Zusammenfassung Kombinatorik

Man unterscheidet Permutationen, Variationen und Kombinationen. Dabei sind Permutationen Spezialfälle der Variationen. Variationen beachten die Reihenfolge, Kombinationen nicht.

Definition:
Jede Anordnung der Elemente einer Menge heißt <u>Permutation</u> der Elemente dieser Menge.

Satz:
Hat die Menge A n Elemente, so gibt es $n!$ Permutationen.

Definition:
k-stellige Sequenzen, in denen jedes Element von A mit $|A| = n$ höchstens einmal (beliebig oft) vorkommt, heißen <u>Variationen</u> ohne (mit) Wiederholung der Länge k.

Satz:
Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung der Länge k aus A mit $|A| = n$ beträgt

$$V(n,k) \;=\; n(n-1)\cdots(n-k+1) \;=\; \frac{n!}{(n-k)!} \;=\; (n)_k.$$

$V(n,n) = n!$ ist der Spezialfall der Permutationen.

Deutung:
Urnenmodell: Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge.

a) Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln kann man auf $V(n,k)$ Arten k Stück ohne Zurücklegen entnehmen.

b) Man kann k unterscheidbare Kugeln auf $V(n,k)$ Arten in n unterscheidbare Urnen legen, wobei in jeder Urne höchstens eine Kugel enthalten sein darf.

c) Einer n-elementigen Menge kann man auf $V(n,k)$ Arten unter Beachtung der Reihenfolge k Elemente entnehmen.

Satz:
Die Anzahl der Variationen der Länge k mit Wiederholung aus A mit $|A| = n$ beträgt

$$\overline{V}(n,k) \;=\; n^k.$$

Deutung:
Urnenmodell: Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge.

a) Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln kann man auf $\overline{V}(n,k)$ Arten k Stück mit Zurücklegen entnehmen (geordnete k-Stichprobe mit Wiederholung).

b) Man kann k unterscheidbare Kugeln auf n unterscheidbare Urnen auf $\overline{V}(n,k)$ Arten verteilen, wobei jede Urne beliebig viele Kugeln enthalten darf.

c) Haben die Mengen $A_1, \ldots, A_k$ jeweils n Elemente, so hat $A_1 \times \cdots \times A_k$ genau $\overline{V}(n,k)$ Elemente. Insbesondere hat A^k auch $\overline{V}(n,k)$ Elemente, falls $|A| = n$.

Definition:
Jede k-elementige Teilmenge aus A mit $|A| = n$ heißt Kombination ohne Wiederholung der Länge k.

Satz:
Die Anzahl der k-Teilmengen einer n-elementigen Menge oder Kombinationen der Länge k ohne Wiederholung beträgt

$$C(n,k) \;=\; \binom{n}{k} \;=\; \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad \text{(Binomialkoeffizient).}$$

Deutung:
Urnenmodell: Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge.

a) Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln kann man mit einem Griff k Kugeln auf $C(n,k)$ Arten ziehen (ungeordnete k-Stichprobe ohne Wiederholung).

b) Man kann k nicht unterscheidbare Kugeln auf $C(n,k)$ Arten auf n unterscheidbare Urnen verteilen, wobei in jeder Urne höchstens eine Kugel liegen darf.

c) Eine n-elementige Menge hat $C(n,k)$ verschiedene k-Teilmengen.

Satz:
Die Anzahl der Kombinationen der Länge k mit Wiederholung aus A mit $|A| = n$ beträgt

$$\overline{C}(n,k) \;=\; \binom{n+k-1}{k}.$$

Deutung:
Urnenmodell: Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge.

a) Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln kann man auf $\overline{C}(n,k)$ Arten k Kugeln mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge ziehen (ungeordnete k-Stichprobe mit Wiederholung).

b) Auf n unterscheidbare Urnen kann man auf $\overline{C}(n,k)$ Arten k nicht unterscheidbare Kugeln irgendwie verteilen.