Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2022
10.05.2022
Blatt 05

# ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

**Aufgabe 17 (4 Punkte)** Die Folge $(x_n)$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \qquad n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, und berechnen Sie den Grenzwert. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton (fallend oder wachsend)?

Hinweis: Zum Nachweis, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, können Sie Satz 2 aus Abschnitt 2.4 der Vorlesung und die anschliessende Bemerkung benutzen.

**Aufgabe 18 (4 Punkte)** Es seien $p \geq 2$ eine natürliche und $a > 0$ sowie $x_1 > 0$ reelle Zahlen. Für $n \geq 2$ sei $x_n$ rekursiv definiert durch

$$x_n := \frac{1}{p}\left((p-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{p-1}}\right).$$

Zeigen Sie für $n \geq 2$, dass $x_n > 0$ gilt, sowie

(a) $x_n = x_{n-1}\left(1 + \frac{1}{p}(\frac{a}{x_{n-1}^p} - 1)\right)$,

(b) $x_n^p \geq a$,

(c) $(x_{n+1} - x_n)x_n^{p-1} \leq 0$.

Folgern Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^p = a$ konvergiert.

Hinweis zu (b): Verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung.

**Aufgabe 19 (4 Punkte)** Für $n \in \mathbb{N}$ sei $e_n^* = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung, dass die Folge $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist.

**Aufgabe 20 (4 Punkte)** Es seien $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge nichtnegativer reeller Zahlen, $S := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $a_n := \max\{x_k : 1 \leq k \leq n\}$. Zeigen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = S$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n\right)^{\frac{1}{n}} = S$.

Hinweis: Für (b) verwende man das "Sandwich-Theorem".

**Abgabe:** in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 17.05.2022, 10.25 Uhr
**Besprechung:** ab Di., 24.05.2022, in den Übungen