Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 1. Bringen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 & 14 & 37 & -33 \\ -1 & 3 & -2 & 7 & -3 \\ 2 & -6 & -6 & -22 & 18 \\ 5 & -15 & 15 & -31 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 5}(\mathbb{Q}).$$

mit dem Gauß-Algorithmus auf reduzierte Zeilen-Stufen-Form, und geben Sie eine Basis für die Lösungmenge $U \subset \mathbb{Q}^5$ des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems an.

Aufgabe 2. Wir betrachten die ganzzahlige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Bringen Sie A mit dem Gauß-Algorithmus über dem Körper $K = \mathbb{Q}$ in reduzierte Zeilen-Stufen-Form. Wiederholen Sie dies mit einem anderen Pivot-Element im ersten Schritt.

Aufgabe 3. Wir betrachten eine 2×2-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ über einem Körper K, mit entsprechendem homogenem linearen Gleichungssytem

$$aX + bY = 0 \quad \text{und} \quad cX + dY = 0.$$

Angenommen, es gilt $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie mit dem Gauß-Algorithmus: Der Nullvektor ist die einzige Lösung.

Aufgabe 4. Sei $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$ ein homogenes lineares Gleichungssystem mit ganzzahligen Koeffizienten. Wir betrachten die resultierenden Lösungsmengen

$$U \subset \mathbb{Q}^n \quad \text{und} \quad U_p \subset \mathbb{F}_p^n$$

über dem Körper der rationalen Zahlen beziehungweise den endlichen Primkörpern. Zeigen Sie mit dem Gauß-Algorithmus, dass

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(U_p) = \dim_{\mathbb{Q}}(U)$$

für fast alle Primzahlen $p > 0$ gilt. Tipp: Benutzen Sie, dass jede ganze Zahl nur endlich viele Primteiler hat.

Abgabe: Bis Montag, den 4. Dezember um 10:25 Uhr im Zettelkasten.