Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 3

Aufgabe 1. (i) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in cartesischen Koordinaten:

$$(5-i)^{-1}, \quad \frac{1+2i}{3+4i}, \quad (1+i)^3.$$

(ii) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten an:

$$\overline{i-1}, \quad i^{1000}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für jede der folgenden Bedingungen die resultierenden Mengen von komplexen Zahlen $z = x + iy = re^{i\varphi}$ und skizzieren sie diese in der Anschauungsebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

(i) $\bar{z} = -z$;

(ii) $\bar{z} = z^{-1}$;

(iii) $z^5 = 1$;

(iv) $\mathrm{Re}(iz + 2) \geq 0$;

(v) $z^2 - (6 + 3i)z + (7 + 9i) = 0$.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen und statten die vierelementige Menge $R = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ mit den Verknüpfungen

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' + bb', ab' + ba' + bb')$$

aus. Verifizieren sie im Detail, dass die Ringaxiome gelten, und entscheiden Sie, ob R ein Körper ist.

Aufgabe 4. Sei $R = \{0, 1, a\}$ ein assoziativer Ring mit genau drei Elementen. Beweisen Sie, dass dann

$$1 + a = 0, \quad a^2 = 1 \quad \text{und} \quad 1 + 1 = a$$

gilt, und stellen Sie die Additions- und Multiplikationstafeln auf.

Abgabe: Bis Montag, den 6. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.