805643664
10	116	? (a)			15.42386650731444
10	117	? (f)			16.12544352397697
10	118	? (f)			15.54521490567672
10	119	? (a)			15.93869412628265
10	120	? (f)			16.27136828215934
10	121	? (f)			16.97487703219091
10	122	? (f)			16.41082315861028
10	123	? (a)			17.08570948298286
10	124	? (a)			—
10	125	6/7	4.66667	6.53333	4.61196137449732
10	126	29/42	5.7931	8.11034	6.904256123806481
10	127	? (f)			8.89681675963143
10	128	? (f)			5.86053930174000
10	129	? (a)			8.90151663727877
10	130	80/133	6.65	9.31	6.778198890046893
10	131	? (f)			9.46502165726547
10	132	? (a)			4.056860224236820
10	133	716/1009	5.63687	7.89162	7.798300232166507
10	134	? (a)			8.39292250833698
10	135	? (f)			10.68717496833963
10	136	? (f)			7.746274546233128
10	137	? (f)			9.25055626269988
10	138	? (f)			10.46724624267090
10	139	10/7	2.8	3.92	4.85117075733274
10	140	? (f)			5.21256682232055
10	141	? (a)			7.93647422921268
10	142	131/122	3.72519	5.21527	6.770816780739824
10	143	478/1521	12.728	17.8192	9.07089927001932
10	144	? (f)			10.79659498413384
10	145	0	$\infty$	$\infty$	5.044899162918904
10	146	? (f)			10.56101675491470
10	147	10/7	2.8	3.92	9.41759091601675
10	148	? (a)			10.26024343631367
10	149	? (f)			11.44272677886197

10	150	? (f)			10.08136285656082
10	151	? (f)			11.84304475168115
10	152	? (f)			8.53606534720561
10	153	8/13	6.5	9.1	7.374343889306712
10	154	? (a)			9.24988744386175
10	155	? (a)			9.25054161301210
10	156	? (f)			11.16339064217633
10	157	? (a)			12.66533328499851
10	158	? (f)			12.27123635844697
10	159	46/119	10.3478	14.487	11.74064103791392
10	160	? (f)			9.20391660609078
10	161	18/25	5.55556	7.77778	5.63877294885305
10	162	773/1218	6.30272	8.8238	5.638772948853055
10	163	? (a)			10.69336054671986
10	164	? (f)			13.29000306859836
10	165	? (f)			12.50668793089236
10	166	? (a)			11.60308464976908

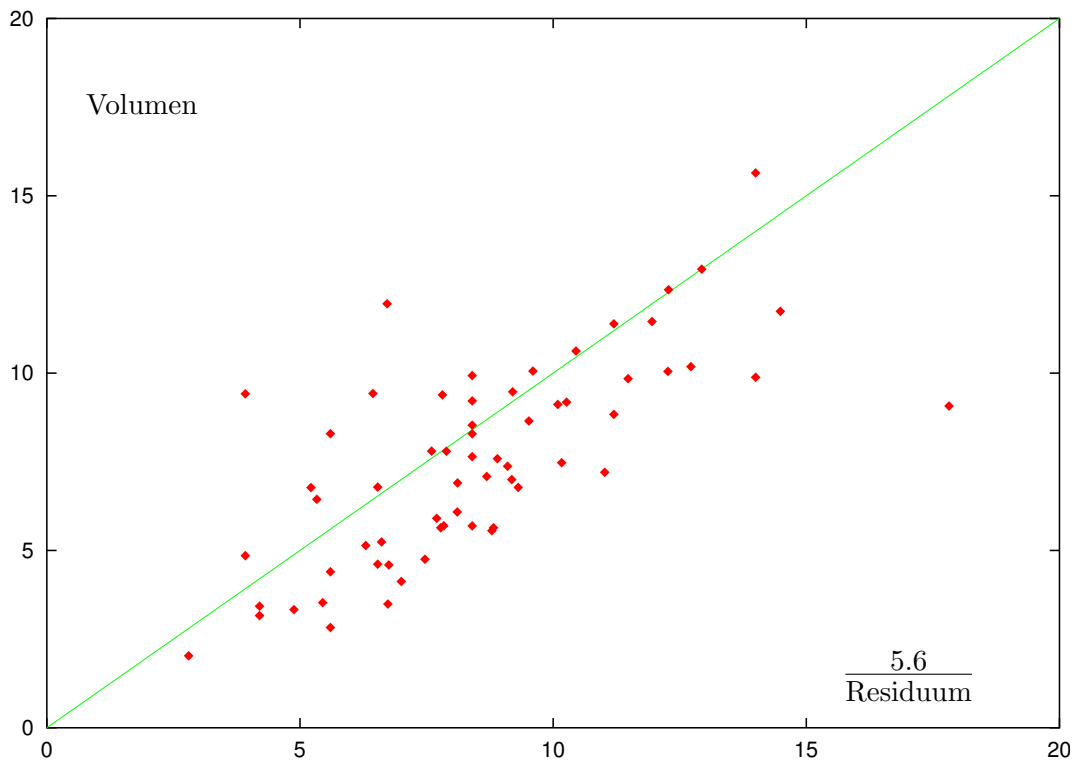
Die Knoten 161 und 162 mit 10 Überkreuzungen sind identisch. Die Residuen sind verschieden, weil **SnapPea** verschiedene Präsentierungen erstellt hat.

