Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2022
26.04.2022
Blatt 03

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

Aufgabe 9 (4 Punkte) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.

(a) $(1+i)^4$ (b) $\dfrac{1}{(3-i)^2}$ (c) $\dfrac{2+3i}{1-2i} + \dfrac{i}{3+i}$ (d) $i^k,\ k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 10 (4 Punkte) Welche der nachstehenden Formeln für das Summen- bzw. Produktzeichen sind stets richtig, welche im allgemeinen falsch? Beweisen oder widerlegen Sie!

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

(c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k b_k = \prod_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$

(d) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \prod_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k\Big)$

(f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k b_k = \Big(\prod_{k=0}^{n} a_k\Big)\Big(\prod_{k=0}^{n} b_k\Big)$

(g) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k - a_{k+l} = \sum_{k=m}^{m+l-1} a_k - \sum_{k=n+1}^{n+l} a_k$

Aufgabe 11 (4 Punkte) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung: Sind für $i \in \{1, \dots, n\}$ reelle Zahlen $x_i \geq 0$ gegeben, so ist

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Bemerkung und Zusatzfrage: Sind alle x_i identisch, so erhält man die Bernoullische Ungleichung, die für $x \geq -1$ gültig ist. Gilt also die angegebene Ungleichung auch für $x_i \geq -1$ oder zumindest für $x_i \in [-1, 0]$?

Aufgabe 12 (4 Punkte, Abels Lemma) Es seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ und, für $m-1 \leq k \leq n+1$, $a_k, b_k \in K$. Zeigen Sie die als "Abelsches Lemma" oder auch "Regel der partiellen Summation" bekannte Identität

$$\sum_{k=m}^{n} a_k(b_k - b_{k+1}) = a_{m-1}b_m - a_n b_{n+1} + \sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1})b_k.$$

Als Anwendung berechne man

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}\right).$$

(Am Ende sollte kein Summenzeichen mehr auftreten.)

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 03.05.2022, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 10.05.2022, in den Übungen