Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2022
19.04.2022
Blatt 02

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

In den nachstehenden Aufgaben 5 und 6 seien M eine Menge mit m und N eine Menge mit n Elementen.

Aufgabe 5 (4 Punkte) Bestimmen Sie

(a) die Anzahl aller Abbildungen von M nach N,
(b) im Fall $m = n$ die Anzahl aller bijektiven Abbildungen $f : M \to N$,
(c) im Fall $m \leq n$ die Anzahl aller injektiven Abbildungen $f : M \to N$.

Formulieren Sie jeweils eine Behauptung und beweisen Sie diese!

Aufgabe 6 (4 Punkte) Es sei $A_{m,n}$ die Anzahl der surjektiven Abbildungen von M nach N.

(a) Begründen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A_{m,k} = n^m.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\sum_{l=k}^{n} (-1)^{n-l} \binom{n}{l} \binom{l}{k} = \delta_{n,k},$$

wobei $\delta_{n,k}$ das sogenannte Kronecker-Delta bezeichnet, das die Werte 1 für $n = k$ und 0 für $n \neq k$ annimmt.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass

$$A_{m,n} = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n-l} \binom{n}{l} l^m.$$

Bitte wenden!

Für natürliche Zahlen n und p sei $s_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

Aufgabe 7 (4 Punkte) Zeigen Sie durch Induktion über n und mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die Pascal'sche Identität

$$\sum_{p=0}^{q} \binom{q+1}{p} s_n(p) = (n+1)^{q+1} - 1.$$

Folgern Sie, dass $s_n(4) = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

(Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 1!)

Aufgabe 8 (4 Punkte) Zeigen Sie: Zu jedem $q \geq 1$ existieren rationale Zahlen $a_{k,q}$, $1 \leq k \leq q-1$, so dass

$$s_n(q) = \frac{1}{q+1} n^{q+1} + \frac{1}{2} n^q + \sum_{k=1}^{q-1} a_{k,q} n^{q-k}.$$

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 26.04.2022, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 03.05.2022, in den Übungen