Sehr interessant sind die Knoten 106 und 145 mit 10 Überkreuzungen. Dort hat die berechnete Wachstumsfunktion keine Polstelle an der Stelle 1. Dort wäre zu klären, was genau dort passiert.

In einigen Fällen entspricht das hyperbolische Volumen eines Knotenkomplements ungefähr dem Vierfachen des Kehrwerts des Residuums. Dies ist besonders für einige kleine Volumina der Fall. Daher haben wir eine Grafik erstellt, welche die Paare  $(4/\text{res}, \text{vol})$  enthält. In der Nähe der Diagonalen sind Markierungen der Knoten, deren Volumen ungefähr das Vierfache des berechneten Residuumkehrwerts beträgt.



Bei größeren Volumina sind einige hyperbolische Volumen ungefähr gleich dem 5.6-fachen des Kehrwerts des Residuums. Dies ist in der folgenden Grafik zu sehen. Dort sind die Paare  $(5.6/\text{res}, \text{vol})$  eingetragen.



Bei den hyperbolischen Knoten mit bis zu zehn Überkreuzungen, für die das Residuum an der Stelle 1 einer Wachstumsfunktion der Fundamentalgruppe des Knotenkomplements berechnet werden konnte, ist ein gewisser Zusammenhang zwischen dem Residuum und dem hyperbolischen Volumen zu erkennen: Das hyperbolische Volumen liegt in der Größenordnung des 5.6-fachen des Kehrwerts des berechneten Residuums.





