Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2022
12.04.2022
Blatt 01

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

Aufgabe 1 (4 Punkte) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Zusatz zu Teil (a): Wie groß ist die Anzahl *aller* Quadrate auf einem Schachbrett?

Aufgabe 2 (4 Punkte) Für die Menge $X = \{0, 1\}$ bestimme man $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben seien Mengen X und Y mit Teilmengen $M \subset X$ und $N \subset Y$. Das kartesische Produkt $M \times N$ fassen wir als Teilmenge der Grundmenge $X \times Y$ auf. Zeigen Sie, dass im allgemeinen

$$(M \times N)^c \neq M^c \times N^c.$$

Finden Sie eine korrekte Darstellung von $(M \times N)^c$ als Vereinigung von kartesischen Produkten von M, N sowie ihren Komplementen, und beweisen Sie diese.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Aussagen über die Urbilder von Vereinigungen und Durchschnitten. Hierbei sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{N}$ ein Mengensystem auf Y.

(a) $f^{-1}(\bigcup_{N\in\mathcal{N}} N) = \bigcup_{N\in\mathcal{N}} f^{-1}(N)$,

(b) $f^{-1}(\bigcap_{N\in\mathcal{N}} N) = \bigcap_{N\in\mathcal{N}} f^{-1}(N)$.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 19.04., 10.25 Uhr
Besprechung: Mi., 27.04.2022 und Do., 28.04.2022, in den Übungen