# Literaturverzeichnis

- [AdHiWe1991] ADAMS, COLIN, HILDEBRAND, MARTIN UND WEEKS, JEFFREY: *Hyperbolic invariants of knots and links*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 326 (1991), 1–56.
- [Alonso1991] ALONSO, JUAN M.: *Growth functions of amalgams*. *Publ., Math. Sci. Res. Inst.* 19 (1991), 1–34.
- [Al Al-Ha Al-Sa1988] ALBAR, M. A., AL-HAMED, M. A. UND AL-SALEH, N. A.: *The growth of Coxeter groups*. *Math. Japonica* 47 (1998), 417–428.
- [Andreev1970] ANDREEV, E. M.: *On convex polyhedra in Lobačevskiĭ spaces*. *Math. USSR Sbornik* 10 (1970), 413–440.
- [Andreev1970b] ANDREEV, E. M.: *On convex polyhedra of finite volume in Lobačevskiĭ space*. *Math. USSR Sbornik* 12 (1970), 255–259.
- [Bass1972] BASS, H.: *The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups*. *Proc. Lond. Math. Soc.* 25 (1972), 603–614.
- [Benson1983] BENSON, M.: *Growth Series of Finite Extensions of  $\mathbb{Z}^n$  are Rational*. *Invent. math.* 73 (1983), 251–269.
- [Bianchi1892] BIANCHI, LUIGI: *Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari*. *Math. Ann.* 40 (1892), 332–412.
- [Bourbaki1968] BOURBAKI, NICOLAS: *Groupes et algèbres de Lie*. Paris: Hermann, 1968.
- [BrLeeWi1985] BRUNNER, ANDREW M., LEE, YOUNG W. UND WIELENBERG, NORBERT J.: *Polyhedral Groups and Graph Amalgamation Products*. *Topology and its Applications* 20 (1985), 289–304.
- [Cannon1983] CANNON, J. W.: *The growth of the closed surface groups and the compact hyperbolic Coxeter groups*. Preprint, 1983 (unveröffentlichtes Manuskript).
- [Cannon1984] CANNON, JAMES W.: *The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups*. *Geom. Dedicata* 16 (1984), 123–148.
- [CanWagr1992] CANNON, J. W. UND WAGREICH, PH.: *Growth functions of surface groups*. *Math. Ann.* 293 (1992), 239–257.
- [ChaDa1991] CHARNEY, R. UND DAVIS, M.: *Reciprocity of growth functions of Coxeter groups*. *Geom. Dedicata* 39 (1991), 373–378.
- [Chiswell1992] CHISWELL, I. M.: *The Euler characteristic of graph products and of Coxeter groups*. *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* 173 (1992), 36–46.
- [Chiswell1994] CHISWELL, I. M.: *The Growth Series of a Graph Product*. *Bull. London Math. Soc.* 26 (1994), 268–272.
- [CoGriKuZi1998] COLLINS, D. J., GRIGORCHUK, R. I., KURCHANOV, P. F. UND ZIESCHANG, H.: *Combinatorial Group Theory and Applications to Geometry*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1998.
- [Cohen1982] COHEN, JOEL M.: *Cogrowth and Amenability of Discrete Groups*. *J. Funct. Anal.* 48 (1982), 301–309.

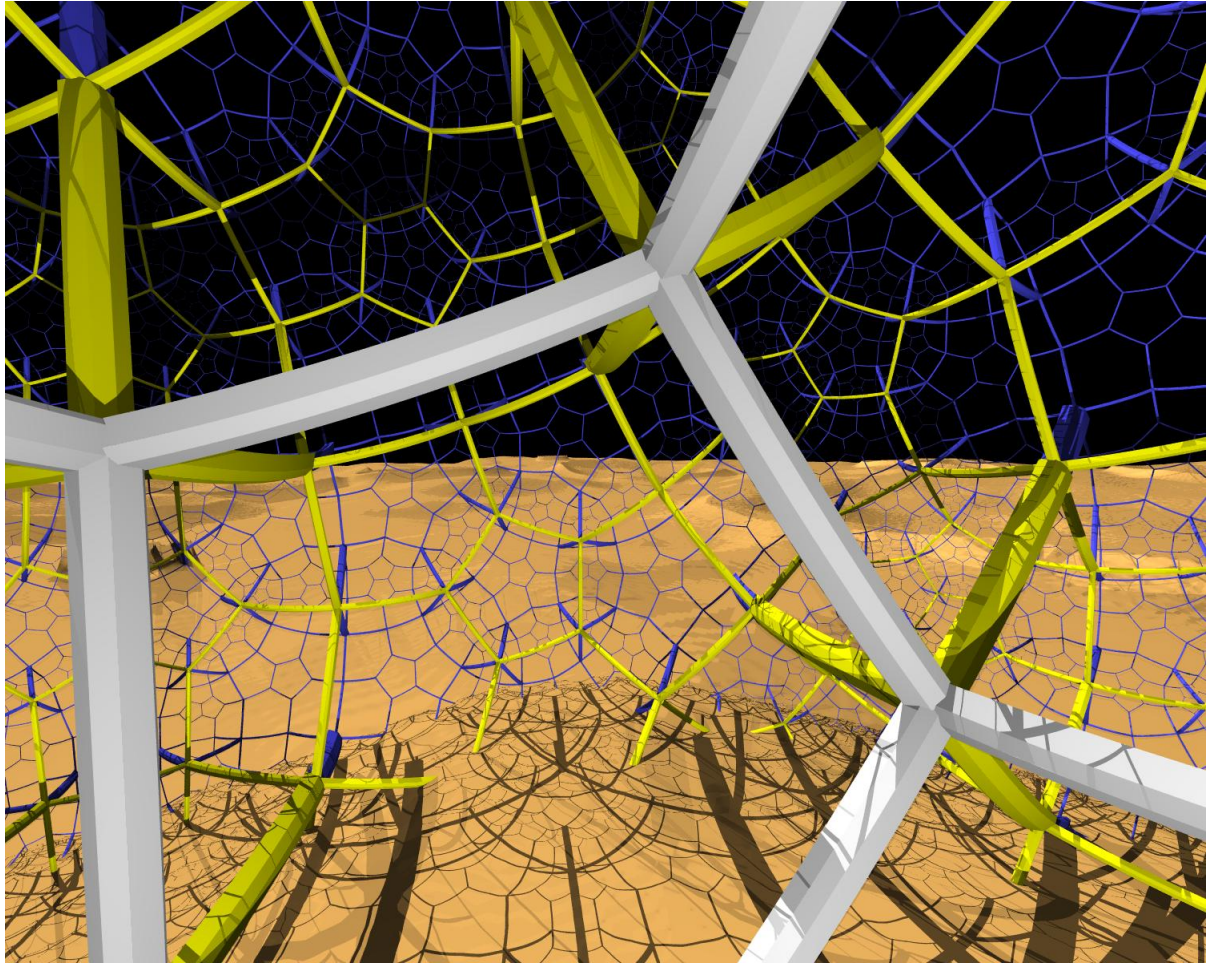
- [**Coxeter1934**] COXETER, H. S. M.: *Discrete Groups generated by Reflections*. *Ann. Math.* 35 (1934), 588–621.
- [**Coxeter1935**] COXETER, H. S. M.: *The Complete Enumeration of Finite Groups of the Form  $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$* . *J. Lond. Math. Soc.* 10 (1935), 21–25.
- [**CoxMo1957**] COXETER, H. S. M. UND MOSER, W. O. J.: *Generators and Relations for Discrete Groups*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1957.
- [**ECHLPT1992**] EPSTEIN, DAVID B. A., CANNON, JAMES W., HOLT, DEREK F., LEVY, SILVIO V. F., PATERSON, MICHAEL S. UND THURSTON, WILLIAM P.: *Word Processing in Groups*. Boston, London: Jones and Bartlett Publishers, 1992.
- [**Efremovic1953**] EFREMOVIČ, V.: *The proximity geometry of Riemannian manifolds*. *Uspekhi Mat. Nauk* 8 (1953), 189.  
in russischer Sprache
- [**ElsGruMe1997**] ELSTRODT, J., GRUNEWALD, F. UND MENNICKE, J.: *Groups Acting on Hyperbolic Space*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1997.
- [**Ep Ia-Fl Zw1996**] EPSTEIN, DAVID B. A., IANO-FLETCHER, ANTHONY R. UND ZWICK, URI: *Growth Functions and Automatic Groups*. *Exp. Math.* 5 (1996), 297–315.
- [**Floege1983**] FLÖGE, DIETER: *Zur Struktur der  $PSL_2$  über einigen imaginär-quadratischen Zahlringen*. *Math. Z.* 183 (1983), 255–279.
- [**Floyd1992**] FLOYD, WILLIAM J.: *Growth of planar Coxeter groups, P.V. numbers, and Salem numbers*. *Math. Ann.* 293 (1992), 475–483.
- [**Floyd1993**] FLOYD, WILLIAM J.: *Symmetries of planar growth functions. II*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 340 (1993), 447–502.
- [**FIP11987**] FLOYD, WILLIAM J. UND PLOTNICK, STEVEN P.: *Growth functions on Fuchsian groups and the Euler characteristic*. *Invent. math.* 88 (1987), 1–29.
- [**FIP11988**] FLOYD, WILLIAM J. UND PLOTNICK, STEVEN P.: *Symmetries of planar growth functions*. *Invent. math.* 93 (1988), 501–543.
- [**FIP11994**] FLOYD, W. J. UND PLOTNICK, S. P.: *Growth Functions for Semi-Regular Tilings of the Hyperbolic Plane*. *Geom. Dedicata* 53 (1994), 1–23.
- [**Francis1983**] FRANCIS, GEORGE K.: *Drawing Seifert Surfaces that fiber the Figure-8 Knot Complement in  $S^3$  over  $S^1$* . *Amer. Math. Monthly* 90 (1983), 589–599.
- [**GAP2000**] THE GAP GROUP: *GAP – Groups, Algorithms and Programming, Version 4.2*; 2000.  
<http://www.gap-system.org/>
- [**Gooijer1979**] DE GOOIJER, J. G.: *On a recurrence relation for a special type of determinant*. *Matrix Tensor Q.* 30 (1979), 55–61.
- [**Grigorchuk1980**] GRIGORCHUK, R. I.: *Symmetrical random walks on discrete groups*. *Adv. in Probability and Related Topics* 6 (1980), 285–325.
- [**Grigorchuk1983**] GRIGORCHUK, R. I.: *On Milnor’s problem of group growth*. *Soviet Math. Dokl.* 28 (1983), 23–26.
- [**Grigorchuk1990**] GRIGORCHUK, ROSTISLAV I.: *On Growth in Group Theory*. *Proc. of the Int. Congress of Math., Kyoto, Japan, 1990* (1990), 325–338.
- [**Grigorchuk1995**] GRIGORCHUK, R. I.: *Growth Functions, Rewriting Systems, and the Euler Characteristic*. *Math. Notes* 58 (1995), 1136–1146.
- [**GriHar1997**] GRIGORCHUK, ROSTISLAV UND DE LA HARPE, PIERRE: *On problems related to growth, entropy and spectrum in group theory*. *J. of Dynamical and Control Systems* 3 (1997), 51–89.

- [**GriNag1997**] GRIGORCHUK, ROSTISLAV UND NAGNIBEDA, TATIANA: *Complete growth functions of hyperbolic groups. Invent. math.* 130 (1997), 159–188.
- [**Gromov1981**] GROMOV, MIKHAEL: *Groups of polynomial growth and expanding maps. Publ. Math. I.H.E.S.* 53 (1981), 53–73.
- [**GruGuMe1982**] GRUNEWALD, F., GUSHOFF, A.-C. UND MENNICKE, J.: *Komplex-quadratische Zahlkörper kleiner Diskriminante und Pflasterungen des dreidimensional hyperbolischen Raumes. Geom. Dedicata* 12 (1982), 227–237.
- [**GruHu1996**] GRUNEWALD, FRITZ UND HUNTEBRINKER, WOLFGANG: *A Numerical Study of Eigenvalues of the Hyperbolic Laplacian for Polyhedra with One Cusp. Exp. Math.* 5 (1996), 57–80.
- [**GruMe1980**] MENNICKE, J. L. UND GRUNEWALD, F. J.: *Some 3-manifolds arising from  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ . Arch. Math.* 35 (1980), 275–291.
- [**GruSchw1993**] GRUNEWALD, FRITZ UND SCHWERMER, JOACHIM: *Subgroups of Bianchi groups and arithmetic quotients of hyperbolic 3-space. Trans. Amer. Math. Soc.* 335 (1993), 47–78.
- [**Harpe2000**] DE LA HARPE, PIERRE: *Topics in Geometric Group Theory*. Chicago: The University of Chicago Press, 2000.
- [**Heckman1995**] HECKMAN, G. J.: *The volume of hyperbolic Coxeter Polytopes of even dimension. Indag. Mathem., N.S.* 6 (1995), 189–196.
- [**Hermiller1994**] HERMILLER, S.: *Rewriting systems for Coxeter groups. J. Pure Appl. Algebra* 92 (1994), 137–148.
- [**Hi Lo M-A1992**] HILDEN, HUGH M., LOZANO, MARÍA TERESA UND MONTESINOS-AMILIBIA, JOSE MARÍA: *The Arithmeticity of the Figure Eight Knot Orbifolds. Topology '90* (1992), 169–183.
- [**Hoekstra2001**] HOEKSTRA, JENS: *Über einen kristallographischen Quotienten der Picard-Gruppe und die Konstruktion von Nichtkongruenzuntergruppen*. Inaugural-Dissertation, 2001, Düsseldorf.
- [**Humphreys1990**] HUMPHREYS, JAMES E.: *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [**Huntebrinker1995**] HUNTEBRINKER, WOLFGANG: *Numerische Bestimmung von Eigenwerten des Laplace-Beltrami-Operators auf dreidimensionalen hyperbolischen Räumen mit Finite-Element-Methoden*. Inaugural-Dissertation, 1995, Düsseldorf.
- [**Jaeschke1990**] JAESCHKE, MICHAEL: *Die Wachstumsfunktionen der hyperbolischen Coxeter-Gruppen*. Diplomarbeit, 1990, Bonn.
- [**Jørgensen1977**] JØRGENSEN, TROELS: *Compact 3-manifolds of constant negative curvature fibering over the circle. Ann. Math.* 106 (1977), 61–72.
- [**Johnson1998**] JOHNSON, D.L.: *Word growth of Coxeter groups. Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* 252 (1998), 188–189.
- [**KB1970**] KNUTH, D.E. UND BENDIX, P.: *Simple word problems in universal algebras*. New York: Pergamon Press, 1970.
- [**KBMAG2000**] HOLT, DEREK UND ANDERE: *KBMAG – Knuth-Bendix on Monoids and Automatic Groups*. Warwick: <ftp://ftp.maths.warwick.ac.uk/people/dfh/kbmag2/>, 2000.
- [**Kuksov1999**] KUKSOV, DMITRI: *Cogrowth series of free products of finite and free groups. Glasgow Math. J.* 41 (1999), 19–31.
- [**Liardet1996**] LIARDET, F.: *Croissance dans les groupes virtuellement abéliens*. Thèse, 1996, Université de Genève.
- [**Mamagani1995**] MAMAGANI, M. DZH.: *Growth Functions of Groups of Surfaces. Math. Notes* 58 (1995), 1156–1165.

- [**Milnor1968**] MILNOR, J.: *A note on curvature and the fundamental group. J. Differential Geometry* 2 (1968), 1–7.
- [**Milnor1968b**] MILNOR, JOHN: *Growth of finitely generated solvable groups. J. Differential Geom.* 2 (1968), 447–449.
- [**Milnor1968c**] MILNOR, JOHN: *Advanced Problems, Problem 5603. Amer. Math. Monthly* 75 (1968), 685–686.
- [**Milnor1982**] MILNOR, JOHN: *Hyperbolic geometry: the first 150 years. Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982), 9–24.
- [**Nauty2000**] MCKAY, BRENDAN D.: *Nauty – a program for computing automorphism groups of graphs and digraphs*; 2000.  
<http://cs.anu.edu.au/people/bdm/nauty/>
- [**NeuSha1994**] NEUMANN, WALTER D. UND SHAPIRO, MICHAEL: *Automatic Structures and Boundaries for Graphs of Groups*. Preprint, 1994.
- [**NeuSha1995**] NEUMANN, WALTER D. UND SHAPIRO, MICHAEL: *Automatic structures, rational growth, and geometrically finite hyperbolic groups. Invent. math.* 120 (1995), 259–287.
- [**Parry1988**] PARRY, WALTER: *Counterexamples involving growth series and Euler characteristics. Proc. Amer. Math. Soc.* 102 (1988), 49–51.
- [**Parry1993**] PARRY, WALTER: *Growth Series of Coxeter Groups and Salem Numbers. J. of Algebra* 154 (1993), 406–415.
- [**Picard1884**] PICARD, E.: *Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté d'un plan. Bull. S.M.F.* 12 (1884), 43–47.
- [**Radcliffe2001**] RADCLIFFE, DAVID G.: *Unique Presentation of Coxeter Groups and related Groups*. Ph. D. Thesis, 2001, Univ. of Wisconsin-Milwaukee.
- [**Ratcliffe1994**] RATCLIFFE, JOHN G.: *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.
- [**Reidemeister1927**] REIDEMEISTER, K.: *Knoten und Gruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 5 (1927), 8–23.
- [**Riley1975**] RILEY, ROBERT: *A quadratic parabolic group. Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 77 (1975), 281–288.
- [**Rogmann1997**] ROGMANN, SASCHA: *Wachstumsfunktionen von Pflasterungen*. Diplomarbeit, 1997, Düsseldorf.
- [**Rolfesen1990**] ROLFSEN, DALE: *Knots and Links*. Houston: Publish or Perish, Inc., 1990.
- [**Schreier1927**] SCHREIER, O.: *Die Untergruppen der freien Gruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 5 (1927), 161–183.
- [**Scott1983**] SCOTT, G. P.: *The Geometries of 3-Manifolds. Bull. London Math. Soc.* 15 (1983), 401–487.
- [**Serre1971**] SERRE, JEAN-PIERRE: *Cohomologie des groupes discrets*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971.
- [**Sharp1998**] SHARP, RICHARD: *Relative growth series in some hyperbolic groups. Math. Ann.* 312 (1998), 125–132.
- [**Sloane2001**] SLOANE, NEIL J. A.: *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*; 2001.  
<http://www.research.att.com/~njas/sequences/>
- [**Smythe1984**] SMYTHE, N.: *Growth functions and Euler series. Invent. math.* 77 (1984), 517–531.
- [**Solomon1966**] SOLOMON, LOUIS: *The Orders of the Finite Chevalley Groups. J. of Algebra* 3 (1966), 376–393.

- [**Stillwell1993**] STILLWELL, JOHN: *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1993.
- [**Stoll1993**] STOLL, MICHAEL: *Asymptotics of some number theoretic functions and an application to the growth of nilpotent groups*. Bonn: Bonner mathematische Schriften, 1994.
- [**Stoll1994**] STOLL, MICHAEL: *groups.lsp – cpc-Algorithmus fuer Monoide*; 1992.  
CLISP-Quellcode
- [**Stoll2000**] STOLL, MICHAEL: *Abzählende Kombinatorik, Vorlesung im Wintersemester 1999/2000*; 2000.  
<http://www.math.uni-duesseldorf.de/~stoll/vorlesungen/Kombinatorik-WS1999.pdf>
- [**Stramm1994**] STRAMM, KLAUS: *Kleine Eigenwerte des Laplace-Operators zu Kongruenzgruppen. Schriftenreihe des Math. Inst. und des Graduiertenkollegs der Universität Münster* 3. Serie, Heft 11 (1994).
- [**Svarc1955**] ŠVARC, A.: *A volume invariant of coverings. Dokl. Akad. Nauk SSSR* 105 (1955), 32–34.  
in russischer Sprache
- [**Swan1968**] SWAN, RICHARD G.: *Generators and relations for certain special linear groups. Bull. Amer. Math. Soc.* 74 (1968), 576–581.
- [**Swan1971**] SWAN, RICHARD G.: *Generators and relations for certain special linear groups. Adv. in Math.* 6 (1971), 1–77.
- [**Szwarc1998**] SZWARC, RYSZARD: *The ratio and generating function of cogrowth coefficients of finitely generated groups. Studia math.* 131 (1998), 89–94.
- [**Thurston1980**] THURSTON, WILLIAM P.: *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Preprint, 1980.
- [**Thurston1982**] THURSTON, WILLIAM P.: *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982), 357–381.
- [**Wagreich1982**] WAGREICH, P.: *The growth function of a discrete group. Lect. Notes. Math.* 956 (1982), 125–144.
- [**Weber1989**] WEBER, BERNHARD: *Zur Rationalität polynomialer Wachstumsfunktionen*. Bonn: Bonner mathematische Schriften, 1988.
- [**Wilf1994**] WILF, HERBERT S.: *generatingfunctionology*. Boston: Academic Press, 1994.
- [**Wolf1968**] WOLF, JOSEPH A.: *Growth of finitely generated solvable groups and curvature of riemannian manifolds. J. Differential Geometry* 2 (1968), 421–446.
- [**Worthington1998**] WORTHINGTON, R. L.: *The growth series of compact hyperbolic Coxeter groups with 4 and 5 generators. Canad. Math. Bull.* 41 (1998), 231–239.





90°-Dodekaeder im Poincaréschen Kugelmodell